АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1—5014

№ 1—6 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga,
Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10003

JOHNSON REPRINT COMPANY LIMITED
Berkeley Square House, London, W. 1

First reprinting, 1965, Johnson Reprint Corporation
Printed in the United States of America

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

QA
1
A373
1956
no. 1-6

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

1—916

*

Referativnyi zhurnal: Matematika

№ 1 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

31 a1168

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Ефимов, В. В. Немытов, В. И. Диткин, А. П. Лебедев, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), А. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии . . . 6
Основания математики и математическая логика 13
Теория чисел 18
Алгебра 32
Многочлены и линейная алгебра . . . 32
Группы 36
Поля, кольца и структуры 44
Топология 48
Теория функций действительного переменного 57
Теория множеств 59
Приближение функций полиномами и их обобщениями 59
Теория функций комплексного переменного 65
Дифференциальные уравнения 79
Обыкновенные дифференциальные уравнения 79
Уравнения в частных производных . . 86
Приложения к физике, технике и естественным наукам 93
Интегральные уравнения 97
Приложения интегральных уравнений . . 99
Вариационное исчисление 101
Анализ (другие вопросы) 103
Числовые ряды 107
Специальные функции 112
Интегральные преобразования и операционное исчисление 115
Приложения общих методов математического анализа . . . . . —
Функциональный анализ 117
Теория вероятностей 136
Математическая статистика 138
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 141
Геометрия 142
Приложения геометрии . . . . . —
Проективная и начертательная геометрия 142
Алгебраическая геометрия 144
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 146
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 148
Метрические методы в геометрии . . . 152
Геометрия выпуклых многообразий . . . 153
Численные и графические методы 154
Таблицы . . . . . —
Математическая теория электрических цепей 161
Вычислительные машины и математические приборы 165
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . —
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 1—916 **№ 1** **Январь 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

1. **Вступительное слово президента Академии наук СССР академика А. Н. Несмеянова** (Годичное собрание Академии наук СССР, 2 февраля 1955 года), Вестн. АН СССР, 1955, № 3, 12—18
2. **Основные итоги научной деятельности АН СССР за 1954 год. Топчиев А. В.** (Годичное собрание Академии наук СССР, 2 февраля 1955 года), Вестн. АН СССР, 1955, № 3, 19—38
3. **Сотрудничество Академий наук Китая и Советского Союза** (Письмо президента Китайской академии наук Го Мо-жо), Вестн. АН СССР, 1955, № 8, 58—59
4. **Основные итоги научной деятельности учреждений АН УССР за 1954 г. и задачи на 1955 г. Семененко** (Основні підсумки наукової діяльності установ АН УРСР за 1954 р. і завдання на 1955 р. (Скорочена стенограма). Семененко М. П., Вісник АН УРСР, 1955, № 4, 29—47 (укр.)
5. **Научная деятельность Математического института Польской академии наук. Куратовский К.,** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 217—221
6. **Сообщения о заседаниях Польского математического общества** (Comptes rendus. Société polonaise de mathématique. Séances de la section de Cracovie), Colloq. math., 1955, **3**, № 2, 174—210 (франц.)

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях секций Польского математического общества в Кракове, Люблине, Познани, Торуни, Вроцлаве за период сентябрь 1951 г.—июнь 1953 г.

7. **IV съезд чехословацких математиков в Праге. Новак** (IV. sjezd československých matematiků v Praze. Novák J.), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 2, 259 (чеш.)

С 1 по 8 сентября 1955 г. в Праге состоялся съезд чехословацких математиков, созванный физико-математической секцией Чехословацкой академии наук. На съезде присутствовали математики из Советского Союза, стран народной демократии и некоторых западных стран. Л. А. Стебакова

8. **Заседания Московского математического общества.** Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 203—215

Сообщается о докладах, прочитанных на заседаниях Московского математического общества:

9 ноября 1954 г. А. О. Гельфонд, Об элементарном доказательстве теоремы Дирихле. Ю. М. Березанский, Некоторые вопросы спектральной теории уравнений в частных разностях и частных производных.

16 ноября 1954 г. Л. А. Скорняков, Системы кривых на плоскости (РЖМат, 1955, 4692).

23 ноября 1954 г. Б. М. Левитан, О разложении по собственным функциям сопряженных дифференциальных уравнений в частных производных. Г. Е. Шилов, Об одной теореме типа Фрагмена — Линделёфа для систем линейных уравнений с частными производными. В. А. Андрунакиевич, Кольца с условием минимальности для двусторонних идеалов.

30 ноября 1954 г. С. М. Никольский, Некоторые вопросы приближений функций полиномами.

7 декабря 1954 г. М. Катетов, К теории размерности. М. А. Красносельский, О вычислении вращения векторных полей. Ш. Шварц, О теории характеров коммутативных полугрупп.

14 декабря 1954 г. О. А. Ладыженская, О разрешимости нестационарных задач для уравнений параболического и гиперболического типов. М. Ф. Бокштейн, К теории гомологических инвариантов топологических пространств. Н. С. Пискунов, Решение одной задачи для эллиптического уравнения, имеющей приложения в подземной гидромеханике.

21 декабря 1954 г. Н. П. Романов, Аналитические функции целого аргумента. В.А Ефремович, Почти топологические свойства.

28 декабря 1954 г. В. Г. Болтянский, Косые произведения и некоторые их применения.

8 февраля 1955 г. М. А. Наймарк, Бесконечномерные неприводимые представления собственной группы Лоренца (РЖМат, 1955, 5153). В. Т. Базылев, Квази-лапласовы преобразования многомерных поверхностей. В. Г. Болтянский, О расслоении пространств отображений.

9. **Октябрьское собрание в Кембридже** (The October meeting in Cambridge), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 1, 34—56 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 506-му собранию Американского математического общества 30 октября 1954 г.

10. **Ноябрьское собрание в университете Алабамы** (The November meeting in University, Alabama), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 1, 57—71 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 507-му собранию Американского математического общества 26—27 ноября 1954 г.

11. **Ноябрьское собрание в городе Айова** (The November meeting in Iowa city), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 1, 72—76 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 508-му собранию Американского математического общества 26 ноября 1954 г.

12. **Ноябрьское собрание в Лос-Анжелосе** (The November meeting in Los Angeles), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 1, 77—84 (англ.)

Приводятся краткие резюме докладов, представленных 509-му собранию Американского математического общества 27 ноября 1954 г.

13. **Юбилейная математическая конференция в Берлине.** Чех (Jubilejní matematická konference (Riemann-Tagung) v Berlíně. Čech Eduard), Vist Ceskosl. akad. věd., 1955, 64, № 1—2, 80—81 (чеш.)

10—16 октября 1954 г. в Берлине состоялась конференция в ознаменование 100-летия знаменитой лекции Римана «О гипотезах, лежащих в основании геометрии». Приводится перечень докладов, прочитанных на конференции.

14. **Второй конгресс математиков и физиков Югославии. Загреб, 4—9 октября 1954 г.** Вучкич (Drugi kongres matematičara i fizičara Jugoslavije. Zagreb, 4.—9. X. 1954. Vučkić M.). Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, 9, № 3—4, 295—296 (серб.)

15. **Международный философский конгресс в Швейцарии.** Новчук М. Т., Вестн. АН СССР, 1955, № 3, 76—81

Сообщение и краткая характеристика докладов, прочитанных на заседаниях Международного философского конгресса с 23 по 28 августа 1954 г. в Цюрихе. Упоминается, в частности, о докладе А. Тарского — одного из представителей идеалистического направления в математической логике.

16. **О преподавании математики в Италии.** Себаштьян-и-Силва (Sobre o ensino da Matemática em Itália. Sebastião e Silva J.), Gas. mat., 1954, 15, № 57, 5—12 (порт.)

Постановка преподавания математики в Италии представляет интерес, во-первых, вследствие того, что вопросы методики и дидактики математики подвергались обсуждению ряда выдающихся итальянских математиков, а также вследствие особенности постановки университетского преподавания в Италии, где не делается различия между университетским и техническим обучением (на 36 университетов имеется всего лишь 2 специальных политехникума); инженерные факультеты обычно входят в состав университета.

В Италии имеются четыре типа училищ: 1) классическая гимназия (Liceo-Ginnasio Classico), 2) реальное училище (Liceo Scientifico), 3) педагогический институт (Instituto Magistrale), 4) технический институт (Instituto Tecnico) пяти специальностей (индустриальный, коммерческий, мореходный, агрономический и землемерный). Окончившие классическую гимназию имеют право поступления на любой факультет, окончившие реальное училище — на любой факультет, кроме юридического и филологического.

В течение последних двух лет в реальном училище изучаются достаточно подробно дифференциальное и интегральное исчисления. В этом отношении в Италии была проделана работа, аналогичная установлению Ф. Клейном меранской программы (главным деятелем был Ф. Энриквес), однако математические учебники средней школы в Италии отличаются от немецких несколько большей логической строгостью.

Читаемые в университетах курсы разделяются на общеобязательные и специальные.

Общая продолжительность обучения составляет четыре года на всех специальностях, кроме химической, где обучение продолжается 5 лет. Обязательные курсы, как правило, проходятся в течение первых двух лет: для получающего лиценциатуру математических наук они представляют собою: 1) математический анализ (с высшей алгеброй) — 2 года, 2) аналитическая геометрия (с элементами проективной и начертательной) — 2 года, 3) специальные главы анализа (Analise superior), 4) высшая геометрия, 5) теоретическая механика с началами черчения, 6) экспериментальная физика с практическими упражнениями — 2 года, 7) математическая физика, 8) общая и неорганическая химия с элементами органической. Курсы анализа и аналитической геометрии читаются каждый поочередно двумя профессорами для того, чтобы студент мог прослушать весь курс только у одного профессора (дробное деление курсов на семестры в Италии считается нежелательным). Остальные курсы читаются по году: экзамены производятся по истечении года занятий (кроме экспериментальной физики, где имеется только один экзамен за весь курс). Экзаменационные сессии бывают в июне и октябре, чтение лекций занимает период от ноября по май.

Кроме общеобязательных курсов, студент обязан прослушать по своему выбору не менее трех специальных.

К государственному экзамену (лиценциатура) допускаются студенты, успешно закончившие все общеобязательные и три специальных курса. Основной частью государственных экзаменов является устная защита представленной в письменном виде диссертации, которая по мере возможности должна представлять некоторую оригинальность. Кроме того, государственные экзамены предполагают устную разработку двух или трех вопросов по назначению жюри. Специальных экзаменов типа наших кандидатских в Италии не существует: каждый, окончивший лиценциатуру, автоматически получает ученую степень, аналогичную португальскому «доктору». Подготовка упомянутой диссертации начинается с третьего года занятий, причем выбор специальных курсов определяется в значительной степени ее темой.

Окончание университета еще не означает окончания вообще образования. В Италии существуют одно- и двухгодичные курсы усовершенствования двух типов: одни дают диплом, позволяющий занять ту или другую профессиональную должность, другие же имеют чисто теоретический характер, не дают диплома и слушатели их работают исключительно из любви к науке. Эти последние курсы положили начало целому ряду итальянских математических научных школ, как, например, алгебраической геометрии (Кремона и Энриквес), функционального анализа (Вольтерра), абсолютного исчисления (Риччи и Леви-Чивита).

Присуждение профессорского звания происходит на основании изучения автобиографии кандидата, представляемых им в печатном виде научных трудов и устного сообщения кандидата относительно основных направлений его научно-исследовательской деятельности. Кроме того, в случае надобности от кандидата могут потребовать испытания на практике его преподавательских способностей.

Из упомянутых учреждений, дающих послеуниверситетское образование, на первом месте стоит Высшая нормальная школа в Пизе, питомцами которой являются большая часть выдающихся математиков Италии. Поступающие в нее лиценциаты дают формальное обязательство посвятить себя научной или педагогической деятельности и во время слушания курсов пользуются бесплатным помещением и содержанием.

Научно-исследовательскую деятельность в Италии возглавляет государственный орган — Национальный совет по научным исследованиям (Consiglio Nationale delle Ricerche), организующий и планирующий научно-исследовательскую работу, от которого зависит большое количество научно-исследовательских центров. Кроме большого количества специальных журналов, Национальный совет издает центральный орган «La Ricerca Scientifica» (ежемесячные книжки около 150 страниц), дающий обзор сделанных достижений по всей стране. В области математики выдающееся место занимают основанный в 1940 г. Институт высшей математики в Риме (президент Фр. Севери) и Институт прикладной математики (тоже в Риме), основанный в 1927 г. проф. Мауро Пиконе. Деятельность этого ин-

ститута направляется Советом, в который, кроме членов Дирекции, входят представители различных ведомственных организаций, в частности министерств Воздушного флота, Общественных работ, Путей сообщения, Корпораций, Народного просвещения, а также Военного и Морского. Разрабатываемые институтом вопросы относятся к следующим областям знания: 1) строительная механика и теория упругости, 2) статика и динамика воздухоплавательных конструкций, 3) теория колебаний в конструкциях различного типа, 4) гидравлика, 5) мостостроение, 6) машиностроение, 7) железнодорожный транспорт, 8) электротехника и радиотехника, 9) термометрия и термология, 10) аэродинамика, 11) геофизика, 12) оптика, 13) экономика промышленности, 14) статистика, 15) страховая математика, 16) финансы, 17) экономическая динамика, 18) баллистика и теория артиллерии, 19) табулирование специальных функций. В распоряжении Института находится большой штат вычислителей и чертежников, а также усовершенствованные счетные машины. В настоящее время устанавливается счетная машина, позволяющая вычислить величину определителя 100-го порядка в течение 20 часов. И. Н. Веселовский

17. **Математическая лаборатория в средней классической школе и в техническом колледже. Бриджер** (The mathematical laboratory in the grammar school and the technical college. Bridger Marcus), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 415—416 (англ.)

Традиционное оборудование математической лаборатории состоит из приборов элементарной механики. В связи с тем, что в промышленности, торговле и государственных учреждениях методы вычислений становятся все более механизированными, появилась необходимость в изменении оборудования математической лаборатории как классической средней школы, так и технического учебного заведения. Изменился и смысл выражения «прикладная математика»: теперь оно включает численные методы и статистику.

Минимальное оборудование должно состоять из настольной вычислительной машины и хорошего набора математических таблиц. Технические колледжи следует снабдить дополнительно автоматической вычислительной машиной. В технических институтах должны иметься не только различного типа счетные линейки, но и планиметры, гармонический анализатор и небольшая машина для решения дифференциальных уравнений. Е. К. Нечаев

18. **Проективное мышление в преподавании математики. Вольф** (Das projektive Denken im mathematischen Unterricht. Wolff Karl Georg), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 428—429 (нем.)

В течение последних 80 лет в Германии произошла перестройка преподавания математики от геометрии Евклида к геометрии отображений. Эрлангенская программа Ф. Клейна служила руководящим принципом. Благодаря ей в школьную математику вошли не обрывки проективной геометрии, а систематически изучаемые группы движений, подобий, аффинных и проективных преобразований. Н. М. Бескин

19. **О математическом образовании в немецких университетах. Бенке** (Von der mathematischen Ausbildung an den deutschen Universitäten. Behnke Heinrich), Math.-phys. Semesterber., 1954, **4**, № 1/2, 1—41 (нем.)

Статья из сборника материалов, подготовленного немецкой секцией Международной комиссии по преподаванию математики (IMUK) для математического конгресса в Амстердаме (1954). После кратких сведений из истории немецких университетов приводятся статистические данные о числе преподавателей и студентов в университетах Германской Федеральной Республики, а также анализ успеваемости студентов-математиков и студентов смежных специальностей (по этим данным 25—40% студентов специальности математики не заканчивает первого года обучения). Вторая часть статьи посвящена обзору материала лекционных курсов. Она содержит также высказывания автора по ряду вопросов, относящихся к подготовке учителей математики. Автор в основном за усиление профессиональной подготовки учителей в университетах, так как считает ложным основной аргумент против этого, а именно: «кто был в состоянии успешно изучить сложные математические дисциплины, тот обладает достаточным умственным развитием, чтобы затем с легкостью усвоить дидактику». Основные положения автора: 1. Для овладения какой-либо областью знаний мало быть соответствующим образом подготовленным, необходим еще интерес и любовь к делу (в данном случае к элементарной математике и ее преподаванию), которые должны прививаться будущим учителям. 2. Большой разрыв между университетской математикой и школьным преподаванием приводит к тому, что начинающий учитель опирается в своей практической работе не на знания, полученные им в университете, а на воспоминания о своей собственной учебе в школе, и приветствует рекомендацию старых учителей: «теперь основательно забудьте все то, что Вы учили в университете». 3. Хотя «чистая техника обучения», т. е. методика преподавания, не должна фигурировать в учебном плане университета, необходим постоянный контакт между преподавателями и студентами университета, с одной стороны, и лучшими учителями школ,— с другой; для этой цели наиболее удачной формой общения является постоянно действующий семинар по вопросам элементарной математики. В заключение приводятся сведения о государственных экзаменах. В. И. Левин

20. **О математической жизни в Германской Демократической Республике. Гнеденко Б. В., Калужнин Л. А.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 133—154

Обзор состояния преподавания математики в высших школах ГДР. После краткого очерка истории германских университетов более подробно освещается современное положение на математических кафедрах. Приводятся новые учебные планы по специальности математика в университетах (пятилетнее обучение), в Дрезденской высшей технической школе и в Потсдамской высшей педагогической школе, в связи с обсуждением которых отмечаются некоторые особенности в постановке и содержании отдельных курсов. Статья содержит также сведения о состоянии научной работы по математике и издании математических книг и журналов в ГДР. В частности, приводится список книг немецких авторов, изданных в ГДР после 1949 г., и список книг русских авторов, изданных, издаваемых и намеченных к изданию в ГДР (последний список содержит 71 название). В. И. Левин

21. **Дидактические исследования в области математики, проведенные в Институте педагогики Утрехтского университета. Бюнт** (Didactical research in the field of mathematics at the Institute of Education of the University of Utrecht. Bunt Lucas Nicolaas Hendrik), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 416—417 (англ.)

Перечень тем, занимавших сотрудников института в последние годы. Среди тем: изучение мнения учителей о содержании программ, правильности распределения уроков по темам и составлении экзаменационных билетов, а также организация и изучение экспериментов по введению нового материала в школьные программы. В. И. Левин

22. Обзор учебного материала по математике в старших классах средних школ Германской Федеральной Республики. Р а у (Übersicht über den Lehrstoff des mathematischen Unterrichts der Oberstufe an den höheren Schulen der Bundesrepublik. R a u H e i n z), Math.-phys. Semesterber., 1954, **4**, № 1/2, 138—145 (нем.)

Подробный анализ материала, преподаваемого на 11—13 годах обучения в школах Западной Германии. Приводятся статистические данные об удельном весе каждой темы (логарифмы, прогрессии, плоская тригонометрия, сферическая тригонометрия, начертательная геометрия, комплексные числа, векторная алгебра, дополнительные главы) в трех типах средних школ (классическая и новая гимназия, школы физико-математического направления) по различным землям. В. И. Левин

23. Математика для специалистов в области общественных наук. Б у ш, М а д о у, Р е й ф ф а, Т р о л л (Mathematics for social scientists. B u s h R. R., M a d o w W. G., R a i f f a H o w a r d, T h r a l l R. M.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 8, 550—561 (англ.)

Отчет о летних курсах повышения математической квалификации преподавателей общественных наук за 1953 г. (США). Среди 41 слушателя было 12 профессоров и 19 человек с учеными степенями. По специальностям слушатели были распределены так: 20 психологов, 11 социологов, 7 экономистов и 3 специалиста в области других наук. В учебном плане фигурировали курсы: теория вероятностей с уклоном в теорию стохастических процессов, математический анализ и дифференциальные уравнения, алгебра и аксиоматика, включая теорию матриц. Статья содержит общие соображения о роли различных математических дисциплин в гуманитарных науках. В. И. Левин

24. Преподавание математики на основе самостоятельной работы учащихся в средней школе. З е н г е н х о р с т (Arbeitsunterrichtliche Methoden in der Mathematik der höheren Schulen. S e n g e n h o r s t P a u l), Proc. Internat. Congr. Math.,1954, **2**, Amsterdam, 1954, 426—427 (нем.)

Имеется в виду методика преподавания («Arbeitsunterricht»), получившая некоторое развитие в Германии между 1918 и 1933 годами и состоящая в том, чтобы активизацией мысли учащихся путем наводящих вопросов, умело поставленных экспериментов и т. п. подводить их к возможно более самостоятельной формулировке теорем, решению задач и т. д. Отмечается, что математика является предметом, более всего нуждающимся в такого рода методике и в то же время наиболее подходящим для ее приложения. Кратко приводится несколько конкретных методических соображений. В. И. Левин

25. Наглядность и строгость в преподавании математики в немецких средних школах. Б а у р (Anschaulichkeit und Strenge im mathematischen Unterricht der deutschen Oberschule. B a u r A r n o l d), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 414—415 (нем.)

Утверждается, что в школах Германской Федеральной Республики успешно сочетается наглядность в преподавании математики со строгим ее изложением. Отмечается, что понятие математической строгости, так же как и наглядности, не является раз навсегда определенным, а подвержено изменениям. В. И. Левин

26. Направления изменения содержания программ по математике в школах США. Р о с к о п ф (Trends in the content of high school mathematics in the United States. R o s s k o p f M y r o n F.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 424—425 (англ.)

С 1900 г. американская средняя школа начинает отходить от европейских (преимущественно немецких) образцов. Но и в настоящее время среди учителей математики в США наблюдается недовольство действующими программами, слишком жестко предписывающими последовательность прохождения материала, и раздаются голоса, требующие коренного пересмотра традиционной методики. В. И. Левин

27. Математика в средней школе. К р а м е р (Mathematik an Gymnasien (höheren Schulen). C r a m e r H a n s), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 418—419 (нем.)

Формулировка точки зрения о необходимости введения строгого изложения математики в средней школе, в особенности арифметики (которая «формально» проходится в начальной школе) и геометрии. Конкретно речь идет о введении иррациональных чисел, измерении длин, площадей и объемов и о началах математического анализа. В. И. Левин

28. Обращение профессоров физики Падуанского университета с предложением объединить преподавание математики и физики в средней школе. Д а л л а п о р т а, П у п п и, Р о с т а н ь и (Una circolare dei professori di fisica dell'Università di Padova a proposito dell'abbinamento della matematica e della fisica nell'insegnamento medio. D a l l a p o r t a N., P u p p i C., R o s t a g n i A.), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 3, 286—289 (итал.)

Наряду с некоторыми моментами организационного порядка приводятся методические соображения в пользу совместного преподавания математики и физики в средней школе. В. И. Левин

29. Структурные ступени школьной математики, обусловливаемые возрастными особенностями восприятия. Д р е н к х а н (Strukturstufen der Schulmathematik in Anpassung an alterstypische Auffassungsweisen. D r e n c k h a h n F r i e d r i c h), Proc. Internat Congr, Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 419—420 (нем.)

30. Философское углубление математического преподавания. Р ю п и н г (Philosophische Vertiefung des mathematischen Unterrichts. R ü p i n g H e i n r i c h), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 425 (нем.)

Для философски углубленного понимания математики автор считает нужным при ее преподавании заострять внимание на вопросах логической структуры математики, характера образования математических понятий, общего хода математических доказательств, на теоретико-познавательной проблематике, касающейся сущности математики и границ математического познания. Указывается на важное значение для этой цели исторического рассмотрения проблем. Л. П. Гокиели

31. Роль математики в науке. Э д у а р д с (The role of mathematics in science. E d w a r d s P. D.), Proc. Indiana Acad. Sci., 1952, **62**, 45—51 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Приводится ряд характерных фактов из истории науки, подтверждающих связь развития математики с задачей изучения природы и с запросами других наук. Высказывается предположение, что современные дифференциальная геометрия, алгебраическая геометрия, координатная проективная геометрия и топология во второй половине века включатся в прикладную математику. В общий тон статьи, импонирующий подчеркиванием связи развития математики с практикой, вносит диссонанс принятие расселовского «определения» математики. Л. П. Гокиели

32. Становление и достоверность математического познания. К а м к е (Werden und Sicherheit mathematischer Erkenntnis. K a m k e E.), Jahresber. Dtsch. Math.-Ver., 1954, **57**, № 1, 6—20 (нем.)

Автор опровергает мнение, опирающееся на высказывания Канта и Гильберта, что формы математического мышления имеют априорный, независимый от опыта, смысл. В действительности, математические сведения возникают у человека в результате длительного интеллектуального развития, начиная с простейших духовных функций. Это развитие продолжается и в наше время.

Абстрактные понятия и заключения возникают из опыта, а многие из них применяются и проверяются в повседневной жизни до того, как они были абстрагированы. Это обеспечивает достоверность математического познания. Математические выводы и методы применимы в других науках, где они зачастую служат средством проверки истинности высказываемых суждений.

В качестве иллюстрации в статье приведен ряд фактов из истории математики, относящихся главным образом к спорам вокруг основных понятий теории множеств и принципа исключенного третьего.

К. А. Рыбников

33. Становление и достоверность математического познания. Камке (Werden und Sicherheit mathematischer Erkenntnis. Kamke Erich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 422—423 (нем.)

34. Математические чудовища. Купер (Mathematical monsters. Cooper J. L. B.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 326, 258—265 (англ.)

Краткий обзор известных парадоксов и антиномий, связанных с современными представлениями о кривой линии, мере, бесконечных рядах и множествах. Приводятся примеры геометрические, теоретико-множественные и логические, а также некоторые парадоксы теоретической физики и механики (к. п. д. >1 и т. п.).

Б. А. Кордемский

35. О переменных в математике и естествознании. Менгер (On variables in mathematics and in natural science. Menger Karl), Brit. J. Philos. Sci., 1954, **5**, № 18, 134—142 (англ.)

36. Геометрия и действительность. Хансен (Geometrie und Wirklichkeit. Hansen Hans Henrik), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 421—422 (нем.)

37. Искусство вычислений в уме, с демонстрациями. Эйткен (The art of mental calculation; with demonstrations. Aitken A. C.), J. and Trans. Soc. Engrs, 1954, **45**, № 4, 295—309 (англ.)

Лекция проф. Эйткена о приемах быстрого счета в уме. На лекции проф. Эйткен демонстрировал свои способности (быстро вычислял, например, квадратные корни из четырехзначных чисел с пятью значащими цифрами) и свою память (перечислил несколько сот знаков числа π, которое он запомнил с 1000 знаками особым ритмическим способом). После лекции имела место дискуссия по вопросам о вычислении в уме и психологии математического творчества вообще. Ф. В. Широков

38 К. О профессии математика. Изд. 2-е, дополн. Колмогоров А. Н. М., Изд-во «Сов. наука», 1954, 31 стр., 50 коп.

39 К. Курс высшей математики. Т. 2. Смирнов (Curs de matematici superioare. Vol. 2. Smirnov V. I. Bucureşti, Ed. tehnică, 1954, 680 p., 20, 40 lei), Bul. bibliogr., 1954, **A3**, № 24, 10 (рум.)

40 К. Заметка к курсу алгебры и анализа. Продолжение. Гиркояшу (Note la cursul de algebră şi analiză. Continuare. Ghircoiaşu N. Institutul politehnic Cluj., Exemplar litografiat, 1953, 413 p.), Bul. bibliogr. cărţii, 1954, **3**, № 9, 10 (рум.)

41 К. Дополнительные лекции по математике. Пьяццолла-Белок (Lezioni di matematica complementare. Piazolla Beloch M. La matematica elementare vista dall'alto. Redatte dal Prof. Egidio Orzalesi. Istituto di Geometria dell'Università di Ferrara, 1953, 439 p., 2700 Lire) (итал.)

Эти лекции по элементарной математике предназначены в основном для студентов учительских школ второй ступени в Италии, но они могут представить интерес и для преподавателей в других странах. Краткое содержание: I. Арифметика и алгебра: натуральные, рациональные и вещественные числа; делимость, простые числа, сравнения, непрерывные дроби, диофантовы уравнения, кубические и биквадратные уравнения, алгебраические и трансцендентные числа. II. Геометрия: основания; неевклидова геометрия; конгруэнтность; площадь и объем; преобразования; элементарные геометрические задачи; задачи третьей и четвертой степени, классические задачи; теория геометрических построений.

Не все темы изучены достаточно подробно, но большинство разделов снабжено обширными комментариями. Исторические и педагогические примечания повышают ценность книги как учебного пособия. F. A. Behrend

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 684.

42 К. Высшая математика Ч. I (Matematici superioare. Fascicola I. Bucureşti, Ministerul Învăţămîntului. Cursuri fără frecvenţă. Curs litografiat, 1954, 99 p.), Bul. bibliogr. cărţii, 1954, **3**, № 10, 15 (рум.)

43 К. Преподавание математики в свете задачи политехнического обучения. Линьков Г. И. (Из опыта работы в семилетней школе). Курск. Книгоиздат, 1953, 118 стр., беспл.

44 К. Введение в высшую математику. Рихновский (Uvod do vyšší matematiky. Rychnovský Richard. Praha, SPN, 1954, 232 s., 17.60 Kčs), Česká kniha, 1954, № 42, 1060 (чеш.)

45 К. Высшая математика для практиков. Изд. 7-е. Йос.Калуца (Höhere Mathematik für den Praktiker, 7. Aufl. Joos G., Kaluza Th. Leipzig: Barth, 1954, XII+387 S., 23.10 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 30, 1452 (нем.)

46 К. Общий курс математики. Колуччи (Matematica generale. Colucci Antonio. Napoli, R. Pironti e F., 1953, 509 p., 2200 L.), Bibliogr. ital., 1954, 88, № 633—634, 32 (итал.)

47 К. 800 упражнений по математике. Для университетов и высших школ, с ответами и указаниями. Геллерстедт (800 övningsuppgifter i matematik. För universitet och högskolor. Med. svar och anvisningar. Gellerstedt Sven. Sthlm: Almqvist und Wiksell/Geber, 1954, 200 s., 12 Kr. 50 öre), Svensk. bokhandel, 1954, № 36, 648 (швед.)

48 К. Сборник математических формул. Бжоска (Mathematische Formelsammlung. Brzoska Franz. Leipzig, Fachbuchverl., 1954, VIII+343 S., 170 Bild., 7.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 42, 2050 (нем.)

49 К. Сборник математических формул. Крусе, Нордквист (Matematisk formelsamling. Kruse S., Nordqvist B. 58 s., C. A. Reitzel, 1954, 2.85.), Danske Bogmarked, 1954, **100**, № 42, 906 (дат.)

50 К. Обзор технической математики. Обзор и учебник элементарной и высшей математики для технической практики с примерами и задачами для упражнений. Добровольный (Přehled technické matematiky. Přehled a učebnice nižší a vyšší matematiky pro techn. praxi s příklady a úkoly pro cvičení. 3. Dobrovolný Bohumil, Praha, Práce, 1954, 430, 2 s., 25,25 Kčs.), Česká kniha, 1954, № 40, 1018 (чеш.)

51 К. Математика технических систем (линейных и нелинейных). Лоден (Mathematics of engineering

systems (linear and non-linear). Lawden Derek Frank. London, Methuen; New York, Wiley, 1954, 380 p., 30 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 256, 7 (англ.)

52 К. Лекции по приложениям математики к естественным наукам. Родригес-Бахильер (Lecciones de matematica aplicada a las ciencians naturales. Rodriguez Bachiller T. Madrid, Imp. C. Bermejo, 1953, 128 p.), Bibliogr. hispanica, 1954, 13, № 478 (библ.)

53 К. Врата математики. Матезиус (Les portes des mathématiques. Mathesius P. Paris, Payot, 1954, 284 p., 1.200 fr.), Bibliogr. France, 1954, 143, № 46, I part., 1014 (франц.)

54 К. Математическая смекалка. Кордемский Б. А. Л., Гостехтеориздат, 1954, 568 стр., 9 р. 10 к.

55 К. Курс высшей математики повышенного уровня. Грин (Advanced level pure mathematics. Green Stanley Lawson. London, Univ. Tutorial P., 1955, VIII+642 pp., tables, 21 diagrs, 21 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 265, 7 (англ.)

56 К. Западноафриканская математика. Книга 1. Гибсон, Марделл (A west african mathematics. Book 1. Gibson G. R., Mardell T. B. London, Univ..., 1954, X, 11—224 pp., front., ill., tabl., diagr., map on endpapers, 6 sh. 6 d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 262, 10 (англ.)

57 Д. Опыт и дедукция в школьном курсе геометрии в VI и VII классах. Ерошкина Л. Н. Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и.ин-т акад. пед. наук РСФСР, М., 1955

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

58. О вавилонской геометрии. Брейнс (On Babylonian geometry. Bruins E. M.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 16—23; Indagationes math., 1955, 17, № 1, 16—23 (англ.)

На основании разбора текстов YBC 4675 и VAT 8512 автор показывает, что мы не имеем данных, которые позволили бы утверждать, что вавилоняне при определении площадей пользовались теоремами о пропорциональности отрезков между параллельными линиями.

И. Н. Веселовский

59. Успехи математики в древнем Китае (我國古代數學的成就), 科學大衆 (Кэсюэ дачжун), 1954, № 6, 220—223 (кит.)

Кратко сообщается об основных достижениях китайской математики, начиная с самых древнейших времен, когда счет вели при помощи завязывания узлов на веревке, а позднее перешли к иероглифическому способу записи. В древнем Китае применялась десятичная система счисления с мультипликативной формой записи, нуль никак не обозначался. Приводится таблица эволюции китайских цифр. В глубокой древности была создана таблица умножения «Девятью девять», которую и до сих пор китайские дети учат наизусть, и тогда уже были в употреблении дроби $^2/_3$; $^1/_2$; $^1/_3$ и др. Столь же древнего происхождения наугольник (имеются только две стороны, образующие прямой угол) и циркуль, о чем свидетельствует найденное при раскопках изображение мифологического императора Фуси и его сестры Нюйвы с этими инструментами в руках, высеченное на стенах древнего храма, и высказывания просветителя Мэнцзы (IV в. до н. э.).

Ко II в. до н. э. математика оформилась в науку; появляются первые ранние собственно математические трактаты: «Чжоуби суань-цзин», «Цзю чжан суань шу» («Девять разделов математики»), последний является самой полной по содержанию математической книгой того периода.

Теорема Пифагора была известна китайским математикам еще в глубокой древности, а ее наглядно-геометрическое доказательство дано Чжао Цзюнь-цинем (Ханьская династия, II в. до н. э.— II в. н.э.). Большие достижения имелись в вычислении π; так Цзу Чун-чжи (V в. н. э.) более чем на 1000 лет раньше по сравнению с западноевропейскими учеными дал следующую оценку π: $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$, а его сын Цзу Хэн вычислил объем шара, применив принцип, известный в наше время под именем Кавальери. Ван Сяо-тун (VII в. н. э.) продолжил работу по вычислению площадей фигур и объемов тел. Квадратные корни в Китае извлекались приближенно по следующей формуле: $\sqrt{N} = \sqrt{a^2+r} = a + r/2a$; другое приближение бралось такое: $a + r/2a + 1$. Периодом наибольшего расцвета китайской математики были эпохи Сун и Тан (XI—XIV вв. н. э.). Уже в это время был найден треугольник Паскаля для вычисления коэффициентов бинома Ньютона, решались способом Горнера уравнения выше 2-й степени. Одним из больших достижений китайской математики автор считает также изобретение китайских счетов, которые и до сих пор широко употребляются при практических расчетах. Он отмечает также, что развитие китайской математики находилось в тесной связи с развитием математики в Индии, Японии, Вьетнаме, а с середины XVII в. в Китай начинает проникать математическая культура из Западной Европы.

Э. И. Березкина

60. Понятие предела у древнего математика Лю Хуэя. Ду Ши-жань (古代算學家劉徽的極限觀念. 杜石然), 數學通報 (Шусюэ тунбао), 1954, № 2, 1—2 (кит.)

В древнем Китае отношение длины окружности к диаметру принимали равным 3 и площадь круга равной $^3/_4$ квадрата диаметра круга. Математик III в. н. э. Лю Хуэй в комментариях к более раннему сочинению «Девять отделов математики» применил для приближенного вычисления площади круга S последовательность правильных вписанных многоугольников S_n с удваивающимся числом сторон. Исходя из известной стороны вписанного 6-угольника и применяя теорему Пифагора, Лю Хуэй дошел до 192-угольника; при этом он оценивал площадь круга неравенствами

$$S_{2n} < S < S_{2n} + (S_{2n} - S_n$$

По мнению Ду Ши-жаня, Лю Хуэй имел представление о неограниченном приближении последовательности площадей вписанных таким образом многоугольников к площади круга. Лю Хуэй писал: «Чем мельче делить, тем меньше будет недостаток. Если делить все дальше и дальше до тех пор, пока деление не станет невозможным, то будет совпадение с окружностью и недостатка не будет». Ту же мысль о неограниченном приближении к некоторому пределу автор статьи усматривает в трактовке Лю Хуэем задачи о вычислении объема пирамиды и в его комментариях к способам приближенного извлечения квадратных корней. Весьма интересно при этом указание автора, что Лю Хуэй рекомендовал при извлечении квадратных корней применять фактически десятичные дроби. К сожалению, автор ограничивается самыми краткими замечаниями об употреблении Лю Хуэем десятичных дробей и многое здесь остается неясным. Заслуживает внимания, что Лю Хуэю было известно, что для $\sqrt{a^2+r}$ (a^2—целый квадрат, ближайший по недостатку к a^2+r) приближения $a + r/2a$ и $a + r/(2a+1)$ являются соответственно недостаточным и избыточным.

Э. И. Березкина, А. П. Юшкевич

61. Десятичная система счисления. Бхандаркар (The decimal notation. Bhandarkar A. S.), J. Bombay Branch Roy. Asiatic Soc., 1954, 29, № 1, 94—95 (англ.)

Датой появления десятичной системы в Индии Кане (Kāne P. V., J. Bombay Branch Roy. Asiatic Soc., 1953, 28) считает 700 год н. э. В статье указывается на более раннее упоминание об индийской системе счисления (Cajori, A history of mathematics, 1931, 89 p.), принадлежащее сирийскому ученому Северу Себокту (662 год н. э.).

Автор считает, что десятичная система возникла в Индии значительно раньше, в последней четверти II в. н. э. или даже ранее. Косвенным доказательством могут служить известные достижения Ария-Бхаттия (род. в 476 г. н. э.) в области арифметики и алгебры. Предположение Каджори о заимствовании индийцами у вавилонян принципа поместного значения расценивается, как ничем не обоснованная догадка.

Выдвигается предположение о том, что позиционный принцип был применен индийскими математиками не только к целым числам, но и к десятичным дробям.

И. Г. Мельников

62. Происхождение алгебры. Натуччи (L' origine dell'algebra. Natucci A.), Giorn. mat. Battaglini, 1954, 82, № 2, 429—436 (итал.)

Обзор точек зрения различных историков математики на предысторию алгебры до появления алгебраического трактата Мухаммеда ал-Хорезми. В частности, рассматриваются зачатки алгебры у древних египтян, вавилонян, индийцев и греков.

Б. А. Розенфельд

63. Греческая алгебра в учебниках арифметики средневековья. Фогель (Griechische Algebra in Rechenbüchern des Mittelalters. Vogel Kurt), Math.-phys. Semesterber., 1954, 4, № 1/2, 122—130 (нем.)

Линейные уравнения занимали незначительное место в математике вавилонян, а древние греки относили их к практическим задачам, решению которых они не придавали познавательной и теоретической ценности.

Диофант первый из греков решает линейные уравнения, излагая при этом применяемый им метод; наибольший интерес вызвали его методы решения неопределенных уравнений.

Благодаря Ямблиху, мы знакомы с целой группой задач на линейные уравнения, которые впоследствии облекались в занимательную форму и в таком виде вошли в развлекательную литературу. Эти занимательные задачи являлись обязательной составной частью арифметических учебников Западной Европы в средние века. К излюбленным задачам такого рода, сводящимся к неопределенным линейным уравнениям, относятся задачи на «кошелек с деньгами», содержание которых заключается в следующем: несколько лиц находят кошелек с деньгами; каждый из участников по очереди говорит, что его деньги вместе с содержимым кошелька составляют определенную долю денег, имеющихся у одного (или у нескольких) из остальных. Следует определить количество денег у каждого и в кошельке.

Также широко были распространены задачи на «встречи», суть которых состоит в том, что несколько человек встречаются при покупке лошади, дома и т. д. Каждый из участников мог бы купить эту вещь, если остальные прибавят к его деньгам определенную часть своих денег. Следует определить наличие денег у каждого и стоимость покупаемой вещи.

Большое количество таких занимательных задач содержится в «Книге об абаке» Леонардо Пизанского (1202), у Иордана Неморария (XIV в.), в сборнике задач монаха Фридерихса Гергардта (1455—1464) и др.

Автор полагает, что эти задачи греческого происхождения. «Живучести» этих античных задач, которые, по мнению автора, и по сей день не лишены интереса, особенно способствовал Л. Эйлер, включивший значительное их количество в свой курс алгебры.

В заключение автор говорит, что если в настоящее время требуют удаления из задачников такого «залежалого товара», то при этом не следует забывать, что, во-первых, и развлечения являются частью жизни, во-вторых, именно на таком материале развивалась алгебра и, в-третьих, такие задачи особенно пригодны для развития смекалки.

А. Е. Раик

64. Математические трактаты Джемшида Гиясэддина Каши. Историко-матем. исследования, вып 7, М., Гостехиздат, 1954, 9—449

Перевод с арабского «Ключа к арифметике» и «Трактата об окружности», выполненный Б. А. Розенфельдом. Комментарии А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда.

65. Трактат об окружности. Ал-Каши Джемшид ибн Мас'уд. Перевод с арабского и комментарии Луккея (Der Lehrbrief über den Kreisumfang (arrisāla al-muhīṭīya). Al-Kāšī Ǧamšīd B., Mas'ud. Übersetzt und erläutert von Luckey P.), Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. Math. naturwiss. Kl., 1950, № 6, 3—95 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Перевод трактата выдающегося самаркандского математика 14—15 вв., посвященного вычислению числа 2π. Ал-Каши, следуя Архимеду, пользуется тем, что сторона правильного вписанного 3.2^n-угольника при радиусе окружности 1 равна $s_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+1}}}$ (n квадратных корней), вычисляет периметр вписанного и описанного многоугольников указанного вида при $n = 28$ и, принимая число 2π за среднее арифметическое полученных значений, находит, что число 2π равно в шестидесятиричных дробях (в которых ал-Каши производил вычисления)

$$2\pi = 6,\ 16\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50,$$

а в десятичных дробях (открытых самим ал-Каши и впервые примененных в этом трактате):

$$2\pi = 6,\ 2\,8\,3\,1\,8\,5\,3\,0\,7\,1\,7\,9\,5\,8\,6\,5.$$

Вычисления ал-Каши произведены на чрезвычайно высоком для своего времени уровне техники приближенных вычислений.

В переводе Луккея приведен полный текст трактата, за исключением вычислительных таблиц, в которых производится извлечение квадратных корней: из 28 таблиц ал-Каши приведены только 1-я, 2-я, 15-я и 28-я. К переводу приложен полный арабский текст трактата, также за исключением таблиц, из которых приведены только 1-я и 2-я. К первому приложены также подробные комментарии Луккея, в которых освещается история вопроса и анализируется техника приближенных вычислений ал-Каши.

Примечания референта. 1. В переводе не исправлена ошибка ал-Каши, считавшего, что число сторон рассматриваемого им многоугольника (3.2^{28}) равно 800 335 168. На самом деле это число равно 805 306 368. 2. Русский перевод полного текста этого трактата (за исключением таблиц, из которых приведены только 1-я, 2-я, 27-я и 28-я) с фотокопии той же рукописи, с которой сделан перевод Луккея, опубликован в 7-м выпуске «Историко-математических исследований» (М., Гостехиздат, 1954, стр. 327—378); там же приведен перевод другого трактата ал-Каши «Ключ к арифметике» (стр. 13—326) и комментарии к обоим трактатам (стр. 379—449).

Б. А. Розенфельд

66. Итерационный метод ал-Каши для определения $\sin 1°$. Асгер Аабо (Al-Kashī's iteration method for the determination of $\sin 1°$. Asger Aaboe), Scripta math., 1954, 20, № 1—2, 24—29 (англ.)

Излагается метод последовательных приближений,

предложенный математиком XV в. Джемшидом Гиясэддином ал-Каши для определения sin 1° в его работе «Трактат о хорде и синусе». Каши находит sin 1° по известному ему значению sin 3°, приближенно решая уравнение $\sin 3° = 3 \sin 1° - 4 \sin^3 1°$. Автор пользуется публикацией метода Каши, принадлежащей Седийо. Этот метод Каши был изложен также Т. Н. Кары-Ниязовым по комментариям Бирджанди к астрономическим таблицам Улугбека (см. Кары-Ниязов Т. Н., «Астрономическая школа Улугбека», М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950, стр. 150—152). Другой способ вычисления sin 1° был применен Каши в его «Трактате об окружности» (Историко-матем. исследования, вып. 7, М.—Л., Гостехиздат, стр. 327—370), где ал-Каши дает 8 правильных шестидесятиричных знаков. Б. А. Розенфельд

67. Против неправильной оценки научного наследства Леонардо да Винчи. Станько Д. Г., Изв. Томского политехн. ин-та, 1954, 75, 183—194

Задача статьи — выяснить место математики в научном наследии Леонардо да Винчи. Весь фактический материал почерпнут из книг Л. Ольшки и М. А. Гуковского (Ольшки Л., История научной литературы на новых языках, т. I, М.—Л., 1933; М. А. Гуковский, Механика Леонардо да Винчи, М.—Л., 1947). Автор подвергает критике идеалистическое понимание предмета математики у Л. Ольшки, а М. А. Гуковского упрекает за недооценку математического аппарата в механике Леонардо да Винчи. Собственно математические тексты итальянского ученого не привлечены; не учтена и специальная литература, например книга Р. Марколонго, давшего подробный анализ математических отрывков Леонардо да Винчи (Marcolongo R., Studi Vinciani, Napoli, 1937). Поэтому вопрос о степени новизны применявшихся Леонардо да Винчи математических приемов и методов не освещен сколько-нибудь полно и в конечном итоге остается нерешенным.

В. П. Зубов

68. О некоторых вопросах истории точных наук. Зарождение исчисления бесконечно малых. Адамар (Sur des questions d'histoire des sciences. La naissance du calcul infinitésimal. Hadamard J.), Anais Acad. brasileira cienc., 1954, 26, № 1, 19—23 (франц.)

Указываются трудности, присущие истории наук: «историка точных наук... подстерегает множество ловушек, когда он вынужден интерпретировать тексты». Автор ставит вопрос о критерии истинности этой интерпретации: каким образом комментатор различает между тем, что имеется в первоначальном тексте, и тем, что вкладывается в него при истолковании? Ответ, указываемый автором в общей форме, справедливо основан на требовании рассматривать научные открытия в исторической перспективе: «научный результат не является изолированным фактом, он должен быть моментом движения науки. Он используется в сочинениях последующих исследователей, которые не имеют права его не учитывать или знать поверхностно смысл».

Далее отмечаются два особых явления, с которыми приходится встречаться в истории математических наук, и на которые не всегда обращают внимание историки математики. Одно из них состоит в том, что иногда решающий и «ослепительно очевидный» итоговый вывод ускользает от ученого, которому принадлежит вся цепь необходимых предварительных результатов. Второе — в том, что в некоторых случаях ученый, сделавший открытие исключительной важности, совершенно не подозревает истинного значения своего результата.

В качестве примера первого из них Адамар приводит случай с открытием одной из теорем в теории степенных рядов с положительными коэффициентами, авторство которой было приписано сначала ему — Адамару (точка окружности сходимости, расположенная на радиусе, параллельном направлению положительной действительной оси, является особой). На самом же деле, как указывает Адамар, хотя эта теорема и являлась абсолютно очевидным следствием его результатов, он сам узнал о ней лишь из работ Бореля.

Второе явление иллюстрируется на примере некоторых открытий, сделанных в период зарождения исчисления бесконечно малых. В материалах по истории математики, начиная с Птолемея и кончая Кеплером, по крайней мере трижды встречается изложение того факта, что изменение переменного количества происходит особенно медленно в окрестности точки max или min. И тем не менее вся важность этого факта была уловлена впервые лишь Ферма, который сумел найти для него необходимое выражение: впервые условия наличия max или min были определены с помощью выражения $[f(t+h) - f(t)/h]_{h=0}$ (если воспользоваться современными обозначениями).

Далее в статье ярко характеризуются другие принципиальные открытия Ферма, развивающие метод бесконечно малых. Затем отмечается, что в истории открытия теоремы обращения (установления того, что интегрирование есть операция, обратная дифференцированию) проявилось аналогичное обстоятельство. Ни Торричели, ни Барроу, в работах которых эта теорема несомненно имеется, не смогли оценить ее значения и стремились лишь к нахождению новых случаев, в которых можно провести касательные. Н. И. Симонов

69. Анализ. Заметки об эволюции его предмета и наименования. Бойер (Analysis: Notes on the evolution of a subject and a name. Boyer Carl B.), Math. Teacher., 1954, 47, № 7, 450—462 (англ.)

Статья представляет собой текст доклада, представленного собранию Математической ассоциации Америки 1 сентября 1953 г. Автор прослеживает изменения в смысле термина «анализ». В древнегреческой математике анализ и синтез означали определенные логические приемы рассуждений при решении задач; вместе с тем уже Папп в IV в. употреблял слово «анализ» также и в другом смысле, понимая под «сокровищницей анализа» совокупность высших отделов математики (пространственные места и др.). В современную математику слово «анализ» ввел вновь в 1591 г. Ф. Виет, у которого «аналитическое искусство» означало совокупность алгебраических приемов решения задач, т. е. собственно алгебру. В применении к геометрии Декарта термин «аналитическая геометрия» встречается у М. Ролля в 1709 г. и еще ранее в рукописях Р. Слюза («геометрический анализ»), но в обиход входит в начале XIX в. В применении к исчислению бесконечно малых слово «анализ» употребил впервые около 1669 г. И. Ньютон (ср. И. Ньютон, Математические работы, М.—Л., 1937, стр. 3, 21, 26 и др.). Широкое распространение термин «анализ бесконечно малых» получает в XVIII в. Далее автор реферируемой статьи останавливается на некоторых моментах развития так называемой синтетической геометрии и взаимоотношений между геометрией и анализом вообще.

Примечание референта. Автор высказывает мнение о том, что, повидимому, математика и ее основные подразделения не поддаются удовлетворительному определению. Он склоняется к делению математики на геометрию, имеющую дело с «пространственностью» пространства, и алгебру, в которой изучается «численность» (numerosity) числа; вместе с тем он считает возможным выделение и третьей составной части анализа, оперирующей с «аналитичностью». При этом автор ссылается на известное идеалистическое определение математики, данное Б. Весселем. А. П. Юшкевич

70. Лейбницевская концепция количества, числа и бесконечности. Решер (Leibniz' conception of quantity, number, and infinity. Rescher Nicholas), Philos. Rev., 1955, 64, № 1, 108—114 (англ.)

Отмечается сложность отношения между философской системой Лейбница и его математическими работами. Усматриваемое у Лейбница отрицательное отношение к количественной бесконечности связывается с его взглядом на количество и число. Приводятся аргументы Лейбница, направленные против понятия бесконечного числа. Отмечается, что основную роль в критической аргументации Лейбница играет рассмотрение отображения множества на его части, т. е. именно то, что в современной математике считается характерным для бесконечности. Указывается на связь между отбрасыванием понятия актуальной бесконечности и актуально бесконечно малой и квалификации Лейбницем бесконечно малой величины как полезной для вычислений фикции. Отрицательному отношению Лейбница к бесконечности в математике противопоставляется важная роль бесконечности (как количественно неизмеряемой) в его философии.

По мнению референта, автор упрощает положение, связывая некоторую двойственность отношения Лейбница к бесконечности с противопоставлением двух сторон: его философии и математических работ. В действительности указанная двойственность находит проявление как в философии Лейбница, так и в позиции, занимаемой им в своих математических исследованиях.
Л. П. Гокиели

71. Первая работа по математике на монгольском языке. Барановская Л. С., Тр. Ин-та истории естествозн. и техн. АН СССР, 1954, **1**, 53—84

Наиболее ранним из обнаруженных до сих пор монгольских трудов по математике и астрономии является «Сочинение о координатах» («Сольбицан барих бичиг»), напечатанное посредством ксилографии в 1712 г. и хранящееся ныне в библиотеке Комитета наук в Улан-Баторе. Этот труд был переведен с китайского языка на монгольский комиссией из 36 человек; переводчики внесли некоторые поправки и изменения в оригинал, а также перевычислили все таблицы для широты монгольской столицы Каракорума. Китайский оригинал неизвестен. По мнению автора, этим оригиналом была китайская энциклопедия «Тайные источники гармонии чисел», но аргументы в пользу этого мнения не приведены.

«Сочинение о координатах» состоит из пяти томов, посвященных в основном решению календарных и астрономических задач: предвычислению затмений Солнца и Луны, правилам определения местоположения планет и Солнца, описанию созвездий; большое место занимают астрономические и тригонометрические таблицы. В статье изложены правила пользования тригонометрическими таблицами (синуса, тангенса, секанса и их кофункций) и приемы решения прямоугольных и косоугольных плоских треугольников, а также простейших задач сферической тригонометрии. Краткость и нередко неполнота изложения в «Сочинении», в котором полностью отсутствуют доказательства, не позволяет пока решить ряда вопросов, например, о способах производства вычислений. Остается открытым и вопрос о развитии математики в Монголии до выхода «Сочинения о координатах», так как еще не обнаружены более ранние работы, на которые имеются ссылки в этом труде.
А. П. Юшкевич

72. Заметки о знаменитых проблемах. Корт (Notes on famous questions. Court Nathan Altshiller), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 118—120 (англ.)

Первая из серии статей, которые автор предполагает посвятить широко известным математическим задачам и теоремам. Рассматривается так называемая задача Кастильона о вписании в данный круг треугольника, стороны которого проходят через три произвольные точки (в случае, когда три точки лежат на одной прямой, задача была решена еще Паппом в конце III в.). Свое решение итальянский математик Кастильоне (Д. Ф. Сальвемини из Кастилионе, 1709—1781) опубликовал в 1779 г. Решения этой задачи или ее обобщений предложили и многие другие ученые XVIII в., среди них петербургские математики Л. Эйлер, Н.И. Фусс, А. И. Лекселль. Автор приводит с некоторыми упрощениями решение швейцарского математика С. Люилье (1750—1840), опубликованное в 1799 г. Решение Люилье воспроизведено в книге Каталана (Catalan E., Théorèmes et problèmes de géométrie élémentaire, 6-th ed., Paris, 1879).

Примечание референта. Решение задачи Кастильона методом инверсий см. в книге И. И. Александрова, Сборник геометрических задач на построение с решениями. Изд. 18-е, М., Учпедгиз, 1950, стр. 103—104).
А. П. Юшкевич

73. Последнее письмо Л. Эйлера к Х. Гольдбаху. Юшкевич А. П. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 625—629

Письмо написано 17 марта 1764 г., обнаружено А. П. Юшкевичем в Главном архиве Академии наук СССР. К письму даны комментарии. В письме Л. Эйлер несколько обобщает следующий результат Гольдбаха: Если в выражении P^2+eQ^2 будет $e=k^2-(a^2+b^2)$, где k — рациональное число, то все выражение может быть сведено к сумме двух квадратов. Затем Л. Эйлер сообщает об открытом Ламбертом (1728—1777) разложении в степенной ряд корня трехчленного уравнения вида $z^n=az^m+1$.
К. А. Рыбников

74. Об одной попытке издать труды Леонарда Эйлера. Кострюков К. И. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 630—640

В 1844 г. физико-математическое отделение Академии наук ходатайствовало перед царским правительством об издании полного собрания сочинений Л. Эйлера под редакцией М. В. Остроградского, но не добилось успеха. В данной статье, кроме описания этой неудачной попытки, приведены тексты некоторых архивных документов, в которых давалось обоснование необходимости издания.
К. А. Рыбников

75. Памяти Карла Фридриха Гаусса. Бодемюллер (Carl Friedrich Gauß zum Gedächtnis. Bodemüller H.), Z. Vermessungswesen, 1955, **80**, № 2, 33—42 (нем.)

Очерк жизни и деятельности Гаусса, написанный в ознаменование столетия со дня его смерти (23.III. 1855).

76. Заметка о триангуляционных работах Гаусса. Даннингтон (Note on Gauss' triangulations. Dunnington G. Waldo), Scripta math., 1954, **20**, № 1—2, 108—109 (англ.)

Автор критикует распространенное мнение, что Гаусс, измеряя треугольник, образованный вершинами гор Брокен, Инзельсберг и Гогенгаген, стремился эмпирически проверить, является ли пространство евклидовым или неевклидовым. Гаусс выбрал такой треугольник как базис триангуляции ганноверского королевства; этот треугольник позволял связать измерения в Ганновере с триангуляцией Баварии. На то и другое указывал сам Гаусс в письмах к Шумахеру. Вместе с тем в письме к тому же Шумахеру Гаусс говорил, что измерение не слишком больших треугольников не может дать ответа на вопрос о геометрии мира. Листинг, долго работавший с Гауссом, в 1875 г. приводил устно выраженное Гауссом мнение, что такой ответ, может быть, удастся получить при измерении очень больших треугольников, используя неподвижные звезды.
А. П. Юшкевич

77. Последние дни и кончина Гаусса. Даннингтон (Gauß'letzte Tage und Tod. Dunnington G.

W a l d o), Z. Vermessungswesen, 1955, 80, № 2, 42—44 (нем.)

Автор — профессор колледжа в Луизиане (США), друг потомков Гаусса в Америке (куда уехал при жизни Гаусса его сын) и автор обширной биографии Гаусса,— в реферируемой статье, на страницах геодезического журнала, отмечает,что Гаусс в 1820—1825 гг. усиленно участвовал в полевых работах по определению геодезических точек и после этого периода заочно руководил съемкою до 1847 г. Получив из этой практической деятельности толчок к разработке способа наименьших квадратов и общей теории поверхностей, Гаусс, к сожалению, не изложил письменно своих замечаний по практической геодезии. Только часть их известна через записи лекций Гаусса его учениками. Чтение лекций Гаусс продолжал с большою аккуратностью до 1853 г.

Крепкий здоровьем, сын саксонского крестьянина Гаусс вел тихую размеренную жизнь в скромной квартире геттингенской обсерватории, в последние 20 лет жизни не принимая никаких приглашений, но ежедневно, независимо от погоды, проводил по 2 часа в публичной библиотеке, просматривая все политические газеты. Круг профессоров, в числе их профессор математики Листинг, регулярно посещал его на дому. Патриот своей маленькой родины, Гаусс из всех знаков почета, оказанных ему в 1849 г. в связи с 50-летием получения им докторской степени, выше всех ставил избрание почетным гражданином городов Геттингена и Брауншвейга.

На вопросы текущей жизни университета и академии наук он откликался письменным изложением своего мнения. Так, например, возникла его записка о вдовьей кассе профессоров, представляющая серьезный трактат по теории страхования. И. Я. Депман

78. **Карл Фридрих Гаусс (1777—1855). Эмерслебен** (Carl Friedrich Gauß (1777—1855). Zum 100 Todestag. E m e r s l e b e n O.), Wiss. Ann., 1955, 4, № 2, 121—123 (нем.)

Даются краткие сведения о жизни и трудах Гаусса в связи со столетней годовщиной его смерти.

И. Я. Депман

79. **Карл Фридрих Гаусс (30 апреля 1777 г.—23 февраля 1855 г.). Облат** (Carl Friedrich Gauss (1777. április 30—1855. február 23). O b l á t h R i c h á r d), Középisk. math. lapok, 1955, 10, № 4, 97—99 (венг.)

80. **Два письма Гаусса, относящиеся к обучению офицеров Ганнокерского генерального штаба по вопросам геодезии. Гросман** (Zwei Briefe von C. F. Gauß zur Unterweisung Hannoverscher Generalstabsoffiziere. G r o ß m a n n W.), Z. Vermessungswesen, 1955, 80, № 2, 45—54 (нем.)

По предложению Гаусса в 1827 г. ганноверское правительство решило произвести триангуляцию перешедших к нему датских областей. Для выполнения этой работы были привлечены офицеры генерального штаба под начальством капитана Мюллера. Последний обратился к Гауссу с просьбою дать руководящие указания для подготовки офицеров к предстоящей им работе. Недавно найденная переписка Мюллера с Гауссом интересна тем, что в ней Гаусс высказывает свой взгляд на разные практические операции триангуляции. Очень обстоятельные письма Гаусса представляют интерес для геодезии, а также для научной биографии Гаусса, так как указанная переписка имела место в годы создания Гауссом теории поверхностей и мемуаров по высшей геодезии. Во втором письме Гаусс агитирует за применение метода наименьших квадратов, пользование которым в Германии, повидимому, распространялось медленно. Примечания к письмам В. Гросмана дают подробные разъяснения указаний Гаусса с точки зрения современного состояния геодезии.

И. Я. Депман

81. **100 лет со дня смерти К. Ф. Гаусса.** Вестн. АН СССР, 1955, № 4, 105—108

В связи со знаменательной датой сообщается о русских изданиях трудов Гаусса, о совместном заседании Всесоюзного общества культурной связи с заграницей, отделения Физико-математических наук и отделения Технических наук АН СССР, а также о заседании в Институте истории естествознания и техники АН СССР в Москве и Ленинградском отделении Института.

82. **Развитие теории конформного отображения и римановых поверхностей в течение столетия. Альфорс** (Development of the theory of conformal mapping and Riemann surfaces through a century. A h l f o r s L a r s V.), Contributions to the theory of Riemann surfaces, Princeton, N. J., 1953, 3—13 (англ.)

Лекция, прочитанная в ознаменование столетия диссертации Б. Римана «Основания общей теории функций одной комплексной переменной величины». Автор отмечает, что эта работа содержала в себе зародыши значительной части современной теории аналитических функций, в ней было начато систематическое изучение топологии, она революционизировала алгебраическую геометрию и открыла путь для собственного подхода Римана к дифференциальной геометрии. Далее кратко характеризуются важнейшие понятия и идеи диссертации Римана, прослеживается их развитие в теории функций комплексного переменного вплоть до наших дней и намечаются некоторые перспективы дальнейшего развития. А. И. Маркушевич

83. **Четыре письма к М. В. Остроградскому. Пруднико в В. Е.** В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 716—719

Тексты четырех писем к М. В. Остроградскому от известных французских математиков прошлого века— Коши, Лямé, Штурма и Бине. Письма имеют личный характер и свидетельствуют о дружеском взаиморасположении корреспондентов. Комментарии, необходимые при подобных публикациях, крайне недостаточны.

К. А. Рыбников

84. **Вильям Роуан Гамильтон. Уиттекер** (Wil liam Rowan Hamilton. W h i t t a k e r E d m u n d), Scient. Amer., 1954, 190, № 5, 82—87 (англ.)

Популярный очерк жизни и научного творчества знаменитого ирландского математика В. Р. Гамильтона (1805—1865). Охарактеризовав значение открытой Гамильтоном некоммутативной алгебры кватернионов, Уиттекер особо отмечает роль концепций Гамильтона в области математики и динамики, а также самой теории кватернионов в разработке релятивистской физики квантовой механики. А. П. Юшкевич

85. **К биографии С. В. Ковалевской. Депман И. Я.** В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 713—715

Воспроизводится текст письма Вейерштрасса к Кенигсбергеру от 25 октября 1870 г., опубликованного в статье последнего«Weierstrass erste Vorlesung über dieTheorie der elliptischen Funktionen» (Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1916, 25, № 10—12, 393—424). В этом письме Вейерштрасс выражает готовность содействовать допуску С. В. Ковалевской к слушанию математических лекций. Этим опровергается распространенное мнение, что Вейерштрасс якобы вообще был противником допущения женщин к занятиям математикой в университете.

К. А. Рыбников

86. **Николай Митрофанович Крылов** (Микола Митрофанович Крилов), Вісник АН УРСР, 1955, № 5, 79 (укр.)

Некролог академика Н. М. Крылова (умер 11 мая 1955 г. на 76-м году жизни).

87. **В Комиссии по истории физико-математических наук. Заседание памяти Владимира Андреевича Мар-**

кова. **Отрадных Ф. П.**, Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 256—258

Краткий отчет о докладах И. И. Давидова, И. Г. Мельникова и Й. П. Натансона, сделанных 9 апреля 1954 г. на состоявшемся в Ленинграде заседании Комиссии по истории физико-математических наук Института истории естествознания и техники АН СССР, посвященном памяти талантливого русского математика В. А. Маркова (1871—1897). Работы В. А. Маркова относятся к теории тройничных квадратичных форм и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля.

88. **Математика в старой баварской высшей школе. Гофман** (Die Mathematik an den altbayerischen Hochschulen. Hofmann Josef Ehrenfried), Abhandl. Bayer. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1954, № 62,1—26 (нем.)

Очерк истории научных исследований и преподавания математики в Мюнхенском университете (в 1472—1802 гг. размещался в Ингольштадте, в 1802—1826 гг.— в Ландсгуте, с 1826 г.—в Мюнхене) и в Мюнхенской высшей технической школе (основана в 1868 г.) с момента основания до 1925 г.

Изложение представляет собой переработанный текст доклада, прочитанного автором 5 сентября 1952 г. на заседании Немецкого математического союза. Анализа содержания упоминаемых научных работ или читавшихся курсов лекций статья не содержит.

К. А. Рыбников

89. **Самуэль Дикштейн (1851—1939). Мостовский** (Samuel Dickstein (1851—1939). Mostowski Andrzej), Roczn. Towarz. nauk. warszawskiego, Lata XXXI—XXXVIII (1938—1945), Warszawa, 1954, 178—181 (польск.)

Биография С. Дикштейна, одного из видных организаторов научной работы в Польше. В результате деятельности Дикштейна возник, по выражению Мазуркевича, «научный климат», который сделал возможным дальнейшее развитие математики в Польше. В 1888 г. Дикштейн совместно с В. Натансоном (W. Natanson) и В. Госевским (W. Gosiewski) основал первый в Польше журнал «Prace Matematyczno-fizyczne», посвященный целиком математике и физике. В 1894 г. Дикштейн начал выпускать популярный журнал «Wiadomości Matematyczne». Эти журналы он издавал на свои средства до 1938 г., когда подарил их Варшавскому научному обществу.

В 1905 г. Дикштейн был одним из основателей и первым вице-президентом Варшавского научного общества. В 1907 г. он организовал физико-математический кружок, преобразовавшийся в дальнейшем в Варшавское отделение Польского математического общества. Научные интересы Дикштейна лежали в области алгебры и истории математики; Дикштейну принадлежит монография «Гоэнэ Вронский, его жизнь и работа» (Hoene-Wroński, jego życie i praca, Krakow, 1896).

Ф. В. Широков

90. **Антоний Ломницкий (1881—1941). Алексевич** (Antoni Lomnicki (1881—1941). Alexiewicz A.), Roczn. Towarz. nauk. warszawskiego. Lata XXXI—XXXVIII (1938—1945), Warszawa, 1954, 220—221 (польск.)

Биография и характеристика научной деятельности польского математика А. Ломницкого, который занимался теорией функций действительного переменного, теорией вероятностей, математической картографией и вопросами преподавания математики. Автор сообщает, что впервые трактовка вероятности как меры была дана в работе Ломницкого «Nouveaux fondements du calcul des probabilités» (1923).

Приводятся сведения о библиографии работ Ломницкого. Ломницкий погиб от рук гитлеровцев в июле 1941 г.

Ф. В. Широков

91. **Стефан Мазуркевич (1888—1945). Куратовский** (Stefan Mazurkiewicz (1888—1945). Kuratowski Kazimierz), Roczn. Towarz. nauk warszawskiego, Lata XXXI—XXXVIII (1938—1945), Warszawa, 1954, 222—223 (польск.)

Биография известного польского математика С. Мазуркевича, одного из организаторов Варшавской математической школы, занимавшейся теорией множеств, топологией и основаниями математики. В 1920 г. Янишевский, Мазуркевич и Серпинский основали журнал «Fundamenta matematicae», посвященный этим отделам математики. Мазуркевич был членом редакционного комитета серии «Monografje Matematyczne». Творчески Мазуркевич работал в топологии, теории вероятностей, теории множеств и теории аналитических функций.

Ф. В. Широков

92. **Из прошлого венгерской математики. IV. Даниэль Арань (1863—1944). Облат** (Képek a magyar matematika múltjából. IV. Arany Dániel (1863—1944). Oláth Richard), Középisk. math. lapok, 1954, 9, № 3—4, 65—71 (венг.)

Сообщаются сведения о венгерском деятеле математического образования и ученом Даниэле Арань. С 1894 г. он издавал журнал для учителей и учащихся средней школы, который обратил на себя внимание и в других странах и содействовал поднятию уровня математического образования в Венгрии. Журнал Араня представлял собою подобие французского «Journal de mathématiques élémentaires», давая на своих страницах и статьи, выходящие за пределы школьной программы. Редактор сам работал в области теории определителей (излюбленный венгерскими математиками отдел математики). Из вопросов, близких школьной математике, Арань особенно интересовался вопросом о прямой Симпсона и ее применениями в геометрии треугольника. Арань доказал теорему: если точка, из которой опускаются перпендикуляры на стороны треугольника, движется по описанному вокруг треугольника кругу, то соответственная прямая Симпсона опишет трехвершинную гипоциклоиду. Другой областью интересов Араня была теория вероятностей и ее применения к играм и страхованию жизни. Большую часть жизни Арань состоял преподавателем высшей технической школы в Будапеште. В 1944 г. он вместе с женой был убит фашистами.

И. Я. Депман

93. **Из прошлого венгерской математики. V. Беке Мано (1862—1946). Облат** (Képek a magyar matematika multjából. V. Beke Manó (1862 ápr. 24.—1946. jún. 27.). Oláth Richárd), Középisk. math. lapok, 1955, 10, № 2, 33—42 (венг.)

Очерк педагогической и организационной деятельности М. Беке, который в Венгрии был проводником идей Феликса Клейна — руководителя Международной комиссии по преподаванию математики. Для поднятия уровня преподавания математики в венгерской школе Беке опубликовал ряд книг и статей по вопросам из пограничных областей элементарной и высшей математики (по теории определителей и их применению к изложению теории комплексных чисел, по теории многоугольников, по комбинаторике, по решению уравнений высших степеней).

И. Я. Депман

94. **Я. Д. Тамаркин (1888—1945). Куратовский** (Jakub Dawid Tamarkin (1888—1945). Kuratowski Kazimierz). Roczn. Towarz. nauk warszawskiego, Lata XXXI—XXXVIII (1938—1945), Warszawa, 1954, 257—258 (польск.)

Краткие сведения о жизни и научной деятельности Я. Д. Тамаркина.

95. **Роль отечественных ученых в развитии математического анализа и отражение их научных исследований в курсе втузов. Кобелева Е. Н.**, Тр. Киевск. гидромелиор. ин-та, 1954, 4, 165—172

96. Крупнейший центр советской науки и культуры. Петровский И. Г., Коммунист, 1955, № 7, 80—90

97. Жизнь и труды А. А. Андронова. Горелик Г. С. В сб.: Памяти Александра Александровича Андронова, М., Изд-во АН СССР, 1955, 3—19

98. Профессор Тадеуш Банахевич (Некролог). Одланицкий-Почобутт (Prof. dr Tadeusz Banachiewicz Wspomnienie pośmiertne. Odlanicki-Poczobutt M.), Przegl. geod., 1955, **11**, № 2, 50—51 (польск.)

Краткий очерк научной, педагогической и общественной деятельности члена Польской академии наук Т. Банахевича — специалиста в области астрономии, математики и геодезии (1882—1954).

99. Академик Богумил Быджовский. Метелка (Akademik Bohumil Bydžovský. Metelka Josef), Mat. ve škole, 1955, 5, № 3, 129—133 (чеш.)

14 марта 1955 г. исполнилось 75 лет известному чешскому математику акад. Быджовскому (специалист в области алгебраической геометрии). Приводится краткий очерк его научной и общественной деятельности.

100. Академику Богумилу Быджовскому 75 лет. Гавличек (Akademik Bohumil Bydžovský pětasedmdesátníkem. Havlíček Karel), Časop. pestov. mat., 1955, 80, № 2, 247—249 (чеш.)

101. 50-летие со дня рождения проф. Франтишека Вычихло. Голубарж, Зелинка (Padesát let sóudruha prof. Františka Vyčichla. Holubář Josef, Zelinka Rud.), Mat. ve škole, 1955, 5, № 4, 193—196 (чеш.)

Краткие сведения о жизни, педагогической, научной и общественной деятельности чешского геометра проф. Ф. Вычихло (к пятидесятилетию со дня рождения).

102. Бертран Гамбье (1879—1954). Винченсини (Bertrand Gambier (1879—1954). Vincensini Paul), Enseign. math., 1951—1954, 40, 57—61 (журнал вышел из печати в 1955 г.) (франц.)

Некролог известного французского геометра Гамбье. Дан краткий обзор научного творчества Гамбье с разбором отдельных работ.

103. Катберт Эдмунд Каллис. Тернбулл (Cuthbert Edmund Cullis. Turnbull H. W.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 2, 252—255 (англ.)

Краткая биографическая заметка об английском алгебраисте Каллисе, умершем 20 марта 1954 г. Приводится список работ (12 названий), опубликованных в «Бюллетене Калькуттского математического общества».

Ф. В. Широков

104. Людмила Всеволодовна Келдыш (к пятидесятилетию со дня рождения). Александров П. С., Ляпунов А. А., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 217—223

Дается краткий очерк научного творчества и список печатных работ Л. В. Келдыш — выдающегося московского математика.

105. Памяти члена Академии Джино Лориа. Террачини (Commemorazione del Socio Gino Loria. Terracini Alessandro), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. Sci fis., mat e natur., 1955, **17**, № 6, 402—421 (итал.)

Основные даты жизни и перечень главных трудов Д. Лориа (см. также РЖМат, 1955, 2062). Приложен список 336 работ.

И. Я. Депман

106. К пятидесятилетию акад. Йозеф Новака (К padesátinám akademika Josefa Nováka), Mat. ve škole, 1955, 5, № 5, 319—320 (чеш.)

19 апреля 1955 г. исполнилось 50 лет профессору физико-математического факультета Карлова университета акад. Новаку.

107. Михайло Петрович (Михайло Петровић. Рођен 24.IV.1868, умро 8.VI.1943), Зб. радова. Српска АН, 1953, 35, № 3, VII—XIII (серб.; резюме франц.)

Краткий отчет о заседании Института математики Сербской академии наук, посвященном памяти действительного члена Сербской академии наук, профессора математики Белградского университета М. Петровича, в день десятой годовщины со дня его смерти. Отмечается значение результатов, полученных Петровичем в теории функций комплексного переменного, обыкновенных дифференциальных уравнений, теории рядов и философии математики. Подчеркнуто значение его педагогической деятельности.

И. З. Штокало

108. Станислав Рузевич (1889—1941) Серпинский (Stanisław Ruziewicz (1889—1941). Sierpiński Wacław), Roczn. Towarz. nauk. warszawskiego, Lata XXXI—XXXVIII (1938—1945), Warszawa, 1954, 244—245 (польск.)

Краткая биография львовского математика С. Рузевича, работавшего в области теории функций действительного переменного и теории множеств. В июле 1941 г. Рузевич погиб от рук гитлеровцев.

Ф. В. Широков

109. Пьер Серджеску (1893—1954). Татон (Pierre Sergescu (1893—1954). Taton René), Rev. histoire sci., 1955, 8, № 1, 77—80 (франц.)

Некролог румынского математика П. Серджеску (1893—1954).

110. Жан Шази (1882—1955). Петьо (Jean Chazy. 1882—1955. Petiau G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1955, 62, № 3—4, 65—66 (франц.)

9 марта 1955 г. скончался академик Жан Шази — математик и астроном, специалист в области дифференциальных уравнений и небесной механики.

111 К. Мухаммед аль Хорезми — великий узбекский ученый. Сальє М. А. Ташкент, Изд-во АН УзССР, 1954, 26 стр., 50 коп.

Краткое изложение жизни и деятельности ученого VIII—IX вв. Хорезми, по сочинениям которого ученые Ближнего и Среднего Востока и ученые Европы познакомились с десятичной системой счисления, изобретенной индийцами, и алгеброй, одним из основателей которой был он сам. Подробно описывается эпоха, характеризующаяся тем, что родина Хорезми — среднеазиатское государство Хорезм — была завоевана арабскими захватчиками, истреблявшими местных жрецов («магов») и ученых и уничтожавшими книги на местных языках, вследствие чего богатая самобытная наука Хорезма, тесно связанная и с индийской и с эллинистической наукой, приняла новую форму — научные сочинения стали писаться на арабском языке, игравшем на Востоке ту же роль, что латынь в Европе. Хорезми, потомок магов (одним из имен Хорезми было «аль Маджуси», от «маджус» — маг), был вынужден переехать в Багдад, где он работал при дворе халифов Мамуна, Мустасима и Васика. Кратко излагаются успехи Хорезми в математике и астрономии и, более подробно, географический трактат Хорезми. Представляется не вполне оправданным наименование Хорезми «сыном узбекского народа», так как он жил задолго до прихода в Среднюю Азию племени узбеков и образования узбекского народа, а был хорезмийцем, т. е. представителем одного из народов, из которых впоследствии образовался узбекский народ. Сомнительно утверждение автора о том, что Хорезми применял при решении алгебраических задач методы тригонометрии: такие методы в его алгебраическом трактате не встречаются. Слово «хисаб», переводимое автором «расчет», в данном контексте следует переводить словом «исчисление».

Б. А. Розенфельд

См. также: 32, 33, 165

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

112. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. Новиков П. С., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 44, 3—143

Известно, что каждую группу можно задать при помощи образующих элементов и определяющих соотношений. Для групп с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений еще в 1912 г. (Dehn M., Math. Ann., 1912, 71, 116—144) была поставлена проблема тождества: требуется построить алгоритм, позволяющий для любых двух слов, записанных в алфавите данной группы, решить равны они друг другу или нет.

В работе доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Существуют группы, для которых нет алгоритма, решающего проблему тождества слов.

Пусть группа $\mathfrak{A}$ задана конечным числом образующих и некоторой системой определяющих соотношений

$$A_i = B_i. \tag{1}$$

Как известно, вывод равенства слов в группе $\mathfrak{A}$ может осуществляться в виде переработки слов, состоящей в ряде последовательных преобразований одного слова в другое. Каждое из этих преобразований, называемых элементарными, является переходом от слова XA_iY к слову XB_iY или обратно, где X и Y — любые слова рассматриваемой группы. Последовательность элементарных преобразований записывается в виде

$$X \equiv X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_j \to \cdots \to X_n \equiv Y.$$

Подмножество образующих

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, p_1^{-1}, p_2^{-1}, \ldots, p_k^{-1} \tag{2}$$

называется системой проходных букв если каждое определяющее соотношение группы $\mathfrak{A}$, содержащее буквы этого подмножества, имеет вид

$$E_j p_i F_j = H_j p_i G_j, \tag{3}$$

где E_j, F_j, H_j, G_j не содержит $p_i^{\sigma} (\sigma = \pm 1)$, а $j = 1, \ldots, m_i$, где m_i — число равенств (3) с p_i.

Определяющие соотношения группы $\mathfrak{A}$, не содержащие букв p_i, определяют некоторую другую группу с алфавитом, состоящим из всех букв алфавита $\mathfrak{A}$, за исключением проходных букв p_i и p_i^{-1}. Эта группа называется основанием группы $\mathfrak{A}$ по системе проходных букв (2) и обозначается через $\overline{\mathfrak{A}}$. Для каждой проходной буквы p_i определяется соответствие L_{p_i}.

Если все определяющие соотношения, содержащие букву p_i, имеют вид (3), где $j = 1, 2, \ldots, m_i$, то соответствие L_{p_i} записывается следующим образом:

$$\left(H_{j_1}^{-1} E_{j_1}\right)^{\delta_{j_1}} \left(H_{j_2}^{-1} E_{j_2}\right)^{\delta_{j_2}} \ldots \left(H_{j_q}^{-1} E_{j_q}\right)^{\delta_{j_q}} -$$

$$- \left(G_{j_1} F_{j_1}^{-1}\right)^{\delta_{j_1}} \left(G_{j_2} F_{j_2}^{-1}\right)^{\delta_{j_2}} \ldots \left(G_{j_q} F_{j_q}\right)^{\delta_{j_q}},$$

где $j_1, j_2, \ldots, j_q$ — произвольный набор целых чисел из отрезка $1, 2, \ldots, m$, $\delta_{j_t} = \pm 1$, а q — любое натуральное число.

Каждое слово из левой или правой части соответствия L_{p_i} записано в алфавите группы $\overline{\mathfrak{A}}$. Слова из левых частей этого соответствия обозначаются через u с различными нижними индексами, а соответствующие слова из правой части через w с теми же индексами.

Множество слов u, так же как и множество слов w, образует подгруппу в группе $\mathfrak{A}$. Соответствие L_{p_i}, как это легко вывести из соотношений (3), есть изоморфизм этих подгрупп. Множество слов u и множество слов w образуют две подгруппы и в группе $\overline{\mathfrak{A}}$, но соответствие L_{p_i}, вообще говоря, не будет изоморфизмом в группе $\overline{\mathfrak{A}}$.

Система проходных букв (2) называется правильной, если для каждой проходной буквы p_i соответствие L_{p_i} есть изоморфизм в группе $\overline{\mathfrak{A}}$.

В работе доказывается следующая основная лемма о проходных буквах.

Лемма 1. Пусть $\mathfrak{A}$ — группа с выделенной правильной системой проходных букв, а X и Y — такие слова в этой группе, что $X = Y$ и Y содержит проходные буквы только в положительных степенях. Тогда слово X можно перевести в слово Y последовательностью элементарных преобразований без вставок проходных букв.

Буквы ρ_i^{σ}, где $\sigma = \pm 1$, алфавита группы $\mathfrak{A}$ называются квадратично-проходными в группе $\mathfrak{A}$, если все определяющие соотношения, содержащие эти буквы, имеют вид: $\rho_i a = a \rho_i^2$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где a — произвольная буква положительного алфавита группы $\mathfrak{A}$, не принадлежащая системе $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$; ρ_i также принадлежит положительному алфавиту.

Доказывается ряд лемм о квадратично-проходных буквах, устанавливающих достаточные условия для невыводимости равенства некоторых типов слов в группе с данной системой квадратично-проходных букв.

Используя аппарат проходных и квадратично-проходных букв, разработанный в первых главах работы, автор доказывает следующую теорему, имеющую самостоятельный интерес.

Теорема 2. Для каждой полугруппы G (с сокращениями) с конечным числом образующих, связанных конечным числом определяющих соотношений, существует группа F с конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений, обладающая следующими свойствами: множество всех слов полугруппы G можно так отобразить на некоторое подмножество слов группы, что равным словам в G соответствуют равные слова в F и неравным словам в G соответствуют неравные слова в F, и существует алгоритм, позволяющий по заданному слову полугруппы G найти соответствующее слово группы F.

На основе этой теоремы и результата Тьюринга о существовании полугруппы (с сокращениями) с неразрешимой проблемой тождества (Turing A. M., Ann. Math., 1950, 52, 491—505) доказывается теорема 1.

Автор замечает, что в группе с неразрешимой проблемой тождества не будет разрешима и проблема сопряженности (РЖМат, 1955, 2521).

Примечание референта. Имеются мелкие небрежности. Например, на стр. 81, в строке 3-й снизу, вместо $E_{\hat{\mu}_1} L'_{E_{\hat{\mu}_1}}$ должно быть $E_{\hat{\mu}_1} (L'_{E_{\hat{\mu}_1}})^{-1}$. На стр. 86 в 3-й строке сверху вместо «$u^{(p)}$» должно стоять «$u^{(p)}$». На стр. 92, в 21-й строке сверху, «были бы» надо заменить на «не были бы». С. И. Адян

113. Об исчислении высказываний, основанном на дизъюнкции и отрицании. Рейхбах (Über den auf Alternative und Negation aufgebauten Aussa-

genkalkül. Reichbach Juliusz), Studia log., 1953, 1, 13—17 (нем.; резюме польск., русс.)

Рассматривается система двузначного исчисления высказываний, основанная на дизъюнкции и отрицании как на примитивных связках. Для этой системы автор дает следующее множество независимых аксиом: NNA^pAN^{pq}, $NNANA^{pq}ANAN^{qpp}$, $NNANA^{pq}ANAN^{qr}A^{pr}$, AN^{pp}, $ANA^{pq}A^pNN^q$ (пользуясь обозначениями Лукасевича (Łukasiewicz J., Elementy logiki matematycznej, Warzawa, 1929). Каждая тавтология (т. е. формула, в качестве значения истинности всегда принимающая истину) выводима из этих аксиом с помощью правила подстановки и правила зачеркивания (Abtrennungsregel), определяемого схемой

$$\frac{A\alpha\beta \quad N\alpha.}{\beta}.$$

Автор доказывает полноту этой системы в том смысле, что противоречива каждая система, полученная из нее присоединением произвольной невыводимой формулы.

Опечатки: стр. 15, 16-я строка снизу, вместо «T^*_A» следует читать «T_A»; стр. 15, 14-я строка снизу, вместо «Lemma 2» следует читать «Lemma 1».

H. Rasiowa

114. Анализ и обобщение метода проверки логических формул посредством диаграмм Венна. Лущевская-Романова (Analiza i uogólnienie metody sprawdzania formul logicznych przy pomocy diagramów Venna. Łuszczewska-Romahnowa Seweryna), Studia log., 1953, 1, 185—246 (польск, русс.; резюме англ.)

Строится последовательность систем $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ со следующими константами: квантор существования E, знак дополнения —, функторы исчисления высказываний и переменные термы $N_1, N_2, \ldots, N_n$.

Правильно составленные формулы этих систем — это пропозициональные функции, каждая из которых является или элементарным выражением системы (т. е. последовательностью переменных термов с отрицанием или без такового, следующей за квантором существования), или выражением, полученным из формулы исчисления высказываний путем подстановки элементарных выражений вместо пропозициональных переменных.

Существенной особенностью этих систем является возможность получения для $n \geqslant 3$ в S_n законов, соответствующих законам логического квадрата и модусам силлогизмов; метод перехода от традиционных обозначений к обозначениям рассматриваемой системы иллюстрируется примерами.

Введение некоторых концепций и формулировки определений: тавтологии системы S_n, выражения, выполненного в области непустых термов, и выражения, выполненного в области неуниверсальных термов, позволяет получить теоремы, одна из которых служит фундаментальной теоремой для формулировки общего критерия тавтологичности модусов силлогизмов.

Обобщая свои рассуждения, автор вводит систему S_ω, являющуюся суммой всех систем S_n. В полученной таким образом обобщенной системе формулируются следующие определения: точное определение тавтологичной формулы (причем дается особое доказательство точности этого определения), определение формулы, выполненной в области непустых термов, и определение формулы, выполненной в области неуниверсальных термов. Эти определения дают алгоритм распознавания — является ли тавтологичной данная правильно составленная формула из S_ω (а также, выполнена ли она в области непустых или неуниверсальных термов).

В заключительных замечаниях статьи содержится интересное следствие из полученных результатов — возможность установить для выражений одноместного исчисления предикатов первого порядка метод верификации (т. е. проверки истинности), аналогичный методу нулей и единиц для исчисления высказываний.

Таким образом построена система, содержащая все те эквивалентности пропозициональных функций, которые могут быть проверены посредством давно известного, но лишь недавно получившего широкое применение в педагогической практике графического метода Венна. Для рассматриваемой системы формулируется аналог этого метода.

Следующие опечатки не указаны в списке замеченных опечаток: стр. 189, строка 17 снизу ($\overline{EMPS}\cdot\overline{EMPS}$ следует заменить на ($\overline{EMPS}\cdot EMPS$); стр. 196, строка 1 снизу — указанное в списке замеченных опечаток исправление не нужно, так как ($\overline{EN}_1 \to EN_1$) — справедливо; стр. 203, строка 6 сверху — заменить B^i_1. на B^i_1; стр. 207, строка 4 снизу — заменить (во втором месте) W' на W.

W. Pogorzelski

115. Формализация $\aleph_0$-значного исчисления высказываний. Роз (A formalization of an $\aleph_0$-valued propositional calculus. Rose Alan), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, № 3, 367—376 (англ.)

Анализируется $\aleph_0$-значное исчисление высказываний, построенное на базе следующих примитивных: логической константы 1, а также функций NP, HP и APQ. Здесь N — отрицание Лукасевича. В качестве значений истинности берутся все рациональные числа сегмента $[0,1]$, причем 1 является выделенным значением.

Функции истинности $n(x)$, $h(x)$ и $a(x, y)$ высказываний NP, HP и APQ определяются через функции истинности x и y высказываний P и Q так: $n(x) = 1 - x$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ и $a(x, y) = \min(1, x + y)$.

Высказывания, которым соответствуют функции истинности, равные тождественно 1, называются тождественно истинными. Исходя из обозначений $CPQ =_{df} ANPQ, KPQ = =_{df} NANPNQ$, $BPQ =_{df} CCPQQ$ и $0 =_{df} N1$, автор предлагает следующий набор схем аксиом для дедуктивного построения тождественно истинных формул (в них и ниже: $(s_1 s_2 \ldots s_j)^1 =_{df} s_1 \ldots s_j$, $(s_1 s_2 \ldots s_j)^{k+1} = =_{df} s_1 \ldots s_j (s_1 \ldots s_j)^k$):

A 1. $CCQCRSCCPQCCPRCPCPS$;
A 2. $CPCCPQQ$;
A 3. $CAPAQRAAPQR$;
A 4. $CAAPQRAPAQR$;
A 5. $CNNPP$;
A 6. $CCPOCBPQQ$;
A 7. $CCPQCCQRCPR$;
A 8. $CBPQBQP$;
A 9. $CPNNP$;
A 10. $CAPQAQP$;
A 11. $CCPQCCRSCAPRAQS$;
A 12. $CCRPCANPNAQRANA\,PQNR$;
A 13. $ANH1NH1$;
A 14. $CPAHPHP$;
A 15. $CAHPHPP$;
A 16. $(CCPH1)^2\,CCAPPQCPHQ$;
A 17. $CCQAPPCHQP$;
A 18. $CBPQCBPQBKPPQ$;
A 19. $CPAPQ$;
A 20. $BCPQCQP$;
A 21. 1

Пусть для каждой константы $c=\sum_{r=1}^{n}2^{-s_r}$ определены логические константы так: $c=_{df}A^{n-1}H^{s_1}1H^{s_2}1\ldots H^{s_n}1$. Будем называть длиной формулы сумму числа символов примитивных функций (включая символ логической константы 1) и числа символов переменных, входящих в формулу (не обязательно различных). Далее определяются функции $f(n)$ и $c(n)$: $f(n)$ — наименьшее число вида 2^s и такое, что $f(n)\geqslant n$ и $c(n)=1-(f(n))^{-2n}2^{-(n^2+n)}$. Принимая во внимание эти определения, формулируются правила вывода: (α) modus ponens; (β). Если формула P имеет длину n и $c(n)$ — логическая константа, соответствующая числу $c(n)$, причем $Cc(n)P$ выводима, то выводима формула P.

Используя метод, родственный методу Хенкина и методу Россера и Тэркуэтта, автор доказывает, что исчисление, построенное на базе схем аксиом A1—A21, а также правил вывода (α) и (β), дедуктивно полно.

Попутно доказываются теоремы:

Если $P_1,\ldots,P_k\vdash Q$ при помощи n применений (α) (а правило (β) в этом выводе не используется), то $P_1,\ldots,P_{k-1}\vdash(CP_k)^{2^{n-1}}Q$.

Если $S_1(P_1,\ldots,P_n)$ и $S_2(P_1,\ldots,P_n)$ суть S-функции от $P_1,\ldots,P_n$, то Cs_1s_2 — теорема. (Понятие S-функции определяется индуктивно следующим образом: P_1 есть S-функция от P_1; если $S_1(P_1,\ldots,P_\alpha)$ и $S_2(P_{\alpha+1},\ldots,P_n)$ суть S-функции от $P_1,\ldots,P_\alpha$ и $P_{\alpha+1},\ldots,P_n$ соответственно, то $AS_1(P_1,\ldots,P_\alpha)\,S_2(P_{\alpha+1},\ldots,P_n)$ суть S-функция; других S функций нет.)

Если для некоторого $i\,(1\leqslant i\leqslant n)$ CP_iQ — теорема, то и $CS(P_1,\ldots,P_n)\,S(P_1,\ldots,P_{i-1},Q,P_{i+1},\ldots,P_n)$ — теорема.

Если $c=a+b\leqslant d$, то $CcA\mathfrak{b}$, $CA\mathfrak{b}c$, Ccd — теоремы.

Если $a+b=1$, то $CN\mathfrak{b}$ и $C\,N\mathfrak{b}$ — теоремы.

Примечание референта. На стр. 367 в формуле (3-я строка снизу) допущена опечатка: следует читать $c=_{df}A^{n-1}H^{s_1}1H^{s_2}1\ldots H^{s_n}1$. С. В. Яблонский

116. О сводимости проблем разрешимости. Яничак (On the reducibility of decision problems. Janiczak A.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 33—36 (англ.)

В этой работе сформулирована (без доказательства) теорема, что проблема разрешимости множества X сводима в смысле Тьюринга (Turing A. M., Proc. London Math. Soc., 1939, 45, 173) и Поста (Post E. L., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, 50, 311) к проблеме разрешимости множества Y тогда и только тогда, когда характеристическая функция множества X вычислима относительно характеристической функции множества Y. Эту теорему можно принять в качестве определения сводимости, более простого, чем определение Тьюринга и Поста.

Исходя из вышеприведенного определения понятия сводимости, доказана теорема, что множества, для которых проблема разрешимости сводима к проблеме разрешимости для некоторого рекурсивно перечислимого множества, являются одновременного типа $\Sigma\pi$ и $\pi\Sigma$ в классификации Клини и Мостовского.

Теорема является частным случаем теоремы, доказанной Клини (Kleene S. C., Introduction to Metamathematics, Amsterdam, 1952, 293). H. Rasiowa

117. Об интерпретации знака «⊃». Майхилл (On the interpretation of the sign «⊃». Myhill John), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 60—62 (англ.)

Отмечается, что смысл формулы, содержащей знак «⊃», вообще говоря, меняется в зависимости от того, понимается ли знак «⊃» как строгая или как материальная импликация. Во многих случаях явные указания на интерпретацию знака «⊃» отсутствуют. В последнем случае теряется время на розыски этой интерпретации.

Вводится система (натуральной импликации), в основу которой кладутся следующие правила: P1. $A, A\supset B\vdash B$; P2. Если $A\vdash B$, то $\vdash A\supset B$; P3. $A\&B\vdash A$; P4. $A\&B\vdash B$; P5. $A, B\vdash A\&B$; P6. $A\&B.\supset C\vdash A\supset.B\supset C$. К системе натуральной импликации добавляются некоторые правила, относящиеся к строгой импликации и квантору существования: S1. Если $A\vdash B$, то $\vdash A\prec B$; S2. Если $\vdash A\prec B$, то $\vdash A\supset B$, и E1. $\ldots A\ldots\vdash(\exists r)(\ldots r\ldots)$; E2. Если $\ldots r\ldots\vdash A$, то $(\exists r)(\ldots r\ldots)\vdash A$, где A не содержит r. В работе устанавливается, что в расширенной системе формулы $A\supset B$ и $(\exists r)(r\&((r\&A)\prec B))$ дедуктивно эквивалентны и, следовательно, $A\supset B$ может быть проинтерпретирована как высказывание: «конъюнкция A и некоторого истинного высказывания строго влечет B». С. В. Яблонский

118. Об обобщении некоторых известных свойств порядка на отношения. Фраиссе (Sur l'extension aux relations de quelques propriétés connues des ordres. Fraissé Roland), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 10, 508—510 (франц.)

Пусть $A(x_1,\ldots,x_n)$ — n-местное отношение, определенное для $x_i\in E$ (E называется базой A), которое может принимать два значения.

Если $D\subset E$, то отношение, определенное в точности на D и совпадающее там с A, называется ограничением A и обозначается $B=A\mid D$. A называется продолжением B.

Множество отношений называется цепью, если их базы упорядочены по включениям и из двух отношений то, которое имеет большую базу, служит продолжением другого. Существует единственное продолжение этих отношений на объединение их баз.

По определению, $B<A$, если B изоморфно ограничению A, и $B\prec A$, если всякое ограничение B конечной частью его базы изоморфно некоторому ограничению A. $<$ и $\prec$ рефлексивны и транзитивны; $B<A$ влечет $B\prec A$, но не обратно.

Γ_R — класс таких отношений A, что $A\prec R$; γ_R — класс ограничений R конечными частями его базы и отношений, изоморфных этим ограничениям. Говорят, что класс K является Γ или γ, если он является Γ_R или γ_R соответственно для некоторого отношения R. Между классами Γ и γ естественно устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Без доказательства перечисляются следующие результаты: 2.1. Классы Γ и γ n-местных отношений образуют счетное множество для $n=1$ и множество мощности $2^{\aleph_0}$ для $n\geqslant 2$.

2.2. 1) Для того, чтобы класс отношений с конечными базами был γ, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял C_1 и C_2. 2) Для того, чтобы класс отношений был Γ, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял C_1, C_2 и C_3, где C_1, C_2 и C_3 — следующие условия, в которых K — класс отношений:

C_1. $A\in K\&B<A\supset B\in K$;

C_2. $A, B\in K\supset(\exists C)(C\in K\&C>A\&C>B)$;

C_3. Для всякой цепи отношений $A\in K$ продолжение отношений A на объединение их баз принадлежит K.

2. 3. Для произвольного класса K, являющегося Γ, и множества отношений A из K в K существует отношение R такое, что $R>A$ для каждого A.

Ссылаясь на одну неопубликованную теорему Хенкина, автор приводит следующее следствие: Всякий класс отношений, выполняющих одни и те же формулы исчисления предикатов («арифметический тип в смысле Тарского»), удовлетворяет условиям C_2 и 2.3.

Ставятся проблемы: является ли Г классом K отношений, все ограничения которых с базой мощности $\leqslant p < \aleph_0$ изоморфны ограничениям R?

Если отношения A в 2.3 имеют конечную или счетную базу, то можно ли выбрать R с этим же свойством?

А. С. Есенин-Вольпин

119. Семантическая информация. Бар-Хиллел, Карнап (Semantic information. Bar-Hillel Yehoshua, Carnap Rudolf), Brit. J. Philos. Sci., 1953, 4, № 14, 147—157 (англ.)

Указывается, что в статистической теории информации понятие информации связано не с содержанием символов, а с их частотами. Однако, по мнению авторов, это понятие часто используется также в семантическом (т. е. связанном с содержанием символов) и в прагматическом (т. е. связанном с лицами, употребляющими символы) смысле, и в этих случаях выводы статистической теории информации неприменимы. Поэтому авторы предлагают теорию семантической информации, основанную на теории индуктивной вероятности Карнапа (Carnap R., Logical foundations of probability, Chicago, 1950; The continuum of inductive methods, Chicago, 1952). Краткая сводка данных из теории Карнапа приводится в приложении к статье.

Используется логическое исчисление «система языка», по терминологии статьи, где атомные высказывания образованы подстановкой конечного числа индивидуальных констант в конечное число примитивных одноместных предикатов, а молекулярные высказывания образованы из атомных, соединенных связками $\sim$, $\vee$, $\dot{-}$, $\supset$, $\equiv$. Высказывание i L-влечет высказывание j, если высказывание $i \supset j$ тождественно истинно (L-истинно). Дизъюнкция, в которой каждое атомное высказывание или его отрицание (но не оба) является членом и в которой нет других членов, названа элементом содержания. Класс элементов содержания, L-влекомых высказыванием i, назван содержанием Cont (i) высказывания i. Если i L-влечет j, то Cont (i) включает Cont (j). Пусть $m(i)$ — мера объема (range) высказывания i, введенная Карнапом (см. предыдущую ссылку). Тогда мера содержания высказывания i есть cont (i) $= m(\sim i)$. Рассматриваются свойства Cont (i) и cont (i). Определяются относительные величины Cont ($j|i$) $=$ Cont (i, j) $-$ Cont (i), cont ($j|i$) $=$ cont (i, j) $-$ cont (i) $=$ cont ($i \supset j$). Под мерой информации понимается величина inf (i) $= -$ Log $m(i)$, что аналогично выражению для количества информации в статистической теории связи. Функции m делятся на «дедуктивные» функции m_D (то же, что m^+ в «Logical foundations of probability) и «индуктивные» функции m_I (Carnap R., Britt., J. Philos. Sci., 1953, 3, 314). Пусть H — неполная система несовместных высказываний; тогда средняя мера информации, сообщаемой высказыванием e, есть est (inf, H, e) $= -\sum_p c(h_p, e)$ Log $c(h_p, e)$, $c(j, i) = [m(i, j)] / [m(i)]$, где правая часть формально похожа на выражение энтропии в термодинамике. Исследуются свойства функции est. По мнению авторов, теория семантической информации будет полезна в разных областях, например в теории проектирования экспериментов и в так называемой теории тестов (психометрии). Однако авторы считают, что в целом для «психологической» информации нужна особая теория.

Ряд общих положений авторов неприемлем с точки зрения диалектического материализма (см. также РЖМат, 1955, 1076).

Г. Н. Поваров

120. Формализации рекурсивной арифметики, свободные от логики Гудстейн (Logic-free formalisations of recursive arithmetic. Goodstein R. L.), Math. scand., 1954, 2, № 2, 247—261 (англ.)

При формализации рекурсивной арифметики автор принимает в качестве аксиом явные и рекурсивные определения для функций, а в качестве правил вывода

$$(\mathrm{Sb}_1)\ \frac{F(x) = G(x)}{F(A) = G(A)}, \qquad A = B$$

$$(\mathrm{Sb}_2)\ \frac{A = B}{F(A) = F(B)}, \qquad (\mathrm{T})\ \frac{A = C}{B = C},$$

где F, G — рекурсивные функции и A, B, C — рекурсивные термы, а также правило единственности для примитивной рекурсии:

$$(\mathrm{U})\ \frac{F(Sx) = H(x, F(x))}{F(x) = H^x F(0)}.$$

В (U) итеративная функция $H^x t$ определена так: $H^0 t = t$, $H^{Sx} t = H(x, H^x t)$, причем F может зависеть и от добавочных параметров, но H зависит не более чем от двух переменных.

В этой системе (обозначаемой через R) автор осуществляет выводы основных равенств рекурсивной арифметики. Устанавливаются переместительность и сочетательность сложения и умножения, распределительность и т. д., и, в частности, выводится равенство $a + (b \dot{-} a) = b + (a \dot{-} c)$, которое в предшествующих работах автора и Сколема выводилось с помощью более сложного правила чем (U).

Теорема дедукции. Если равенство $A = B$ выводимо в R из гипотезы $F = G$ (т. е. из недоказанного равенства), без подстановок вместо переменных в гипотезе, то в R доказуемо:

$$(F = G) \to (A = B). \qquad (1)$$

Эта теорема обобщается для любого числа гипотез. (Импликация (1) записывается в формализме R так:

$$\{1 \dot{-} [(F \dot{-} G) + (G \dot{-} F)]\} \cdot \{(A \dot{-} B) + (B \dot{-} A)\} = 0.$$

Пусть R_1 отличается от R лишь тем, что вместо схемы (U) имеется схема

$$(\mathrm{E})\ \frac{f(0) = 0,\ f(x) = f(Sx)}{f(x) = 0}$$

и аксиомы

$$a + (b \dot{-} a) = b + (a \dot{-} b),$$

$$Sa \dot{-} Sb = a \dot{-} b;$$

устанавливается равносильность R_1 и R.

Б. А. Трахтенброт

121. Представление интуиционистской логики в классической логике. Маехара (Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der Klassischen. Maehara Shôji), Nagoya Math. J., 1954, 7, June, 45—64 (нем.)

Исходным пунктом для автора служат генценовские исчисления (И.) LK и LJ (Gentzen G., Math. Z., 1935, 39, 176—210, 405—431), причем последнее формально несколько видоизменено, оставаясь эквивалентным (в смысле выводимости) генценовскому LJ.

Вводится новый знак Bew, истолкуемый как доказуемость, следующим образом: 1) если $\mathfrak{A}$ формула (ф.), то Bew $\mathfrak{A}$ также ф., 2) добавляются две схемы:

$$BES\ \frac{\Gamma' \to \mathfrak{A}}{\Gamma' \to \mathrm{Bew}\,\mathfrak{A}}, \qquad BEA\ \frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}{\mathrm{Bew}\,\mathfrak{A}, \Gamma \to \Theta}$$

где Γ' пусто или имеет вид Bew $\mathfrak{A}_1$, Bew $\mathfrak{A}_2$, ..., Bew $\mathfrak{A}_\nu$ с произвольными ф. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$. Полученные таким образом из LK и LJ И. обозначаются через BLK и BLJ и для BLK доказывается теорема Генцена (см. цит. работу) об устранимости в выводах схемы сечения.

В И. BLK и BLJ вводится операция, сопоставляющая каждой ф. $\mathfrak{A}$ ф. $\mathfrak{A}^b$ так, что для любого предиката (Primformel) $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}^b = \mathrm{Bew}\,\mathfrak{A},$$

и для любых ф. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$

$$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})^b = \mathrm{Bew}(\mathfrak{A}^b \wedge \mathfrak{B}^b),$$
$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})^b = \mathrm{Bew}(\mathfrak{A}^b \vee \mathfrak{B}^b),$$
$$(\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B})^b = \mathrm{Bew}(\mathfrak{A}^b \vdash \mathfrak{B}^b),$$
$$(\neg \mathfrak{A})^b = \mathrm{Bew}(\neg \mathfrak{A}^b),$$
$$(\forall_{\mathfrak{x}} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^b = \mathrm{Bew}(\forall_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^b),\ (\exists_{\mathfrak{x}} \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^b =$$
$$= \mathrm{Bew}(\exists_{\mathfrak{x}} (\mathfrak{F}_{\mathfrak{x}}(\mathfrak{x}))^b),$$
$$(\mathrm{Bew}\,\mathfrak{A})^b = \mathrm{Bew}(\mathrm{Bew}\,\mathfrak{A}^b).$$

Если Γ обозначает ряд ф. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\nu$, то через Γ^b обозначается ряд ф. $\mathfrak{A}_1^b, \mathfrak{A}_2^b, \ldots, \mathfrak{A}_\nu^b$. Предположим в дальнейшем, что ряды ф. Γ и Θ не содержат знака Bew.

Основной результат: *LJ*-выводимость ф. $\Gamma \to \Theta$ равносильна *BLK*-выводимости ф. $\Gamma^b \to \Theta^b$.

Устанавливается также, что *LJ*-выводимость ф. $\Gamma \to \Theta$ равносильна *BLJ*-выводимости ф. $\Gamma^b \to \Theta^b$, и *BLK*-выводимость ф. $\Gamma^b \to \Theta^b$ влечет *LK*-выводимость ф. $\Gamma \to \Theta$.

Для доказательства теорем вводится «операция устранения символа Bew», которая сопоставляет ф. $\mathfrak{A}$ ф. $\overline{\mathfrak{A}}$ так, что для любого предиката $\mathfrak{A}$

$$\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A},$$

и для любых ф. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$

$$\overline{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} \wedge \overline{\mathfrak{B}},\ \overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}},$$
$$\overline{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} \vdash \overline{\mathfrak{B}},$$
$$\overline{\neg \mathfrak{A}} = \neg \overline{\mathfrak{A}},$$
$$\overline{\forall_{\mathfrak{x}} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})} = \forall_{\mathfrak{x}} \overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{x})},\ \overline{\exists_{\mathfrak{x}} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})} = \exists_{\mathfrak{x}} \overline{\mathfrak{F}(\mathfrak{x})},$$
$$\overline{\mathrm{Bew}\,\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}.$$

Упоминается работа Куроды, в которой каждой выводимой ф. классической логики сопоставлена некоторая выводимая ф. интуиционистской логики (Kuroda S., Nagoya Math. J., 1951, 2, 35—47).

Примечание референта. Если распространить понятие погружения, данное Н. А. Шаниным для логико-арифметических и. (РЖМат, 1955, 1606), на генценовские и., то можно сказать, что операция перехода от $\mathfrak{A}$ к $\mathfrak{A}^b$ погружает и. *LJ* в и. *BLK*, а обратная операция перехода от $\mathfrak{A}$ к $\overline{\mathfrak{A}}$ погружает и. *BLK* в и. *LJ*.

В. К. Детловс

122. Вариант гильбертовой теории оснований арифметики. Крейсел (A variant to Hilbert's theory of the foundations of arithmetic. Kreisel G.), Brit J. Philos. Sci., 1953, 4, № 14, 107—129 (англ.)

Автор противопоставляет гильбертовому методу обоснования данного раздела математики посредством установления непротиворечивости некоторой его формализации другой метод — метод интерпретации некоторыми средствами.

Классическая арифметика интерпретируется при помощи методов, не содержащих кванторов. При интерпретации анализа, по мнению автора, кванторы существенно необходимы и употребление их вполне естественно. Автор ставит проблему редукции формул с кванторами по всем функциям (рассматриваются только функции, область определения и область значений которых состоят из целых положительных чисел) к формулам с кванторами по некоторому счетному (enumerable) множеству функций.

Для некоторых классов формул автор строит такие редукции. Затем он указывает условия, при которых такая редукция возможна, и приводит случаи, когда возможность редукции еще не установлена.

По мнению автора, описанные им редукции должны сыграть важную роль в обосновании анализа. Однако он считает, что задача обоснования анализа не может быть полностью решена до тех пор, пока не будут решены спорные вопросы (например, следующий вопрос: если континуум-гипотеза независима от обычных аксиом теории множеств, то не следует ли в исследованиях получать следствия как из этой гипотезы, так и из отрицания).

Б. Ю. Пильчак

123. Рекурсивные определения, в которых используется переменное число предыдущих значений функции. Петер (Rekursive definitionen, wobei frühere Funktionswerte von variabler Anzahl verwendet werden. Péter Rózsa), Publs. mathematical, 1953, 3, № 1—2, 33—70 (нем.)

Вводится определение: набор натуральных чисел $(m_1, \ldots, m_k)$ предшествует набору $(n_1, \ldots, n_k)$, если существует такое $i \leqslant k$, что $m_j = n_j$ при $j < i$ и $m_i < n_i$. В рекурсивных определениях значение определяемой функции для данного набора аргументов $(n_1, \ldots, n_k)$ строится с использованием ее значений для предшествующих наборов аргументов (Петер Р., Рекурсивные функции, Изд-во ин. лит., М., 1954; РЖМат, 1955, 5573 К; в дальнейшем сокращенно Р. ф.), в примитивно-рекурсивных определениях используется, например, лишь значение для одного предшествующего набора аргументов; в реферируемой работе изучаются такие рекурсивные определения, в которых число используемых предшествующих наборов аргументов переменно и зависит от рассматриваемого набора $(n_1, \ldots, n_k)$. Определениями такого типа являются, в частности, возвратные рекурсии (Р. ф., § 3), а также определения функции Сколема, для которой

$$\varphi(m+1, n+1, a) = \prod_{i=1}^{a-1} \max(\varphi(m+1, n, i), \varphi(m, i, a))$$

(в реферируемой статье эта формула на стр. 37 содержит опечатку), функции Берецкой, осуществляющей пересчет всех элементарных функций (Р. ф., § 8), и функции Аккермана — Петер, для которой

$$\psi(m+1, n) = \overbrace{\psi(m, \psi(m, \ldots, \psi}^{n+1 \text{ раз}}(m, 1)\ldots)).$$

Петер доказал, что возвратные рекурсии не выводят за пределы класса примитивно-рекурсивных функций, а Сколем и Берецкая доказали, что их функции являются примитивно-рекурсивными; с другой стороны, Аккерман доказал, что его функция не является примитивно рекурсивной (о возвратных рекурсиях и функциях Сколема и Аккермана см. Р. ф., §§ 3, 18, 9; о функции Берецкой см. реферируемую работу).

Доказывается (II, § 1), что всякая рекурсия описанного типа сводится к примитивным рекурсиям второй ступени и, следовательно, в конечном счете, к многократным рекурсиям первой ступени (Р. ф., § 13). Кроме того, указываются (II, § 2) условия, при которых многократная рекурсия первой ступени сводится к примитивной рекурсии первой ступени; показывается, что этим условиям удовлетворяют, в частности, те многократные рекурсии, к которым сводятся определения функций Сколема и Берецкой.

В. А. Успенский

124. Новое доказательство того, что класс элементарных функций Чиллага — Кальмара уже класса примитивно рекурсивных функций. Петер (Ujabb bizonyítás arra, hogy a Csillag — Kalmár-féle elemi függvények osztálya szükebb, mint a primitiv-rekurzív függvényeké. Péter Rózsa), Mat. Iapok, 1954, 5, № 4, 244—252 (венг.; резюме русс., нем.)

В более ранней статье (реф. 123) автор доказывает, что даже самые сложные из указанных в заглавии (реф. 123) типов рекурсий могут быть сведены на обыкновенные многократные рекурсии, а в некоторых случаях даже на примитивные рекурсии. Автор указал на то, что в качестве специального случая возникает новое доказательство того, что класс примитивно рекурсивных функций шире, чем класс элементарных функций Чиллага — Кальмара, но это доказательство не было изложено автором во всех деталях. Упомянутый специальный случай поддается более простому доказательству, чем общий, что и излагается в настоящей статье. Из резюме автора

125. О модальных логиках высказываний и их связи со структурами. IV^{bis}, V, VI, VI^{bis}. Риддер (Über modale Aussagenlogiken und ihren Zusammenhang mit Strukturen. IV^{bis}, V, VI, VI^{bis}. Ridder J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, A56, № 4, 378—388; 1954, A57, № 1, 2—8; № 2, 117—128; № 4, 389—396; Indagationes math., 1953, 15, № 4, 378—388; 1954, 16, № 1, 2—8; № 2, 117—128; № 4, 389—396 (нем.)

Автор продолжает исследования, начатые в частях I—IV (РЖМат, 1953, 17, 1028). В части IV^{bis} устанавливается ряд свойств некоторых структур с операцией замыкания. Для системы $K^{*(g)}$ (которую можно определить как классическое исчисление высказываний, в котором определена операция замыкания, удовлетворяющая аксиомам I, II, V и схеме IV — см. ниже) решается проблема разрешимости (при помощи той же конструкции, что и в ч. III). Полученные результаты распространяются на структуры и системы, двойственные рассмотренным.

В части V рассматриваются исчисления высказываний A_2^*, M^*, I^* (определение см. Ridder J., Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1950, A53, 327—336; 446—455), а также некоторые модальные исчисления: исчисления $A^{*(g)}_2$, $M^{*(g)}I^{*(g)}$, получающиеся из A_2^*, M^*, I^* соответственно введением оператора M, удовлетворяющего топологическим аксиомам замыкания I. $X \subset MX$, II. $M\lambda \subset \lambda$ (λ — единица), V. $M(X+Y) \subset (MX + MY)$ и $(MX + MY \subset M(X+Y)$ и схеме III. $\dfrac{\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}}{M\mathfrak{B} \subset M\mathfrak{A}}$; исчисления $A_2^{*(b)}$, $M^{*(b)}$, $I^{*(b)}$, получающиеся из только что описанных добавлением еще одной аксиомы IV. $M(MX) \subset MX$. Для указанных систем и двойственных им решается проблема разрешимости.

В части VI устанавливается связь между некоторыми структурами (Σ_j^*-структурами, определение см. ч. II реферируемой работы: Proc. Koninkl. Nederl akad. wetensch., 1952, A55, 459—467) и структурами, получающимися из последних введением операции замыкания, удовлетворяющей аксиомам I, II, III, V, (IV) (Σ_j^{*Ck}-структуры). Автор указывает, что эта связь аналогична связи между «Brouwerian algebra» и «closure algebra», открытой Мак-Кинси и Тарским (Mc Kinsey J. C. C., Tarski A., Ann. Math., 1946, 47, 122—162). Затем исследуется связь между проблемами разрешимости для исчислений высказываний A_2^*, M^*, I^*, K^*, с одной стороны, и проблемами разрешимости для исчислений $A_2^{*(b)}$, $M^{*(b)}$, $I^{*(b)}$, $K^{*(m)} = \overline{S}4^*$, $\overline{S}5^*$, с другой стороны. Автор указывает, что эта связь аналогична сформулированной Гёделем и установленной Мак-Кинси и Тарским связи между проблемами разрешимости для конструктивного исчисления высказываний Хейтинга и для модального исчисления высказываний S4 (Mc Kinsey J. C. C., Tarski A., J. Symbolic Logic, 1948, 13, 13, 14). Полученные результаты распространяются на структуры и системы, двойственные рассмотренным.

В части VI^{bis} устанавливается ряд новых свойств, рассмотренных ранее структур и систем. О. Б. Лупанов

См. также: 9, 12, 30, 34, 279

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

126. О сумме $\Sigma_{p \leqslant N} e(\alpha p)$. Прахар (Über die Summe $\Sigma_{p \leqslant N} e(\alpha p)$. Prachar K.), Monatsh. Math., 1955, 59, № 1, 43—44 (нем.)

Оценка суммы $S(\alpha, N) = \Sigma_{p \leqslant N} e(\alpha p)$, где p — простое число, $0 < \alpha < 1$, $e(x) = \exp(2\pi i x)$, проводится методом И. М. Виноградова (Виноградов И. М., Избранные труды, стр. 307, теорема 1) с той лишь разницей, что:

1) число $H = \exp(0{,}5\sqrt{r})$, где $r = \ln N$, заменяется на $H_1 \exp\{(1/2 - \varepsilon)\sqrt{r \ln r}\}$ ($\varepsilon > 0$, произвольное, но фиксированное),

2) при оценке $S(M) = \Sigma_{d|P} \Sigma_{M < m \leqslant M'} e(\alpha dm)$ с $M < H_1$ сначала рассматриваются те слагаемые суммы $\Sigma_{d|P}$, для которых d не имеет простых делителей $\geqslant H_1^2$.

Используя результат Брейна: число натуральных чисел $\leqslant x$, которые не имеют простых делителей $\geqslant y$, $\ll x \ln^2 y \exp(-u \ln u + 0(u \ln u))$, где $u = \ln x / \ln y$ (Bruijn N. G. de, Indagationes math., 1951, 13, 50—60), можно показать, что число рассматриваемых $d \ll$

$$\ll \frac{N}{M} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{r \ln r}\right) \ll N / MH_1.$$

Следовательно, часть суммы $S(M)$, распространенная на рассматриваемые d, будет $\ll N / H_1$, а на все $S(M) \ll$ $\ll Nr / H_1$.

Автор утверждает, что остальная часть рассуждения проводится дословно так же, как и доказательство теоремы 1 цитированного сочинения.

Полученный результат

$$S \ll Nr^{9/8}\{(q^{-1} + qN^{-1})^{1/8} + H_1^{-1}\} \quad (1)$$

сравнивается с оценками, полученными И. М. Виноградовым:

а) если $\sqrt{N} \leqslant \tau \leqslant N \exp(-r^{\varepsilon_0})$; $\exp(r^{\varepsilon_0}) \leqslant q \leqslant \tau$, $\alpha = a/q + \theta/q\tau$, то

$$S \ll N\{(q^{-1} + qN^{-1})^{1/4-\varepsilon} + N^{-1/4+\varepsilon}\} \quad (2)$$

(цит. соч., стр. 317, глава 9, теорема 3);

б) $S \ll N \exp(c_1 \ln^2 r)\{(q^{-1} + qN^{-1})^{1/8} + N^{-9/80}$ (3)

$(c_1 > 0, \quad 0 < q \leqslant N)$

(цит. соч., стр. 209, теорема 3) при

$$q = \exp\left(\frac{1}{4}\sqrt{r \ln r}\right).$$

Из (3) следует, что $S \ll N \exp(c_1 \ln^2 r)(q^{-1/2} + o(1))$, из (1) же следует, что $S \ll N \exp\left(\frac{9}{2} \ln r\right)(q^{-1} + o(1))$.

К. Г. Бороздкин

127. Исключительный нуль и распределение простых чисел в коротких арифметических прогрессиях. Родосский К. А., Матем. сб., 1955, 36, № 2, 341—348

Продолжение работ автора (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, 123—128; 1949, 13, 315—328).

Рассматривается вопрос о поведении функции Чебышева

$$\psi(x, D, l) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv l \pmod D}} \Lambda(n), \quad (D, l) = 1,$$

при $\ln x \ll \ln^2 D$ в случае, когда существует «исключительный» нуль $\tilde{\beta}$ у L-функции с действительным характером $\tilde{\chi}(n)$ по модулю D и $\tilde{\chi}(l) = 1$.

Выводятся новые асимптотические формулы для $\psi(x, D, l)$ и конечной разности $\psi(x, D, l)$, пригодные в указанном случае.

Доказательства основаны на применении оценки числа нулей вблизи прямой $\sigma = 1$ совокупности всех L-функций с характерами по модулю D и на учете влияния, оказываемого «исключительным» нулем на границу расположения нулей L-функций с характером по модулю D.

Доказывается:

1) Пусть $\Delta \in [0{,}9; 1]$, $T \geqslant 3$, $\ln D \geqslant 12$. Обозначим через $N(\Delta, T, D)$ число нулей всех L-функций с характерами по модулю D, которые могут находиться в прямоугольнике $\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Существует абсолютная постоянная A_1 такая, что имеет место оценка $N(\Delta, T, D) < A_1 \ln^{12} DT\,(DT)^{6(1-\Delta)/\Delta}$.

2) Пусть $(D, l) = 1$, $14 \ln D \leqslant \ln x \leqslant \ln^3 D$. Существуют абсолютные положительные постоянные D_1, A_2, A_3 такие, что имеет место оценка

$$\left|\psi(x, D, l) - \frac{x}{\varphi(D)}\{1 - E(D)\,\tilde{\chi}(l)\,\tilde{\beta}^{-1} x^{\tilde{\beta}-1}\}\right| <$$

$$< x\{A_3 \ln^{12} D\,(eA_2/\delta_0 \ln D)^{-A_3 \ln x/2 \ln D} + 1/D\}/\varphi(D)$$

при $D > D_1$; здесь $\varphi(D)$ — функция Эйлера, $E(D) = 1$, $\delta_0 = 1 - \tilde{\beta}$, если $1 - \tilde{\beta} \leqslant A_2 \ln^{-1} D$; $E(D) = 0$, $\delta_0 = A_2 \ln^{-1} D$, если $1 - \tilde{\beta} > A_2 \ln^{-1} D$.

3) Пусть $u \in [x^{1-A_1}, x]$, $\ln x / \ln \ln x \geqslant A_2 \ln D$, $D \geqslant D_1$. Тогда $|\psi(x+u, D, l) - \psi(x, D, l) - u\{1 - E(D)\,\tilde{\chi}(l)\,x^{\tilde{\beta}-1}\}/\varphi(D)| < A_3 \delta_0 u/\varphi(D)$, где A_1, A_2, A_3, D_1 — постоянные.

В. М. Архангельская

128. О распределении малых значений модуля ζ-функции. Родосский К. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 2, 97—102

Рассматривается отрезок обыкновенного ряда Дирихле $f(s) = \sum_{y < n \leqslant z} a_n n^{-s}$, где $s = \sigma + it$, $z > y \geqslant 3$, $|a_n| \leqslant A\tau(n)$, A — постоянная, $\tau(n)$ — число делителей n, в прямоугольнике

$$\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad T/2 \leqslant t \leqslant T, \qquad (R)$$

где $\Delta \in [1/2, 1]$, $T > 0$.

Доказывается:

Теорема. Пусть числа $\rho^{(k)} = \beta^{(k)} + i\tau^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям: 1) $\rho^{(k)} \in R$, 2) $|\tau^{(k)} - \tau^{(l)}| > B$ при $k \neq l$, 3) $|f(\rho^{(k)})| > M$, где B и M — положительные постоянные. Пусть $Q(\Delta, T)$ означает наибольшее количество чисел $\rho^{(k)}$, удовлетворяющих условиям 1), 2), 3). Тогда

$$Q(\Delta, T) < c_1 A^2 M^{-2} L^6 \ln^{12} z\,(Ty^{1-2\Delta} + z^{2(1-\Delta)})$$

при условии $\ln^3 z \geqslant \max\{L^{-3}, B^{-1} L^{-3}\}$, где $L^3 = \max\{8AM^{-1}, 1\}$, c_1 — постоянная.

Из теоремы получено следствие о распределении малых значений модуля ξ-функции: прямоугольник (R) разбивается на горизонтальные полоски (R_n) шириной $= 1$, и оценивается число (R_n), для которых $\min_{s \in R_n} |\zeta(s)|$ достаточно мал. Этот результат является улучшением результата, ранее опубликованного автором. Докл. АН СССР, 1952, 86, № 6, 1069—1070). В. М. Архангельская

129. Дзета-функция Римана и числа Бернулли. Пародиа (Fonction ζ de Riemann et nombres de Bernoulli. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 13, 1395—1396 (франц.)

Исходя из известного равенства

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} - B_1 \frac{1}{x^3} + B_2 \frac{1}{x^5} - \ldots, \qquad (1)$$

где B_i — числа Бернулли, и установленного Шверингом (Schwering M., Math. Ann., 1899, 52, 171) представления левой части равенства (1):

$$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)(x+2)} - \ldots - \frac{(k-1)!}{k(x+1)(x+2)\ldots(x+k)} - \ldots,$$

автор устанавливает связь между обобщенной ζ-функцией Римана и числами Бернулли:

$$\zeta(2, s+1) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \ldots - \frac{1}{s^2}, \qquad (2)$$

$$\zeta(2, s+1) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2s^2} + \frac{B_1}{s^3} - \frac{B_2}{s^5} + \ldots \qquad (3)$$

для целого положительного действительного s. Здесь $\zeta(2, s+1) = \sum_{r=0}^{\infty} 1/(s+1+r)^2$. При $s > 0$ оказывается

$$\zeta(2, s+1) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)(s+2)} + \ldots + \frac{(k-1)!}{k(s+1)\ldots(s+k)},$$

отсюда и получаются равенства (2) и (3). Е. П. Ожигова

130. Распределение значений мультипликативных функций. Ле-Век (The distribution of values of multiplicative functions. LeVeque W. J.), Michigan Math. J., 1953 — 1954, 2, № 2, 179—192 (англ.)

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — натуральные числа, $T(x \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — число натуральных чисел, не превосходящих x, вида $p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$, где $p_1, \ldots, p_r$ — различные простые числа.

Доказывается, что при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant \alpha_r$ имеет место асимптотическая формула

$$T(x \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_r) \sim \frac{A_1}{(\nu-1)!} x^{1/\alpha_1} \frac{(\log \log x)^{\nu-1}}{\log x},$$

где $A_1 = A_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \alpha_1 \sum \left(p_{\nu+1}^{-\alpha_{\nu+1}} \ldots p_r^{-\alpha_r}\right)^{1/\alpha_1}$, причем сумма берется по всем комбинациям простых чисел $p_{\nu+1}, \ldots, p_r$, которые дают различные члены указанного вида.

Отсюда выводится асимптотическая формула для $T_k(x)$ — числа натуральных чисел, не превосходящих x и имеющих ровно k делителей, именно: если $k =$

$= P_1^{\nu} \dots P_s^{\nu_s}$, где $P_1 < \dots < P_s$ — простые числа, то

$$T_k(x) \sim \frac{A_2}{(\nu-1)!} x^{1/(P_1-1)} \frac{(\log\log x)^{\nu_1-1}}{\log x},$$

причем A_2 зависит только от k.

Доказывается также аналогичная формула для числа натуральных чисел, не превосходящих данной границы и имеющих ровно k представлений в виде суммы двух квадратов натуральных чисел.

Для доказательства используются производящие ряды Дирихле и контурное интегрирование. И. П. Кубилюс

131. О «цепочках» последовательных простых чисел с ограниченными разностями. К у д ж а н и (Sulle «catene» di numeri primi consecutivi a differenza limitata. C u g i a n i M a r c o), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 36, 121—132 (итал.)

Пусть $P(\eta, \xi)$ — множество простых чисел p_i, для которых $(1-\eta)\xi < p_i \leqslant \xi$, где $0 < \eta < 1$, $d = f(\xi)$ или $d = f(p_i)$. Цепочкой типа Δ называются последовательные простые числа $p_n, p_{n+1}, \dots, p_N$ из $P(\eta, \xi)$, если $\delta = p_{i+1} - p_i < d$ при $n \leqslant i < N$, причем цепочка не продолжаема в том смысле, что $\delta_{n-1} \geqslant d$ или $p_{n-1} \leqslant (1-\eta)\log\xi$, а $\delta_N \geqslant d$ или $p_{N+1} > \log\xi$. Цепочкой Δ^* называются простые числа, взятые по такой же схеме, но с условием $\delta_i \geqslant d$ при $n \leqslant i < N$. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\nu$ и $\Delta_1^*, \Delta_2^*, \dots, \Delta_{\nu^*}^*$ — соответственно последовательные цепочки типа Δ и Δ^*, где $\nu = \nu(d; \eta, \xi)$ и $\nu^* = \nu^*(d; \eta, \xi)$. Через ρ (соответственно ρ^*) обозначается число $N-n$ разностей δ_i последовательных простых чисел в цепочке типа Δ (соответственно Δ^*).

Доказываются теоремы:

1. Пусть $d = f(\xi) = \alpha(\xi)\log\xi$, $f(\xi)$ — действительная монотонно не убывающая функция такая, что $f(\xi) \to +\infty$ при $\xi \to +\infty$, $\alpha(\xi) \leqslant 1/16 - \delta$, $\delta < 1/16$ — положительная постоянная и $k < \delta$ — любое положительное, тогда $\max \rho^* > k/\alpha(\xi)$, $\xi \geqslant \xi_1$, $\xi \geqslant \xi_0(\eta, \sigma, k)$.

2. Пусть $d = \log p_i$, $\pi(x) = \mathrm{Li}\, x + O(x/\exp(\log^{\theta} x))$, ($\pi(x)$ — число простых чисел $\leqslant x$), тогда можно найти $\xi_0 = \xi_0(\eta, \theta)$ такое, что для любого $\xi \geqslant \xi_0$

$$\nu(\log p_i;\ \eta, \xi) > \exp(\log^{\theta}\xi).$$

3. Пусть $d = \log\xi$, θ — то же, что и в теореме 2, тогда при $\xi \geqslant \xi_0(\eta, \theta)$

$$\nu(\log\xi; \eta, \xi) > K^2 \exp(\log^{\theta}\xi) + k\log\xi / \log\log\log\xi,$$

где $K = 1$, если $\log\xi$ — целое и $K = \log\xi - [\log\xi]$, если $\log\xi$ не целое, k — положительная постоянная, зависящая от η.

В доказательствах этих теорем существенно используются оценки сверху для числа простых чисел с заданной разностью, полученные в работах Бруна, Шнирельмана, Сельберга и Риччи. А. А. Бухштаб

132. Об оценке почти асимптотичности разности между последовательными простыми числами. I. Р и ч ч и (Sul pennello di quasi-asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. R i c c i G i o v a n n i), Atti Acad. naz. Lincei. Rend., Cl. Sci. fis., mat. e natur., 1954, 17, № 5, 192—196 (итал.)

Исследуется последовательность разностей между соседними простыми числами, $\{p_{n+1} - p_n\}$, при помощи более регулярных последовательностей. Известны неравенства:

1) тривиальное $p_{n+1} - p_n \geqslant 2$ для любого $n > 1$;

2) $p_{n+1} - p_n < p_n^{\theta}$ ($\theta = 48/77 + \varepsilon$) для достаточно большого n (Ingham A. E., Quart. J. math, 1937, 8, 255—266);

3) $(57/59)\ln p_{n'} > p_{n'+1} - p_{n'} > (1/2 - \varepsilon)\ln p_{n'} \ln\ln p_{n'} \times (\ln\ln\ln p_{n'})^{-2} \ln\ln\ln\ln p_{n'}$ для бесконечного n' (Rankin R. A., J. London Math. Soc. 1947, 22, 226—230).

О п р е д е л е н и я. Последовательность $\{a_n\}$ имеет квазипредел A, $\mathrm{q}\lim_{n\to+\infty} a_n = A$, если при любом $\varepsilon > 0$ последовательность $n(\varepsilon, h)$ индексов n, для которых $|a_n - A| < \varepsilon$, имеет асимптотическую плотность 1.

Две последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ с положительными элементами образуют границы почти асимптотичности для $\{x_n\}$:

$$x_n \backsim (a_n, b_n) \text{ при } n \to +\infty,$$

если $\mathrm{q}\liminf_{n\to+\infty} x_n/a_n = 1$ и $\mathrm{q}\limsup_{n\to+\infty} x_n/b_n = 1$.

Т е о р е м а 1. Не существует монотонной функции $\psi(n)$, для которой $p_{n+1} - p_n$ была бы почти асимптотичной.

Т е о р е м а 2. Пусть $(\alpha\ln p_n, \beta\ln p_n)$ — границы почти асимптотичности для $(p_{n+1} - p_n)$,

$$p_{n+1} - p_n \backsim (\alpha\ln p_n, \beta\ln p_n)\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty).$$

Константы α и β удовлетворяют в этом случае неравенствам $\alpha \leqslant 1 - H/C$, $\beta \geqslant \alpha + 2H/C$, где $H = \prod_{p\geqslant 3}(1 - (p-1)^{-2}) = 0{,}6601$ (константа Шаха и Вильсона), C — коэффициент Вигго Бруна; $0 \leqslant C \leqslant 16H$.

Т е о р е м а 3. Пусть $\psi_1(n)$ и $\psi_2(n)$ — монотонные функции и $p_{n+1} - p_n \backsim (\psi_1(n), \psi_2(n))$; тогда $\psi_2(n) \to \infty$ и $\liminf_{n\to-\infty} \psi_1(n)/\ln p_n \leqslant 1 - H/C$, $\limsup_{n\to+\infty} [\psi_2(n) - \psi_1(n)]/\ln p_n \geqslant 2H/C$.

Доказательства даны в части II работы. В. А. Голубев

133. Об оценке почти асимптотичности разности между последовательными простыми числами. II. Р и ч ч и (Sul pennello di quasi asintoticità della differenza di interi primi consecutivi. R i c c i G i o v a n n i), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954 (1955), 17, № 6, 347—351 (итал.)

Выводы, на основании которых доказываются теоремы I, II и III, сформулированные в первой части (реф. 132.) В. А. Голубев

134. О коэффициенте Вигго Бруна. Р и ч ч и (Sul coefficiente di Viggo Brun. R i c c i G i o v a n n i), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1953, 7, № 1—2, 133—151 (итал.)

В 1919 г. Вигго Брун методом «эратосфенова решета» доказал теорему, определяющую верхнюю границу для числа пар простых чисел с данной разностью $2a$: Пусть $0 < \delta \leqslant 1$, целое $a \geqslant 1$. Обозначим через $Z_\delta(\xi; 2a)$ число пар p_i, p_j простых чисел таких, что $p_j - p_i = 2a$; $(1-\delta)\xi < p_i \leqslant \xi$, $2a \leqslant \delta\xi$. Тогда для достаточно большого $\xi \geqslant \xi_0(\delta)$ получим

$$Z_\delta(\xi; 2a) < c \prod_{3\leqslant p/a} \frac{p-1}{p-2} \delta\xi \log^{-2}\xi,$$

где c — постоянная, независимая от ξ, δ, a.

Для краткости обозначим

$$\Phi(a) = \prod_{3\leqslant p/a} \frac{p-1}{p-2}, \quad Z_\delta(\xi; 2a) = z_\delta(\xi; 2a) \times \Phi(a)\delta\xi\log^{-2}\xi.$$

Пусть μ, λ — действительные числа, $0 \leqslant \mu < \lambda$; обозначим через $B_\delta(\mu, \lambda)$ нижнюю границу чисел c', для которых $Z_\delta(\xi; 2a) < c'\Phi(a)\delta\xi\log^{-2}\xi$, $\mu\log\xi \leqslant 2a \leqslant \lambda\log\xi$.

Коэффициентом Виго Бруна называют функцию $B_\delta(\mu,\lambda)$, определяемую соотношениями $B_\delta(\mu,\lambda)=\overline{\lim}_{\xi\to+\infty} z_\delta(\xi;2a)$, $\mu\log\xi<2a\leqslant\lambda\log\xi$, со следующим свойством: если даны $\delta,\mu,\lambda\,(0<\delta\leqslant1,0\leqslant\mu<\lambda)$, $B_\delta(\mu,\lambda)$ — наименьшее положительное число, при котором для всех $\xi>0$ можно определить $\xi_0=\xi(\delta,\varepsilon)$ так, что для $\xi\geqslant\xi_0$, $\mu\log\xi<2a\leqslant\lambda\log\xi$, будет

$$Z_\delta(\xi;2a)<\{B_\delta(\mu,\lambda)+\varepsilon\}\,\Phi(a)\,\delta\xi\log^{-2}\xi.$$

Даны доказательства 6 теорем для $B_\delta(\mu,\lambda)$.

Теорема 1. Для всех фиксированных $\delta\,(0<\delta\leqslant1)$ $\overline{B}_\delta\geqslant2H$, где $H=\prod_{p\geqslant3}\{1-(p-1)^{-2}\}=0{,}6601\ldots$

Для вывода остальных теорем доказаны 2 леммы:

1. Для суммы функций $\Phi(a)$ существует асимптотическое соотношение $\Psi(\tau,\eta)=\sum_{\tau<a\leqslant\eta}\Phi(a)=H^{-1}\times\times(\eta-\tau)+R(\tau,\eta)$, где $|R(\tau,\eta)|<c_1(\eta-\tau)/p_h+c_2P_h\log(\eta/p_h)+c_3P_h$ (c_1,c_2,c_3 — константы), $P_h=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\ldots p_h$.

2. Пусть $0<\delta\leqslant1$, $0\leqslant\tau<\eta$, $\beta=\beta(\xi_0,\xi;\tau,\eta)$ — верхняя граница для $z_\delta(u,2a)$ в поле $\xi_0<u\leqslant\xi$, $\tau<a\leqslant\eta$. Обозначим через $K_\delta(\xi;\tau,\eta)$ число пар (p_i,p_j) простых чисел таких, что $2\tau<p_j-p_i<2\eta$, $(1-\delta)\xi<p_i\leqslant\xi$, $2\eta\leqslant\delta\xi$; тогда для произвольного фиксированного $\varepsilon>0$, если $(\eta-\tau)/\log\eta$ и ξ достаточно велики, получаем $K_\delta(\xi;\tau,\eta)<(\beta+\varepsilon)H^{-1}(\eta-\tau)\,\delta\xi\log^{-2}\xi$.

Теорема 3. Если для некоторого $\mu\geqslant0$, $B_\delta(0,\mu)=0$, то для всех $\lambda>1$ имеем $B_\delta(\mu,\lambda)\geqslant2(\lambda-1)H/\lambda(\lambda-\mu)$.

Теорема 4. Пусть интеграл $I_\delta(\mu,\lambda;\eta)=\int_\mu^\lambda B_\delta(u,u+\eta)\,du$ (в пределе имеем $I_\delta(\mu,\lambda)=\lim_{\eta\to0+}I_\delta(\mu,\lambda;\eta)$). Тогда для всех $\lambda\geqslant1$ получим $I_\delta(0,\lambda)\geqslant(1-1/\lambda)2H$.

Остальные теоремы являются следствиями указанных теорем. В. А. Голубев

135. Заметка о работе Сатхе. Селберг (Note on a paper by L. G. Sathe. Selberg Atle), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 3, 83—87 (англ.)

Дается более короткое доказательство результатов работы Сатхе (см., например, РЖМат, 1955, 1613). Основной результат — асимптотическое тождество

$$\sum_{n\leqslant x}d_z(n)=x(\log x)^{z-1}\Gamma^{-1}(z)+O((x\log x)^{z-2}),$$

где $|z|\leqslant A$, $x\geqslant2$, $\sum_{n=1}^\infty n^{-s}d_z(n)=\{\xi(s)\}^z$.

Н. Г. Чудаков

136. Об одной теореме Ван-дер-Корпута. Главка (Über einen Satz von van der Corput. Hlawka Edmund), Arch. Math., 1955, 6, № 2, 115—120 (нем.)

Дается обобщение теоремы Ван-дер-Корпута (Van der Corput, Acta Math., 1931, 56, 373—456): если α — иррациональное число, $(x_1,x_2,\ldots)$ — последовательность с условием $\lim_{i\to\infty}(x_{i+1}-x_i)=\alpha$, то она равномерно распределена (mod 1).

Пусть G — компактная группа, на которой задана нормированная мера Хаара. Последовательность $f=\{x_i\}$ называется равномерно распределенной (gleichverteilt) на G, если для любой непрерывной на G функции $\Phi(x)$

$$\lim_{N\to\infty}M_N(\Phi,f)=M(\Phi),$$

где

$$M_N(\Phi,f)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\Phi(x_i),\quad M(\Phi)=\int_G\Phi dx.$$

Последовательность $f=\{x_i\}$ называется *sgg*-последовательностью, если для любой непрерывной функции Φ

$$\lim_{N\to\infty}\overline{\lim}_{H\to\infty}\frac{1}{H}\sum_{r=0}^H|M_N(\Phi,f_{rN})-M(\Phi)|=0,$$

где $f_{rN}=\{x_{i+rN}\}=(x_{rN+1},\ x_{rN+2},\ldots)$; всякая *sgg*-последовательность равномерно распределена. Доказаны теоремы:

1. Пусть на G задана *sgg*-последовательность $f=\{y_i\}$, а последовательность $f'=\{x_i\}$ обладает тем свойством, что $\lim_{i\to\infty}(y_{i+1}^{-1}x_{i+1}x_i^{-1}y_i)=e$, где e — единица G. Тогда f' есть также *sgg*-последовательность.

2. Пусть в пространстве F всех последовательностей f из G задана мера. Тогда почти все последовательности f суть *sgg*-последовательности.

3. Каждая всюду плотная в G последовательность может быть упорядочена до *sgg*-последовательности.

4. Пусть $\Phi(x)$ — непрерывная функция на G и $M(|\Phi|)>0$. Пусть для некоторой *sgg*-последовательности $\{x_i\}$ ряд $\sum_{i=1}^\infty\alpha_i\Phi(x_i)$ абсолютно сходится и $0<\ldots\leqslant\alpha_3\leqslant\alpha_2\leqslant\alpha_1$. Тогда $\sum_{i=1}^\infty\alpha_i<\infty$ (обобщение теоремы Фату). А. В. Малышев

137. Модификация плотности Шнирельмана. Столи (A modified Schnirelmann density. Stalley Robert), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 1, 119—124 (англ.)

Для бесконечной последовательности $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots$ вводится следующее понятие ее плотности

$$\alpha=\operatorname{glb}\frac{i}{a_i}\qquad(1)$$

(glb — the greatest lower bound — нижняя грань).

Исходя из определения (1), доказывается теорема о плотности суммы двух последовательностей:

Если α — плотность A, β — плотность B, γ — плотность $A+B$, $\alpha+\beta\leqslant1$ и $1,2,3,\ldots,k\in A$, то в этом случае

$$\gamma\geqslant\frac{k}{k+1}\alpha+\beta.$$

А. И. Виноградов

138. О классе сумм множеств. Фолькман (Über die Klasse der Summenmengen. Volkmann Bodo), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 200—207 (нем.)

Пусть $\mathfrak{A}=\{a_i\}$ и $\mathfrak{B}=\{b_k\}$ — бесконечные множества натуральных чисел. Их сумма $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ есть множество всех чисел формы a_i+b_k. Каждому множеству $\mathfrak{A}$ сопоставляется число $\Gamma(\mathfrak{C})$ с двоичным разложением $\Gamma(\mathfrak{A})=\sum_{i=1}^\infty e_i2^{-i}=\sum_{a\in\mathfrak{A}}2^{-a}$, следовательно, если K — какой-нибудь класс множеств $\mathfrak{A}$, то ему соответствует точечное множество ${}_\Gamma K=\{\Gamma(\mathfrak{A}),\Gamma(\mathfrak{B}),\ldots\}$.

Для каждого числового множества $\mathfrak{A}$, полагая $A(n)=\sum_{i=1}^n e_i$, определяем нижнюю и верхнюю асимптотическую плотности $\underline{D}^*(\mathfrak{A})=\underline{\lim}_{n\to\infty}A(n)/n$ и, соответственно, $\overline{D}^*(\mathfrak{A})=\overline{\lim}_{n\to\infty}A(n)/n$.

Пусть $0\leqslant\zeta\leqslant1$, обозначим через $G_2(\zeta)$ и $G_3(\zeta)$ классы множеств, для которых соответственно $\underline{D}^*(\mathfrak{A})=\zeta$ и $\overline{D}^*(\mathfrak{A})=\zeta$.

Далее, пусть M — линейное точечное множество, а $V=\{i_1,\ i_2,\ldots\}$ — система интервалов с условием $M\subseteq\bigcup_{j=1}^\infty i_j$ и $|i_j|\leqslant\eta$ для всех j, где η — некоторое вещественное число.

Хаусдорфовой α-размерной мерой множества M называется число

$$\{M\}^\alpha=\lim_{\eta\to0}\inf_{V\in U(\eta,M)}\sum_{i_j\in V}|i_j|^\alpha,$$

где $0<\alpha\leqslant 1$, $U(\eta, M)$ — множество всех систем интервалов V.

Хаусдорфовой дробной мерой δ множества M ($\delta = \dim M$) называется число δ с условием

$$\{M\}^{\alpha}=\begin{cases}0 \text{ для } \alpha>\delta\\ \infty \text{ для } \alpha<\delta.\end{cases}$$

Наконец обозначим $d(\zeta)=(-\log 2)^{-1}[\zeta\log\zeta+(1-\zeta)\log(1-\zeta)]$, $0<\zeta<1$.

Доказываются:

Теорема 1.

Пусть $K(\zeta)$ — сумма $\bigvee_{\zeta\leqslant\eta\leqslant 1} G_2(\eta)$, $0\leqslant\zeta\leqslant 1$. Тогда, если $0\leqslant\zeta_1\leqslant 1$, $0\leqslant\zeta_2\leqslant 1$ и $\zeta_1+\zeta_2\geqslant 1/2$, то

1) $\dim_{\Gamma}(K(\zeta_1)+K(\zeta_2))\leqslant d(\zeta_1+\zeta_2)$ для $\zeta_1+\zeta_2\leqslant 1$,

2) $\dim_{\Gamma}(K(\zeta_1)+K(\zeta_2))=0$ для $\zeta_1+\zeta_2>1$. (Сумма классов определяется как и сумма числовых множеств).

Теорема 2. Пусть $S(\zeta)$ — класс множеств $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ с условием

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A(n)+B(n)}{n}\leqslant\zeta\quad(0\leqslant\zeta\leqslant 1).$$

Тогда $\dim_{\Gamma} S(\zeta)\leqslant\min(1, 2d(\zeta/2))$.

Из этих теорем вытекают аналогичные оценки сверху для Хаусдорфовых размерностей классов сумм множеств с подобными условиями, наложенными на их верхние или нижние асимптотические плотности, а также для сумм $\bigvee_{0\leqslant\eta\leqslant\zeta} G_3(\eta)$.

Далее доказывается теорема:

Если $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — бесконечные множества натуральных чисел, и либо $\overline{D}^*(\mathfrak{A})>0$, либо $\overline{D}^*(\mathfrak{B})>0$, то последовательность $2^n\Gamma(\mathfrak{C})$ ($n=1,2,\ldots$) неравнораспределена (mod 1).

В заключение рассматривается случай, когда одно из слагаемых множеств $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$ конечно и содержит не менее двух элементов.

Доказывается, что если S' — класс всех таких множеств, то $\dim_{\Gamma} S'>4/5$, а $\{{}_{\Gamma}S'\}^1=0$, где $\{{}_{\Gamma}S'\}^1$ — внешняя лебегова мера множества ${}_{\Gamma}S'$.

Эта работа использует результаты предыдущих статей автора (РЖМат, 1954, 2547; 1955, 41, 42, 602), а также Вирзинга (РЖМат, 1955, 43), для одной из теорем которого дается новое доказательство.

Г. В. Емельянов

139. Непрерывные и дискретные распределения по модулю 1. Кёйперс (Continuous and discrete distribution modulo 1. Kuipers L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1953, A56, № 4, 340—348; Indagationes math., 1953, 15, № 4, 340—348 (англ.)

Статья содержит ряд теорем о равномерном или неравномерном распределении по модулю 1 последовательности чисел $f(1)$, $f(2)$,..., где $f(t)$ — либо индивидуально заданная функция, либо любая функция некоторого определенного класса. Повидимому, новыми являются следующие предложения: 1. Если функция $f(t)$ дифференцируема и произведение $tf'(t)$ ограничено при $t\geqslant 0$, то последовательность $f(1)$, $f(2)$,... по модулю 1 распределена неравномерно; 2. Напротив, это распределение равномерно, если $f'(t)$ и $f''(t)$ существуют и ограничены при $t\geqslant 1$ и если при $t\to\infty$ $f'(t)$ имеет пределом какое-либо иррациональное число; 3. Последовательность $\cos(n+\log n)$ ($n=1,2,\ldots$) неравномерно распределена по модулю 1; 4. Последовательность $\sqrt{n}+\sin n$ ($n=1,2,\ldots$) равномерно распределена по модулю 1. Все доказательства приводятся полностью.

А. Я. Хинчин

140. Распределение по модулю 1 (функции $f(t)$ с ограниченным $t\,f'(t)$). Кёйперс (Distributions modulo 1 (functions $f(t)$ with bounded $tf'(t)$). Kuipers L.), Proc. Koninkl. nederl. Akad. wetensch., 1953, 56A, № 5, 478—483; Indagationes math.. 1953, 15, № 5, 478—483 (англ.)

В более ранних работах автора (см., в частности, предыдущий реферат) было показано, что функция $f(t)$ с ограниченным $tf'(t)$ не может быть равномерно распределенной по модулю 1 ни в смысле непрерывно изменяющегося t, ни в смысле последовательности $f(1)$, $f(2)$,... При этом имелось в виду распределение в интервалах $(0, T)$ при T, непрерывно стремящемся к $+\infty$, или в интервалах (S, T) при S и $T-S$, непрерывно стремящихся к $+\infty$. В настоящей статье тот же результат устанавливается для ряда семейств более общего характера интервалов (S, T).

А. Я. Хинчин

141. Об одном семействе арифметических ортонормированных систем функций. Томашевич В. Ф., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1954, № 13, 159—161

В работе референта (Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, № 2, 131—152) доказывается, что система функций

$$\Phi_n(x)=n^{2\sigma-1}\sum_{\omega(n)}\frac{\omega}{1-\omega t}\times\exp\left\{-\frac{x}{2}\,\frac{1+\omega t}{1-\omega t}\right\}\times$$
$$\times(-\log t)^{s-1}dt,$$

$\sigma=\mathrm{Re}(s)>1/2$, является полной на пространстве $L^2(0,\infty)$. Символ $\sum_{\omega(n)}$ означает, что суммирование распространено по корням n-й степени из единицы. Там же доказано, что функции $\theta_n(x)=\sum_{d/n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\times$ $\times\Phi_d(x)$ ортогональны в интервале $(0,\infty)$. В реферируемой работе оба результата обобщены на случай системы

$$\Phi_n(x,\alpha)=n^{2\sigma-1}\sum_{\omega(n)}\int_0^1\frac{\omega}{1-\omega\lambda}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x}{2}\,\frac{1+\lambda\omega t}{1-\lambda\omega t}\right\}(-\log t)^{s-1}dt.$$

$\lambda=\exp(i\alpha)$, $\sigma=\mathrm{Re}(s)>1/2$. Доказательство теоремы полноты основано на проверке тождества Парсеваля для соответствующей ортонормированной системы $\Psi_n(\alpha, s, x)=\gamma_n\sum_{d/n}\mu(n/d)\,\Phi_d(x,\alpha)$.

Автор указывает в заключение, что исследованные им ортонормированные системы не являются все близкими в смысле Н. К. Бари и что поэтому из полноты одной из систем нельзя, пользуясь теоремой Н. К. Бари, доказать полноту систем, отвечающих другим значениям параметра α.

Н. П. Романов

142. О производящей функции в аддитивной теории чисел. Гупта (On a generating function in partition theory. Gupta Hansraj), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, 20, № 5, 582—586 (англ.)

Изучается функция $p(n, r)$, обозначающая число решений уравнения $n=x_1+2x_2+3x_3+\ldots+rx_r$ в целых числах. Используется метод сравнения двух представлений функции $f(x,r)=r!/\prod_{k=1}^{r}(1-x^k)$ ($|x|<1$) рядами. (На стр. 582 в (2) неточность: пределы изменения y должны быть [0,1). *Реф.*).

А. И. Виноградов

143. Об асимптотическом распределении некоторых сумм. Файн (On the asymptotic distribution of certain sums. Fine N. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 243—252 (англ.)

Пусть $\psi_n(t)$ ($n=0,1,\ldots$) — функции Уолша:

$$\psi_0(t)=1,\ \psi_n(t)=\varphi_{n_1}(t)\,\varphi_{n_2}(t)\ldots\varphi_{n_r}(t)$$

для $n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_r}$, где n_i — целые неотрицательные числа и $n_{i+1} < n_i$, а $\varphi_n(t)$ — функции Радемахера:

$$\varphi_0(t) = 1\ (0 \leqslant t < 1/2),\ \varphi_0(t) = -1\ (1/2 \leqslant t < 1),$$

$$\varphi_0(t+1) = \varphi_0(t),\ \varphi_n(t) = \varphi_0(2^n t)\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Из одного результата Каца (Kac M., Ann. Math., 1946, 47, 33—49) следует теорема: если вещественная функция $f(t)$, определенная на всей числовой прямой, обладает свойствами: 1) $f(t+1) = f(t)$, 2) $f(t)$ интегрируема по Лебегу в интервале (0,1) и $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$, 3) ее коэффициенты Фурье-Уолша $\int_0^1 \psi_n(t) f(t)\,dt = O(n^{-\alpha})$, $\alpha > 1/2$,

$$4)\ \sigma^2 = \int_0^1 f^2(t)\,dt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f(t) f(2^n t)\,dt \neq 0, \quad (1)$$

то мера множества чисел t из интервала (0,1), для которых $S_N(f; t) = N^{-1/2}\sum_{n=0}^{N-1} f(2^n t) < x$, при $N \to \infty$ стремится к нормальной функции распределения

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2\sigma^2} du \,/\, \sigma\sqrt{2\pi}.$$

В реферируемой работе из приведенной теоремы делается следующий вывод: при $N \to \infty$ предельный закон распределения является нормальным для

$$N^{-1/2}\sum_{n=0}^{N-1}((2^n t - \gamma)) \text{ и } N^{1/2}\{N^{-1}Q_N(t; \alpha, \beta) - (\beta - \alpha)\},$$

где α, β, γ — вещественные числа, $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, $((t)) = t - [t] - 1/2$, $Q_n(t; \alpha, \beta)$ — число тех целых n, $0 \leqslant n \leqslant N$, для которых дробные части чисел $2^n t$ принадлежат интервалу $[\alpha, \beta)$. Вычисляются дисперсии предельных законов, что и составляет основное содержание работы. Так, в первом случае дисперсия равна

$$\sigma^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}((\gamma - \gamma_n))^2,$$

где γ_n — дробная часть числа $2^n\gamma$, причем $\sigma \neq 0$ для всех $\gamma \not\equiv 1/2 \pmod 1$. Если же $\gamma \equiv 1/2 \pmod 1$, то $\sigma = 0$, и предельный закон вырождается в единичный. Во втором случае дисперсия выражается сложной формулой, которая при $\alpha = 0$ имеет вид $\sigma^2 = \beta - \beta^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\{\min(\beta, \beta_n) - \beta\beta_n\}$. Здесь $\sigma \neq 0$ при $\beta \neq 0{,}1$. При помощи известного приема Крамера Уолда (Cramér H., Wold H., J. London Math. Soc., 1936, 11, 290—294) из теоремы Каца выводится ее двумерный аналог: Пусть $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы Каца; $\sigma_f^2 \neq 0$, $\sigma_g^2 \neq 0$ определяются при помощи (1), а r находится из формулы $r\sigma_f\sigma_g = \int_0^1 f(t)g(t) \times$ $\times dt + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \{f(t)\,g(2^n t) + g(t)\,f(2^n t)\}\,dt$. Тогда, если $r \neq \pm 1$, то двумерный закон распределения для пары сумм $S_N(f; t)$, $S_N(g; t)$ при $N \to \infty$ стремится к двумерному нормальному закону со средним значением (0,0), дисперсиями σ_f^2, σ_g^2 и коэффициентом корреляции r. При $r = \pm 1$ закон вырождается. Эта теорема применяется к частным случаям: $N^{1/2}\{N^{-1}Q_N(t; \alpha, \beta) - (\beta - \alpha)\}$, $N^{1/2}\{N^{-1}Q_N(t; \alpha', \beta') - (\beta' - \alpha')\}$ и $N^{-1/2}\sum_{n=0}^{N-1}((2^n t - \gamma))$, $N^{-1/2}\sum_{n=0}^{N-1}((2^n t - \gamma'))$.

И. П. Кубилюс

144. О распределении аддитивных теоретико-числовых функций. Халберстам (On the distribution of additive number-theoretic functions. Halberstam H.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 43—53 (англ.)

Теоретико-числовая функция $f(m)$ называется сильно аддитивной, если $f(mn) = f(m) + f(n)$ для $(m, n) = 1$ и $f(p^\alpha) = f(p)$ для степеней простых чисел p^α $(\alpha = 2, 3, \ldots)$.

Пусть $f(m)$ — вещественная сильно аддитивная функция, $A_n = \sum_{p<n} f(p)/p$, $B_n = \sum_{p<n} f^2(p)/p$,

$$\mu_k(n) = \frac{1}{nB_n^{k/2}}\sum_{m=1}^{n}(f(m) - A_n)^k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Доказывается теорема: Если

$$f(p) = O(1),\ B_n \to \infty, \quad (1)$$

то

$$\mu_k(n) \to \int_{-\infty}^{\infty} \omega^k e^{-\omega^2/2} d\omega \,/\, \sqrt{2\pi} \quad (2)$$

при $n \to \infty$. Обозначим для любого вещественного ω через $k_n(\omega)$ число натуральных m, $m \leqslant n$, для которых $f(m) < A_n + \omega B_n^{1/2}$. Тогда $k_n(\omega)/n$ является функцией распределения, а $\mu_k(n)$ — ее k-ым центральным моментом. Согласно известной лемме Чебышева, из (2) следует, что

$$k_n(\omega)/n \to \int_{-\infty}^{\omega} e^{-\omega^2/2} d\omega \,/\, \sqrt{2\pi} \quad (3)$$

при $n \to \infty$. Формулу (3) при условии (1) впервые получили Эрдёш и Кац (Erdös P., Kac M., Amer. J. Math., 1940, 62, 738—742), пользуясь центральной предельной теоремой теории вероятностей и методом решета Бруна. Доказательство автора вполне элементарно. Отмечается, что условие $f(p) = O(1)$ может быть заменено менее ограничительным, если предположить больше о способе возрастания B_n.

И. П. Кубилюс

145. О свертках в теории чисел. Попкен (On convolutions in number theory. Popken J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 10—15; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 10—15 (англ.)

Сверткой (convolution) $f(n) \bigstar g(n)$ двух арифметических функций $f(n)$ и $g(n)$ называется арифметическая функция $\sum_{d|n} f(d)\,g(n/d)$, где суммирование распространено на все делители числа n (Yarden D., Motzkin T., Riveon Lematematika, 1946, 1, 1—7; Kabaker N., Riveon Lematematika, 1946, 1, 29; Pellegrino F., РЖМат, 1955, 2097). Операция свертывания является коммутативной и ассоциативной. Относительно ее все арифметические функции $f(n)$, для которых $f(1) \neq 0$, образуют группу. Свертка двух мультипликативных функций является опять мультипликативной функцией. Эти свойства делают операцию свертывания полезной при решении ряда вопросов элементарной теории чисел, и поэтому, по мнению автора, ее следовало бы ввести в элементарный курс теории чисел. Удобство этого формального аппарата иллюстрируется на доказательстве формулы Сельберга $\vartheta(x)\ln x + \sum_{p \leqslant x}\vartheta(x/p)\ln p = 2x\ln x\,(1 + o(1))$, где $\vartheta(x) = \sum_{p<x}\ln p$ — классическая функция Чебышева.

И. П. Кубилюс

146. Об одном применении центральной предельной теоремы теории вероятностей. Постников А. Г., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 147—149

Пусть $k > 2$, $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — натуральные числа, $J_k(t)$ — число решений неравенства $\sum_{l=1}^{k} x_l/r_l \leqslant t$ в целых числах $|x_l| \leqslant r_l/2$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$.

Доказывается, что при любом x

$$\left| \frac{J_k(Ax)}{B} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du \right| \leqslant c\frac{\log k}{\sqrt{k}}, \qquad (1)$$

где $A = \left(\frac{1}{3}\sum_{l=1}^{k} r_l^{-2}\,[r_l/2]\,([r_l/2]+1)\right)^{1/2}$, $B = \prod_{l=1}^{k}(2\,[r_l/2]+1)$, $c>0$ — абсолютная постоянная.

Полученный результат является существенным усилением одной леммы Шнейдера (Schneider T., J. reine und angew. Math., 1936, 175, 182).

Для доказательства рассматриваются дискретные независимые случайные величины ξ_l с функциями распределения $F_l(x)$, имеющими скачки, равные $(2[r_l/2]+1)^{-1}$ в точках $m/r_l\left(m = -\left[\frac{r_l}{2}\right], \ldots, -1, 0, \ldots, \left[\frac{r_l}{2}\right]\right)$. Тогда функция распределения суммы $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_k$ равна $J_k(x)/B$. Отсюда (1) следует из центральной предельной теоремы вероятностей с оценкой добавочного члена, полученной Ляпуновым. И. П. Кубилюс

147. Границы для наименьших решений однородных квадратичных уравнений. Касселс (Bounds for the least solutions of homogeneous quadratic equations. Cassels J. W. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 2, 262—264 (англ.)

Рассматриваются уравнения вида

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i\leqslant j} f_{ij}x_ix_j = 0,$$

f_{ij} — целые числа

Обобщая метод Туэ (Thue A., Eine Eigenschaft der Zahlen der Fermat'schen Gleichung. Skr. Videnskab-Selsk, Christ (Mat.-naturv. Kl), 1911$_3$), автор доказывает теорему: Пусть $n\geqslant 2$ и $f(x)$ представляет нуль, тогда существует целочисленное решение уравнения $f(A) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, причем $0 < \max|a_j| \leqslant \{(3n^2 + n - 10)(n-1)^2F/2\}^{(n-1)/2}$, $F = \max|f_{ij}|$. Указывается, что постоянные могут быть улучшены. Э. Е. Симакова

148. Об одной проблеме диофантовых приближений. Малер (On a problem in Diophantine approximations. Mahler Kurt), Arch. Math., 1955, **6**, № 3, 208—214 (англ.)

Известна следующая теорема Дирихле: Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n вещественных независимых переменных, $L_1(x)$, $L_2(x)$, ..., $L_m(x)$ $(m<n)$ — их линейные формы с вещественными коэффициентами, по абсолютному значению не превосходящими положительного целого a, то для любого положительного целого N существует ненулевая система целых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $|L_\mu(x)| \leqslant 1/N$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$; $|x_\nu| \leqslant 2\,(anN)^{m/(n-m)}$.

В реферируемой статье автор рассматривает только случай $m=1$ и, применяя теорему Минковского о выпуклых телах вместо «Принципа ящиков» Дирихле, доказывает сформулированную ниже теорему, являющуюся усилением соответствующего результата в теореме Дирихле:

Если $L(x)$ — линейная форма n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n\geqslant 2)$ с вещественными коэффициентами, по абсолютному значению не превосходящими вещественного числа $a\geqslant 1$, а v_{n-1} означает объем $(n-1)$-мерного выпуклого полиэдра $|x_1|\leqslant 1, \ldots, |x_{n-1}|\leqslant 1$, $|x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}|\leqslant 1$, то для любого вещественного числа $N\geqslant 1$ существует ненулевая система целых значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, для которых $|L(x)|\leqslant 1/N$, $\max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) \leqslant 2\,(aN/v_{n-1})^{1/(n-1)}$.

П. Г. Когония

149. Одновременное диофантово приближение. Касселс (Simultaneous diophantine approximation. Cassels J. W. S.), J. London. Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 119—121 (англ.)

Пусть C означает верхнюю грань постоянных c, для которых неравенство

$$\max\{|\alpha - p/r|, |\beta - q/r|\} \leqslant c^{-1/2}r^{-3/2} \qquad (1)$$

имеет бесчисленное множество решений в целых $r>0$, p, q для любых вещественных α, β. До сих пор было известно, что $46^{1/4} \leqslant C \leqslant 23^{1/2}$ (Furtwängber Ph., Math. Ann., 1927, **96**, 169—175; 1928, **99**, 71—83; Davenport H., Proc. London Math. Soc., 1952, **2**, сер. 3, 406—416). Автор доказывает, что $C\leqslant 3{,}5$. Опечатка: в (1) пропущен знак — в показателе r. И. П. Кубилюс

150. Теорема об абелевых группах с применениями к геометрии чисел. Кнезер (Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen. Kneser Martin), Math. Z., 1955, **61**, № 4, 429—434 (нем.)

Доказана следующая теорема из теории групп. Пусть A и B — непустые конечные подмножества аддитивно записанной абелевой группы G. Тогда, обозначая через $A+B$ множество всех $x+y$, $x\in A$, $y\in B$, а через $n(A)$ число элементов A, будем иметь:

$$A+B = G, \text{ если } n(A)+n(B) > n(G),$$

$$n(A+B) \geqslant n(A)+n(B)-n(H),$$

$$\text{если } n(A)+n(B)\leqslant n(G),$$

где H — собственная конечная подгруппа G.

Предельным переходом отсюда выведена теорема о группе тора $T = R^n/I$, т. е. о совокупности точек n-мерного евклидова пространства R^n, рассматриваемых с точностью до сравнимых $(\mathrm{mod}\, I)$, где I — n-мерная решетка определителя $d(I)$: если A и B — непустые подмножества T, то:

$$A+B = T, \text{ если } i(A)+i(B) > i(T),$$

$$i(A+B) \geqslant i(A)+i(B), \text{ если } i(A)+i(B)\leqslant i(T);$$

здесь $i(A)$ — внутренний жорданов объем множества A в группе T, $i(T) = d(I)$. Теорема обобщается на любое число слагаемых множеств: если $\Sigma_k i(A_k) > i(T)$, то $\Sigma_k A_k = T$. Как отмечает сам автор, теорема о группе тора была ранее доказана Макбитом (РЖМат, 1953, 142).

Даны применения этой теоремы к геометрии чисел, уточняющие и обобщающие известные результаты о связи между однородными и неоднородными диофантовыми приближениями (ср. Hlawka E., Math. Z., 1943, **49**, 285—312; Hlawka E., Math. Ann., 1952, **125**, 183—207; Scherk P., Arch. Math., 1952, **3**, 303):

1. Пусть множество A_j пространства R^n содержит внутри не более k_j сравнимых $(\mathrm{mod}\, I)$ точек $(j=1,2,\ldots,r)$; пусть $\Sigma_j k_j^{-1} i(A_j) > d(I)$, где $i(A_j)$ — внутренний жорданов объем множества A_j. Тогда множества $\Sigma_j A_j + g$, где g пробегает точки решетки I, покрывают все пространство R^n.

2. Пусть ограниченное замкнутое выпуклое множество A содержит внутри не более k сравнимых $(\mathrm{mod}\, I)$ точек; пусть $s\geqslant [q] + \langle q\rangle^{1/n}$, $q = d(I)\,k\,i(A)^{-1}$, где $[q]$ и $\langle q\rangle$ суть целая и дробная части $q = [q]+\langle q\rangle$. Тогда множества $sA+g$ $(g\in I)$ покрывают все пространство R^n.

Теоремы 1 и 2 можно усилить, рассматривая кратные покрытия. А. В. Малышев

151. Применение одной теоремы Манна к геометрии чисел. Кнезер (Anwendung eines Satzes von

Mann auf die Geometrie der Zablen. Kneser Martin), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 32 (нем.)

Краткое резюме доклада (реф. 150).

Опечатка: вместо $V(A+B)=V(A)+V(B)$ следует читать $V(A+B)\geqslant V(A)+V(B)$. А. В. Малышев

152. О числе целых точек в многомерных шарах нечетной размерности. Лурсманашвили А. П., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1954, № 30, 55—66 (резюме груз.)

Пусть для действительного $x>1$, $A_{2k+1}(x)$ обозначает число целых точек в $(2k+1)$-мерном шаре $z_1^2+z_2^2+\ldots+z_{2k+1}^2\leqslant x$, $V_{2k+1}(x)$ — объем данного шара и $P_{2k+1}(x)=A_{2k+1}(x)-V_{2k+1}(x)$.

Доказывается асимптотическая формула для функции $P_{2k+1}(x)$ при четных $k\geqslant 4$. Эта формула для четных и нечетных $k\geqslant 4$ более просто получена в ранее опубликованной статье автора (РЖМат, 1954, 3958).

Г. А. Ломадзе

153. Квадратичные формы над локальными полями. О'Мира (Quadratic forms over local fields. O'Meara O. T.), Amer. J. Math., 1955, № 1, 77, 87—116 (англ.)

Пусть F есть поле характеристики 0, полное относительно неархимедовой дискретной метрики, поле классов вычетов которого есть совершенное поле характеристики 2. Работа посвящена изучению классов целоэквивалентных квадратичных форм над полем F (квадратичные формы f и g называются целоэквивалентными, $f\cong g$, если они преобразуются друг в друга линейным преобразованием переменных с целыми коэффициентами). Для случая, когда F есть поле 2-адических чисел, этот вопрос рассматривался ранее другими авторами (Jones B. W., Duke Math. J., 1944, 11, 715—727; Pall G., Bull Amer. Math. Soc., 1945, 51, № 3, 185—197).

Сумма $f+g$ обозначает сумму квадратичных форм f и g, не имеющих общих переменных. Через $N(f)$ обозначается идеал, порожденный всеми значениями f при целых значениях переменных. Квадратичная форма называется вполне целой, если все элементы ее матрицы целые. Основные результаты работы: Любая квадратичная форма f над полем F целоэквивалентна квадратичной форме вида $\pi^{s_1}f_1+\ldots+\pi^{s_m}f_m$, где π — простой элемент поля F, $s_1<\ldots<s_m$, f_i $(i=1,\ldots,m)$ — вполне целая квадратичная форма, определитель которой есть единица кольца целых элементов поля F, при этом матрица f_i либо диагональна, либо квазидиагональна, все клетки которой 2-го порядка вида $\begin{pmatrix}a&1\\1&b\end{pmatrix}$, a, $b\equiv 0\pmod{\pi}$. Число слагаемых m, показатели s_i, число переменных в формах f_i и тип их матриц определены однозначно. Пусть f и g — вполне целые квадратичные формы единичного определителя (от одинакового числа переменных); если $N(f)=N(g)=(2)$, то $f\cong g$; если 2 есть простой элемент поля F (неразветвленный случай), то уже из $N(f)=N(g)$ следует $f\cong g$. Если вполне целые квадратичные формы $f+g$ и $f+h$ целоэквивалентны, определитель f есть единица и $N(g)=N(h)$, то $g\cong h$ (слабая форма закона сокращения). Для неразветвленного случая построена полная система инвариантов для целоэквивалентных квадратичных форм. Далее рассмотрен разветвленный случай.

З. И. Боревич

154. Теоремы о структуре подгрупп модулярной группы. Ньюман (Structure theorems for modular subgroups. Newman Morris), Duke Math. J., 1955, 22, № 1, 25—32 (англ.)

В работе содержится 4 леммы и 15 теорем, посвященных выяснению арифметической структуры некоторых подгрупп модулярной группы и вопросам существования и построения рационального базиса функций, инвариантных относительно рассматриваемых подгрупп. Пусть G — группа матриц вида $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, где a, b, c, d — целые действительные числа, удовлетворяющие условию $ad-bc=1$. Множество элементов группы G, у которых $c\equiv 0\pmod{n}$ составляет подгруппу $G_0(n)$.

Основные теоремы:

Теорема 3. Если группа H удовлетворяет соотношению $G_0(mn)\subset H\subset G_0(n)$, то $H=G_0(dn)$, где $d\mid m$.

Функция $g(\tau)$ (не имеющая в верхней полуплоскости τ никаких особенностей, кроме полюсов) называется максимальной по отношению к подгруппе G_1, если она инвариантна относительно дробно-линейных преобразований, соответствующих этой подгруппе, и не обладает этим свойством по всякой другой подгруппе G_0, содержащей G_1.

Теорема 5. Если $g(\tau)$ — максимальная функция относительно подгруппы $G_0(n)$ и p — простое число, то $g(p\tau)$ есть максимальная функция относительно $G_0(pn)$.

Теорема 7. Если g_1 и g_2 — функции, максимальные соответственно относительно $G_0(k_1)$ и $G_0(k_2)$, где $(k_1,k_2)=1$, то g_1+g_2 — максимальная функция относительно $G_0(k_1,k_2)$. Совокупность функций $g_1,g_2,\ldots,g_n$, инвариантных относительно G_1, называется рациональным базисом G_1, если любая функция, инвариантная относительно G_1, выражается рационально через $g_1,g_2,\ldots,g_n$. Для группы G базисной функцией является модулярный инвариант J. Группы $G_0(n)$, $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 25 имеют одноэлементный базис B_n; $B_1=J$. Базисные функции B_n при $n=2$, 3,4,5, 7, 9, 13, 25 совпадают с функцией $f_n=[\eta(n\tau)/\eta(\tau)]^{r(n)}$, где дедекиндова функция $\eta(\tau)=x^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$, $x=\exp 2\pi i\tau$, $I(\tau)>0$, а $r(n)$ — такое наименьшее натуральное число, что функция $[\eta(n\tau)/\eta(\tau)]^{r(n)}$ инвариантна относительно $G_0(n)$.

Теорема 13. Если G_1 — подгруппа конечного индекса группы G, b — максимальная функция относительно G_1, то $\{J,b\}$ есть базис G_1.

Теорема 14. $\{J,f_n\}$ и $\{J(\tau),J(n\tau)\}$ суть базисы для $G_0(n)$.

Теорема 15. Пусть $(m,n)=1$, причем n может принимать одно из значений: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 25. Тогда $\{f_m,B_n\}$ есть базис для $G_0(mn)$.

И. Г. Мельников

155. Полиномы Чебышева и модулярная группа ступени p. Ранкин (Chebyshev polynomials and the modulary group of level p. Rankin R. A.), Math. scand., 1954, 2, № 2, 315—326 (англ.)

Пусть $\Gamma(1)$ — полная неоднородная модулярная группа, $\Gamma(n)$ — неоднородная главная группа сравнений ступени n, где n — целое положительное. Каждый элемент неоднородной модулярной группы $G(n)=\Gamma(1)/\Gamma(n)$ может быть представлен бесконечным множеством матриц

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},\quad ad-bc\equiv 1\pmod{n},$$

где a, b, c и d — целые числа.

Рассматриваются группы $G(p)$, где p — нечетное простое число. Приняты обозначения $q=(p-1)/2$, $r=(p+1)/2$.

Известно, что $G(p)$ имеет порядок $p(p^2-1)/2$, а порядком элемента $G(p)$, отличного от единичного, яв-

ляется или p, или делитель q или r. Элементы, порядки которых делят p,q и r, можно разбить соответственно на $p+1$, $p(p+1)/2$ и $p(p-1)/2$ сопряженных циклических подгрупп соответственно порядков p, q и r. Далее, $p+1$ подгруппы порядка p сопряжены с подгруппой, порожденной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и $p(p+1)/2$ подгруппы порядка q сопряжены с подгруппой, порожденной матрицей

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix},$$

где g — первообразный корень по модулю p (Gierster J., Math. Ann., 1881, 18, 319—365; Klein F., Fricke R., Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen, I, Leipzig, 1890, 419—491; Serret J.-A., Cours d'algèbre supérieure, II. Paris, 1879, 363—383; Vivanti G., Les fonctions polyédriques et modulaires, Paris, 1910, §§ 101—120). Однако для подгрупп порядка r не имеется такого простого представления.

Положим $\operatorname{ch}\theta = x$, тогда $T_n(x) = \operatorname{ch} n\theta$, $F_n(x) = \operatorname{sh} n\theta/\operatorname{sh}\theta$ будут полиномы от x соответственно степени n и $n-1$ (полиномы Чебышева).

Обозначим через $\mathfrak{E}_t$ ($t = q$ или r) класс вычетов x по модулю p, для которого $F_t(x) \equiv 0 \pmod p$. Если для некоторого $t > 1$ существует вычет x по модулю p такой, что $T_1(x), T_2(x), \ldots, T_{t-1}(x)$ пробегают все $t-1$ вычетов из $\mathfrak{E}_t$, то x автор называет генератором $\mathfrak{E}_t$.

Устанавливается ряд интересных теорем, относящихся к свойствам сравнений полиномов Чебышева. С помощью этих теорем, чисто арифметическим путем, получаются вышеупомянутые известные результаты. Кроме того, показывается, что $p(p-t)$ подгрупп порядка t ($t = q$ или r) сопряжены с подгруппой, порожденной матрицей

$$\begin{pmatrix} x & x+1 \\ x-1 & x \end{pmatrix},$$

где x — генератор $\mathfrak{E}_t$. Г. А. Ломадзе

156. Заметка о симплектических дополнениях. Раманатхан (A note on symplectic complements. Ramanathan K. G.), J. Indian Math. Soc., 1954, 18, № 3, 115—125 (англ.)

Как известно, симплектической матрицей степени m называется матрица M порядка $2m$, удовлетворяющая условию $M'JM = J$, где $J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, E — единичная матрица порядка m. Симплектическая матрица с целыми рациональными элементами называется модулярной. В работе рассматривается вопрос о существовании и построении модулярных матриц с некоторыми заданными столбцами. Отмечается, что этот вопрос, повидимому, связан с теорией абелевых квадратичных форм.

Пусть X есть целочисленная $2m \times r$ матрица, $r \leqslant m$, все детерминантные делители которой равны 1 (примитивная матрица). Чтобы существовала модулярная матрица $M_1 = (XR)$, у которой первые r столбцов совпадают с X, необходимо и достаточно, чтобы $X'JX = 0$. Пусть, помимо X, задана другая примитивная $2m \times s$ матрица Y, $s \leqslant m$. Модулярная матрица вида $M_2 = (XPYQ)$, где P есть $2m \times (m-r)$ матрица, существует тогда и только тогда, если $X'JX = 0$, $Y'JY = 0$, $X'JY = (\delta_{ij})$ ($\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$). Приводится параметрическое представление всех модулярных матриц вида M_1 и M_2 с заданными X и Y.

Указывается, что полученные результаты могут быть перенесены на симплектические матрицы с целыми алгебраическими элементами. З. И. Боревич

157. О теореме разложения для функционального простого дивизора в некотором циклическом поле, степень которого есть степень простого числа, делящегося на исследуемый дивизор. Хассе (Über das Zerlegungsgesetz für einen Funktionalprimdivisor in einem zyklischen Körper von durch ihn teilbarem Primzahlpotenzgrad. Hasse Helmut), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 216—225 (нем.)

Пусть k — поле алгебраических чисел конечной степени над полем рациональных чисел R, содержащее примитивный корень из 1 степени p^n, $K = k(t)$ — поле рациональных функций над k, $\mathfrak{p}$ — простой дивизор поля k, продолженный на поле $K = k(t)$ так, что $1, t, t^2, \ldots$ являются $\mathfrak{p}$-целыми и $\mathfrak{p}$-линейно-независимыми элементами. Пусть далее $R = P(t)$, P — мероморфизм $t \to t^p$ поля R, u — p-целый элемент поля R. Тогда $u' = (u^p - u^P)/p$ есть p-целый элемент. Предполагается, что u' не является p-й степенью по модулю p.

Исследуется закон разложения дивизора $\mathfrak{p}$ в циклическом поле $K_n = K\sqrt[p^n]{u^{P^n}}$. Устанавливается (теорема 2), что

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n^{p^{n-r}}, \quad \overline{K}_n = \overline{K}^{p^{n-r}} = \overline{k}(t^{p^{n-r}}).$$

Здесь $\mathfrak{p}_n$ — простой дивизор поля K_n, $\overline{K}$ и $\overline{K}_n$ — соответственно поля вычетов по $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}_n$ колец целых элементов полей K и K_n, r — целое число, $0 \leqslant r \leqslant n$. Для $n = 1$ даются условия для различения случаев $r = 0$ или $r = 1$. Д. К. Фаддеев

158. О числе решений сравнения $u^k + D \equiv w^2 \pmod p$. **Лемер** (On the number of solutions of $u^k + D \equiv w^2 \pmod p$. Lehmer Emma), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 1, 103—118 (англ.)

Число решений сравнения, указанного в заглавии, $N_k(D)$ можно представить в форме

$$N_k(D) = p + \left(\frac{D}{p}\right) + \psi_k(D),$$

где

$$\psi_k(D) = \sum_{u=1}^{p-1} \left(\frac{u^k + D}{p}\right)$$

На основе некоторых свойств суммы Якобсталя

$$\Phi_k(D) = \sum_{u=1}^{p-1} \left(\frac{u}{p}\right)\left(\frac{u^k + D}{p}\right)$$

и соотношений, связывающих функции $\psi_k(D)$ и $\Phi_k(D)$, устанавливается следующая теорема.

Теорема 1. Если k — нечетное число, $D = m^k$, где m — невычет $p = 2kh + 1$, то $N_{2k}(m^k) = p - 1$.

Случай $k = 2$ хорошо известен из теории квадратичных вычетов; $N_2(D) = p - 1$ для всех D. Для случая $k = 4$ на основе соображений теории деления круга доказываются две теоремы:

Теорема 3. Если 2 — невычет $p = x^2 + 4y^2$, $x \equiv y \equiv 1 \pmod 4$,

$$\text{то } N_4(D) = \begin{cases} p - 1 - 2x\left(\frac{m}{p}\right), & \text{если } D \equiv m^2 \pmod p \\ p - 1 - 4y\left(\frac{m}{p}\right), & \text{если } D \equiv 2m^2 \bmod p). \end{cases}$$

Теорема 5. Если 2 — квадратичный вычет и биквадратичный невычет $p = x^2 + 4y^2 = 8n - 1$, то

$$N_4(D)=\begin{cases} p-1-2x\left(\frac{m}{p}\right), & \text{если } D\equiv m^2 \pmod p,\\ p-1-4y\left(\frac{m}{p}\right), & \text{если } D\equiv V\overline{2}m^2 \pmod p,\end{cases}$$

где $x\equiv 1 \pmod 4$ и $y/2\equiv(-1)^n \pmod 4$.

Оба предложения являются уточнением одной теоремы Якобсталя (Jacobsthal E.. Anwendungen einer Formel aus der Theorie der quadratischen Reste. Dissertation, Berlin, 1906).

Некоторым обобщением одного результата Ховля (Chowla S., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1949, 35, 244—246) является теорема 7.

Теорема 7. Если $2-$кубический невычет $p=A^2+3B^2$, $4p=L^2+27M^2$, $A\equiv L\equiv 1 \pmod 3$, то

$$N_3(D)=\begin{cases} p-\left(\frac{D}{p}\right)2A, & \text{если } D\equiv m^3 \pmod p,\\ p+\left(\frac{D}{p}\right)L, & \text{если } D\equiv 2m^3 \pmod p,\\ p+\left(\frac{D}{p}\right)(2A-L), & \text{если } D\equiv 4m^3 \pmod p.\end{cases}$$

Выводятся также формулы для $N_6(D)$ и $N_8(D)$. Полученные результаты применяются к определению числа решений некоторых сравнений с тремя неизвестными. Доказывается теорема.

Теорема 9. Пусть $N_{k,k}(D)$— число решений сравнения $u^k+Dv^k\equiv w^2 \pmod p$, тогда

$$N_{k,k}(D)=\begin{cases} p^2, & \text{если } k-\text{нечетное},\\ p^2+(p-1)\left[1+\left(\frac{D}{p}\right)+\psi_k(D)\right], & \text{если } k-\text{четное}.\end{cases}$$

Определяются числа $N_{k,k}(D)$ при $k=2,\ 4,\ 6,\ 8$. Имеется приложение — таблица постоянных $(i,\ j)_8$ для $p=16n+1$ и $16n+9$ ($(i,\ j)_k$ — число решений $(\nu,\ \mu)$ сравнения $g^{k\nu+i}+1\equiv g^{k\mu+j} \pmod p$).

И. Г. Мельников

159. О диофантовом уравнении $x^2+8D=y^n$. Нагелль (On the Diophantine equation $x^2+8D=y^n$. Nagell Trygve), Arkiv mat., 1955, 3, № 2, 103—112 (англ.)

Пусть $x,\ y,\ D,\ n$ — целые рациональные числа, $n\geqslant 3$; $D\geqslant 1$ — нечетное и при $D>1$ не является квадратом целого числа. Рассматривается уравнение

$$x^2+8D=y^n. \qquad (1)$$

относительно неизвестных x и y. Содержание работы заключается в получении следующих результатов:

1. Уравнение $x^2+8D=y^n$ ($n\geqslant 3$) не имеет решений в положительных целых x и y.

2. Пусть n является степенью нечетного простого числа q, $n\geqslant 3$, и число классов идеалов в $K(V-2D)$ не делится на n. Тогда: a) если $q\equiv\pm 3 \pmod 8$, то (1) не имеет решений в целых числах x и y; b) если $n=3$, то x и y должны быть четными ((1) имеет решение); c) если D делится на q, то (1) не имеет решений; d) если $q\equiv\pm 1 \pmod 8$, то для данного $n\geqslant 7$ найдется нечетное $D\geqslant 1$ такое, что (1) имеет решение в целых x и y; e) если D — квадратичный невычет $\bmod n$, то (1) не имеет решений; f) если $D\equiv 1 \pmod 3$, то (1) не имеет решений; g) если $n>3$ (нечетное) и $D\equiv 1 \pmod 3$, то (1) не имеет решений; h) если $q\equiv\pm 1 \pmod 8$, то (1) имеет не больше одного решения в положительных целых x и y и др.

П. Н. Реморов

160. О диофантовом уравнении $u^2-Dv^2=\pm 4N$. Часть III. Столт (On the Diophantine equation $u^2-Dv^2=\pm 4N$. Part III. Stolt Bengt), Arkiv mat., 1955, 3, № 2, 117—132 (англ.)

Часть I см. Arkiv mat., 1951, 2, № 1, 1—23; часть II — там же, 1952, 2, № 10, 251—268.

Каждому решению $(u_1,\ v_1)$ уравнения $u^2-Dv^2=\pm 4N$ соответствует число $(u_1+v_1V\overline{D})/2$, норма которого равна $\pm N$. Множество всех решений, которым соответствуют ассоциированные числа, образуют класс решений. В предположении, что уравнение разрешимо, определяется число классов решений в случаях, когда N — бесквадратное число или степень простого числа. Из всех решений данного класса решение с наименьшим неотрицательным значением v называется основным решением класса. Для $N=1$ основному решению соответствует основная единица $\varepsilon=(x_1+y_1V\overline{D})/2$.

Ранее из элементарных соображений была получена оценка основного решения любого класса $|u|\leqslant V(x_1\pm 2)N$ и $v\leqslant y_1V\overline{N}/V\overline{x_1\pm 2}$. Из теории алгебраических чисел легко может быть получена оценка $|u|\leqslant V\overline{N}(1+V\overline{\varepsilon})$ и $vV\overline{D}\leqslant V\overline{N}(1+V\overline{\varepsilon})$.

В конце работы доказывается, что $V\overline{N}(1+V\overline{\varepsilon})-V\overline{N}(Vx_1+2)>0{,}42\,V\overline{N}$ и $V\overline{N}(1+V\overline{\varepsilon})-V\overline{N}y_1V\overline{D}/Vx_1-2>0{,}42\,V\overline{N}$. В. Д. Подсыпанин

161. О простых делителях полинома. Кун (Über die Primteiler eines Polynoms. Kuhn Paul), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 35—37 (нем.)

Пусть $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ $(a_0>0)$ — целочисленный примитивный полином, представляющий собой произведение r $(1\leqslant r\leqslant n)$ целочисленных примитивных неприводимых полиномов. $T=t_1^{b_1}\cdots t_s^{b_s}$ — постоянный делитель $P_n(x)$.

Пусть p пробегает простые числа $\leqslant x^{1/v}$ $(p\neq t_i)$, $d\not\equiv 0 \pmod p$, $d\not\equiv 0 \pmod{t_i}$, $N_n(dx,\ x^{1/v})$ — число чисел последовательности

$$P_n(1),\ P_n(2),\ P_n(3),\ \ldots, \qquad (1)$$

которые $\leqslant P_n(x)$, делятся на d, но не делятся на p и $t_i^{b_i+1}$. При $r=n$ и $x\to\infty$ методом Бруна доказывается, что

$$N_n(x,\ x^{1/v})>c_n\,0{,}98xv^n\log^{-n}x+O(x^{\varkappa(n)/v}v^{n+1}\log^{-n-1}x),$$

$$N_n(dx,\ x^{1/v})<c_n\,1{,}016nxd^{-1}v^n\log^{-n}x+O(x^{\varkappa(n)/v}v^{n+1}\log^{-n-1}x),$$

$\varkappa(2)\geqslant 9{,}99$, $\varkappa(3)\geqslant 13{,}67$, $\varkappa(4)\geqslant 17{,}50$, $\varkappa(5)\geqslant 22{,}02$, ...,

где $c_n>0$ — постоянная при заданном $P_n(x)$.

Доказывается теорема: Пусть $k=w+n$, где w — наименьшее целое число такое, что

$$\frac{0{,}98}{1{,}016}(w+1)>n\log\varkappa(n),$$

тогда при $r=n$ последовательность (1) содержит бесконечное число чисел, которые, за исключением постоянных делителей t_i, состоят не более чем из k простых множителей.

Случай $r=1$ рассматривался автором ранее. Указывается, что и в случае $1<r<n$ могут быть получены результаты лучшие, чем в известных работах Радемахера и Риччи (Rademacher H., Hamburg. Abhandl., 1923,

3, 13—20; Ricci C., Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1937, 6, 71—90, 91—116). А. А. Бухштаб

162. О числе различных значений полинома с коэффициентами из конечного поля. У т и я м а (Sur le nombre des valeurs distinctes d'un polynôme à coefficients dans un corps fini. U c h i y a m a S a b u r ô), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 10, 930—933 (франц.)

Пусть дан полином $f(X)$ степени $n \geqslant 2$ с целыми рациональными коэффициентами и целое положительное число m. Обозначим через $W(m)$ число значений $f(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, не сравнимых по модулю m. Рассматриваются значения $W(p)$ в случае, когда p — простое нечетное. Пусть $V(q)$ — количество различных значений $f(X)$, если $x \in F_q$, где F_q — конечное поле с $q = p^\nu$ элементами, $\nu \geqslant 1$.

Утверждается, что при $n = 2$ и $f(X) = X^2 + aX + b$, $(a,\ b \in F_q;\ p \neq 2)$ $V(q) = (q+1)/2$. При $n = 3$ и $f(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ $(a, b,\ c \in F_q;\ p \neq 3)$

$$V(q) = \begin{cases} q & (a^2 - 3b = 0,\ q \equiv -1 \pmod 3), \\ (q+2)/3 & (a^2 - 3b = 0,\ q \equiv 1 \pmod 3), \\ (2q-1)/3 & (a^2 - 3b \neq 0,\ q \equiv -1 \pmod 3), \\ (2q+1)/3 & (a^2 - 3b \neq 0,\ q \equiv 1 \pmod 3). \end{cases}$$

В статье доказывается теорема:
Для $n \geqslant 4$

$$V(q) > q/2 \qquad (1)$$

для всякого достаточно большого простого p. Достаточное условие выполнимости (1) — абсолютная неприводимость полинома $f^*(uv) = (f(u) - f(v))/(u - v)$.

Е. П. Ожигова

163. Об одной арифметической формуле. Ф а д д е е в Д. К., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 169—171

Рассматриваются одночлены $w = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \ldots y_m^{\beta_m}$ $(\alpha_i,\ \beta_j \geqslant 0)$ от главных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и вспомогательных $y_1, y_2, \ldots, y_m$, на которых задана числовая функция F такая, что ряд $\Sigma_w F(w)$ абсолютно сходится. Для одночлена u от главных переменных полагается $\Phi(u) = \Sigma_w F(uw)$, $\Psi(u) = \Sigma_{w'} F(uw')$, где w пробегает все рассматриваемые одночлены, а w' — одночлены только от вспомогательных переменных.

Т е о р е м а. Если $u_1, \ldots, u_k$ — одночлены от главных переменных, то $\Sigma_{i=1}^k \Psi(u_i) = \Sigma_j c_j \Phi(v_j)$, где $\Sigma_j c_j v_j = (u_1 + \cdots + u_k)(1 - x_1) \cdots (1 - x_n)$.

Полученная теорема, которая может рассматриваться как обобщение арифметической формулы обращения, применяется к выводу следующей асимптотической формулы. Пусть в поле алгебраических чисел k (степени n) $Q(N)$ обозначает число целых идеалов, нормы которых свободны от квадратов и не превосходят N. Тогда

$$Q(N) = \varkappa_1 N + O(N^{1-1/n}) \quad \text{при } n \geqslant 3,$$

$$Q(N) = \varkappa_1 N + O(N^{1/2+\varepsilon}) \quad \text{при } n = 2,$$

где $\varkappa_1$ зависит только от поля k.

Опечатки: на стр. 170, 18 строка снизу, вместо «простых идеалов» должно быть «целых идеалов», — 16 строка снизу, вместо «o» должно быть «O». З. И. Боревич

164. О произведении последовательных цепных чисел. III. Э р д ё ш (On the product of consecutive integers. III. E r d ö s P.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 85—90; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 85—90 (англ.)

Введем обозначение: $A_k(n) = n(n+1) \cdots (n+k-1)$.

Т е о р е м а. Существует абсолютная положительная константа c такая, что для всех $k > c$ и $l > 1$ уравнение $A_k(n) = x^l$ не разрешимо в целых числах.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на следующую лемму: Пусть $1 \leqslant b_1 < b_2 < \cdots < b_s \leqslant x$ — такая последовательность, что все произведения $b_i b_j$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant s$ различны между собой. Тогда верна оценка $s < \pi(x) + 3x^{7/8} + 2x^{1/2}$.

Доказательства проведены элементарным методом.

А. И. Виноградов

165. Простые числа. М а р д ж а н и ш в и л и К. К., Природа, 1955, № 4, 24—28

Популярная статья, знакомящая лиц, владеющих элементами высшей математики, с некоторыми из основных проблем аддитивной теории чисел.

Г. В. Емельянов

166. Факторграмма. С у о л л о у (The factorgram. S w a l l o w K e n n e t h P.), Math. Teacher, 1955, 48, № 1, 13—17 (англ.)

Дана геометрическая интерпретация метода решета Эратосфена. Таблица, построенная по модулю 6, позволяет с помощью параллельных линий выбрасывать все составные числа и находить все простые между N и $\sqrt{N}$, а также определять количество простых делителей данного числа, так как каждое составное число перечеркивается таким количеством линий, сколько простых делителей оно имеет.

Работа носит характер практического указания для нахождения конкретных простых чисел и предназначена для школьников при ознакомлении их с методом решета Эратосфена. А. И. Виноградов

167. О наименьшем положительном квадратичном невычете. С т о л ь т (Über den kleinsten positiven quadratischen Nichtrest. S t o l t B e n g t), Math. scand., 1954, **2**, № 2, 187—192 (нем.)

Пусть p — простое и ψ — наименьший нечетный положительный квадратичный невычет по mod p. В работе элементарными средствами показывается, что для всех $p \equiv 5 \pmod 8$, кроме $p = 5, 13, 37, 61, 109$, имеет место $\psi < \sqrt{p/2}$. При доказательстве отдельно разбираются 24 случая, соответствующие различным значениям по mod 24 числа $[\sqrt{p/2}]$. Указывается, что подобным же образом можно получить аналогичное улучшение известной оценки $\psi < \sqrt{p}$ также и в случаях $p \equiv 3, 7 \pmod 8$. В. Б. Демьянов

168. О наименьшем нечетном положительном квадратичном невычете по модулю p. С к о л е м (On the least odd positive quadratic non-residue modulo p. S k o l e m T h.), Kgl. norske videnskab. selskabs forhandl., 1954, **27**, № 20, 1—7 (англ.)

Элементарно (без помощи анализа бесконечно малых) доказывается следующая теорема: Если $\Psi(p)$ — наименьший нечетный квадратичный невычет модуля p, где p — простое одной из форм: $3 + 8k$, $7 + 8k$, $5 + 8k$, то существует такая постоянная C, что $\Psi(p) < Cp^{2/9}$ $(C \leqslant 13{,}41)$.

В основе доказательства лежит следующая лемма, доказательство которой элементарно: Пусть 1) M — совокупность членов арифметической прогрессии, разность которой есть положительное действительное число ρ; 2) α — произвольное положительное действительное число; 3) μ — наименьший элемент M, который $\geqslant \alpha$; 4) μ_1 — элемент M, ближайший к α; тогда $0 \leqslant \mu^2 - \alpha^2 < \rho(2\alpha + \rho)$, $|\alpha^2 - \mu_1^2| \leqslant \rho(\alpha + \rho/4)$.

К. Г. Бороздкин

169. Об одной теоретико-числовой группе. Н ё б а у э р (Über eine Gruppe der Zahlentheorie. N ö b a u e r W i l f r i e d), Monatsh. Math., 1954, **58**, № 3, 181—192 (нем.)

Пусть Γ обозначает кольцо целых чисел. В кольце многочленов $\Gamma[x]$ совокупность всех многочленов $g(x)$ с условием, что $g(a) \equiv 0 \pmod{n}$ для всех целых a, образует идеал. Этот идеал обозначим A_n. В фактор-кольце $\Gamma[x]/A_n$ определим операцию GF, где $F, G \in \Gamma[x]/A_n$, следующим образом. Пусть $f(x) \in F$, $g(x) \in G$, тогда класс GF определяется многочленом $f(g)$. Элементы $\Gamma[x]/A_n$ образуют полугруппу H_n относительно введенной операции. Элементы H_n, имеющие обратные, образуют группу G_n.

В группе G_n рассмотрим классы, которые содержат многочлены вида x^k. Легко видеть, что такие классы образуют подгруппу P_n. В реферируемой работе исследуется структура группы P_n.

Доказываются теоремы:

1. Если n не свободно от квадратов, то группа P_n порядка 1. Если $n = p_1 p_2 \cdots p_r$ — произведение различных простых, то P_n изоморфна группе классов вычетов по модулю m, где m — наименьшее общее кратное чисел $p_1 - 1$, $p_2 - 1$, ..., $p_r - 1$.

2. Пусть $n = a_1 a_2 \cdots a_t$ — какое-либо разложение числа n, свободного от квадратов, в произведение натуральных чисел. Тогда, если изоморфные группы рассматривать как равные, P_n — подгруппа прямого произведения $D = \prod_{\nu=1}^{t} P_{a_\nu}$, и для фактор-группы имеет место $D/P_n = \prod_{\nu=1}^{t-1} B_n$.

Здесь B_j — группа приведенных классов вычетов модуля b_j, и b_j получается из a_i следующим образом. Нужно образовать для каждого a_i число $\bar{a}_i$ как наименьшее общее кратное φ-функций его простых делителей (φ-функцией называем функцию Эйлера). b_j есть произведение простых чисел, входящих в числа $\bar{a}_i$. Кратность l, с которой простое q входит в b_j, определяется так. Обозначим кратности, с которыми простое q входит в числа $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_t$, соответственно через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ и расположим числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ в порядке возрастания. Тогда за l примем j-е число полученного ряда.

3. Если n свободно от квадратов и $m \mid n$, то P_m — гомоморфный образ P_n.

4. Группа P_n циклична для всех чисел n вида:

а) $n = 2^{\varepsilon_1} 3^{\varepsilon_2} p_1 p_2 \cdots p_r$, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 0$ или 1 и $r \geqslant 0$, причем все p_j представимы в виде $p_j = 2q^{kj} + 1$, где q — нечетное простое одно и то же для всех p_j; б) $n = 5$, 10, 15, 30. Других чисел, обладающих указанным свойством, нет.

5. Все свободные от квадратов числа n со свойством, что для всякого разложения на множители $n = a_1 a_2, \ldots, a_t$ имеет место изоморфное отношение $P_n \cong \prod_{\nu=1}^{t} P_{a_\nu}$, характеризуется тем, что в разложении на простые множители φ-функций их простых делителей каждое нечетное простое число встречается самое большее 1 раз и самое большее одна из этих φ-функций делится на 4.

6. Для любых r различных многочленов вида x^k существует только конечное множество n, для которых эти x^k представляют группу P_n. Число таких n не превосходит $(a+1)!$, где a есть произведение последовательных простых чисел, начиная с 2, с условием $\varphi(a) \geqslant r$. В. И. Нечаев

170. Заметка о перестановках в конечном поле. Фрайер (Note on permutations in a finite field. Fryer K. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 1—2 (англ.)

Доказывается, что перестановки $P\colon x' = x + 1$, $Q\colon x' = mx^{q-2}$ (q — простое) конечного поля $GF(q)$ порождают симметрическую группу $\mathfrak{S}_q$, если выполнено одно из двух условий: 1) m есть квадрат элемента $GF(q)$ и q — простое число вида $4n+1$ или 2) m не есть квадрат в $GF(q)$ и q — простое число вида $4n+3$, — и они порождают знакопеременную группу $\mathfrak{A}_q$, если 1) m — квадрат в $GF(q)$, q — простое число вида $4n+3$, или если 2) m — не квадрат в $GF(q)$, а q — простое число вида $4n+1$. Б. М. Уразбаев

171. Периодические свойства некоторых рекуррентных последовательностей целых чисел. Дюпарк (Periodicity properties of some recurring sets of integers. Duparc H. J. A.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 15—16 (англ.)

Пусть дана последовательность пар $\{u_n, v_n\}$ ($n = 0, 1, \ldots$) целых чисел, причем для всех n $0 \leqslant u_n < m$, где m — некоторое натуральное число, и при любом n имеет место соотношение

$$\sum_{h=0}^{s} c_h u_{n+h} = \sum_{k=0}^{t} d_k u_{n+k}.$$

Здесь $c_0, \ldots, c_s$ и $d_0, \ldots, d_t$ — фиксированные целые числа, на которые наложены следующие ограничения: 1) $c_s = \pm 1$, $d_t = m$; 2) многочлены $U(x) = \sum_{h=0}^{s} c_h x^h$ и $V(x) = \sum_{k=0}^{t} d_k x^k$ взаимно просты; 3) все корни $V(x)$ по абсолютной величине < 1. Как легко видеть, указанными требованиями все u_n с $n \geqslant s$ и все v_n с $n \geqslant t$ определяются однозначно, если заданы (с соблюдением условия $0 \leqslant u_n < m$) значения $u_0, \ldots, u_{s-1}$ и $v_0, \ldots, v_{t-1}$. Через M обозначается результант многочленов $U(x)$ и $V(x)$. Без подробных доказательств приводится ряд соотношений между периодами, а также периодами по $\bmod M$ последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, $\{u_n, v_n\}$ и некоторых других, связанных с ними. Отдельно отмечаются некоторые частные случаи, соответствующие конкретным значениям $c_0, \ldots, c_s$, $d_0, \ldots, d_t$. В. Б. Демьянов

172. Об одном виде периодичности для чисел Фибоначчи. Хоггатт (A type of periodicity for Fibonacci numbers. Hoggatt Vern), Math. Mag., 1955, 28, № 3, 139—142 (англ.)

Остатки от деления чисел Фибоначчи на 10^k образуют периодическую последовательность. Доказывается, что при $k \geqslant 3$ период этой последовательности равен $1{,}5 \cdot 10^k$. Н. Н. Воробьев

173. Об алгебраических множителях чисел V_{5n}/V_n (n — нечетное) в последовательности, ассоциированной с последовательностью чисел Фибоначчи. Джарден (On the algebraic factors of the numbers V_{5n}/V_n (n — odd) in the sequence associated with Fibonacci's sequence. Jarden Dov.), Rivcon Lematematika, 1954, 7, 23—25 (евр.; резюме англ.)

Приводится доказательство теоремы, высказанной без доказательства Крайчиком (Kraitchik M., Recherches sur la théorie des nombres, t. I, Gauthier-Villars, Paris, 1924, стр. 81): Пусть $A_n = 3 + V_{2n} - 5U_n$, $B_n = 3 + V_{2n} + 5U_n$, где U_n — числа Фибоначчи, а $V_n = U_{2n}/U_n$ — ассоциированные с числами Фибоначчи. Тогда для нечетного n $A_n \mid A_{mn}$ для $m \equiv \pm 1 \pmod{10}$ и $A_n \mid B_{mn}$

для $m \equiv \pm 3 \pmod{10}$. Такой же результат имеет место, если A и B поменять местами. (Взято из резюме автора). E. G. Straus

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 401.

174. Равные степенные суммы. Вальгрен (Lika potenssummor. Wahlgren Agne), Elementa, 1955, 38, № 1, 37—42 (швед.)

В книге Диксона — Бодевига (Dickson—Bodewig, Einführung in die Zahlentheorie, Leipzig — Berlin, 1931) указано, что числа от 1 до 32 можно распределить на 4 группы по 8 чисел в каждой так, чтобы суммы чисел каждой группы и суммы их квадратов были одинаковыми. В статье дано полное и элементарное решение этого вопроса и доказано, что число всех способов распределения этих чисел по группам равно 105.

Частично рассмотрен вопрос составления из этих же чисел групп по 8 чисел с равными суммами их кубов и четвертых степеней и дана таблица 18 таких групп. В. А. Голубев

175. Замечания о целочисленной разрешимости сравнений. Фьельстедт (Bemerkungen über gleichzeitige Lösbarkeit von Kongruenzen. Fjellstedt Lars), Arkiv mat., 1955, 3, № 2, 193—198 (нем.)

Доказаны:

Теорема 1. Пусть Ω — алгебраическое поле, $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над полем Ω с целыми алгебраическими коэффициентами, не имеющие кратных корней. Тогда существует бесконечное множество простых идеалов $\mathfrak{p}$ поля Ω таких, что количество различных решений сравнений

$$f(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}},\ g(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$$

равно степени этих сравнений.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два неприводимых многочлена степени выше первой. Тогда существует бесконечное множество простых чисел p, для которых сравнения

$$f(x) \equiv 0 \pmod{p},\ g(x) \equiv 0 \pmod{p}$$

не имеют решений.

Отмечается, что в формулировке теоремы 2 условие неприводимости многочленов $f(x)$ и $g(x)$ может быть заменено более слабым условием отсутствия делителей первой степени. В. Д. Подсыпанин

176. От ожерелья к теоремам о числах. Линдгрен (From necklaces to number theorems. Lindgren H.), Math. Gaz., 1955, 39, № 327, 13—19 (англ.)

Проблема изготовления ожерелья, в котором каждые две соседние бусины были бы различного цвета, оказывается, имеет связь с малой теоремой Ферма и сравнениями по составному модулю. Если n — число бусин, $N+1$ — число различных цветов, то при $n=p$ (простом) число различных возможных случаев изготовления ожерелья должно делиться на p. Получаем сравнение $N^p - N \equiv 0 \pmod{p}$. Если n составное, то имеем $\Sigma_{d|n}\mu(d)\,N^{n/d} \equiv 0 \pmod{n}$, где $\mu(d)$ — функция Мёбиуса. Рассматривается ряд вопросов, связанных с данной проблемой. В. А. Голубев

177. Сравнения для числа n-угольников, образованных n-прямыми. Карлиц (Congruences for the number of n-gons formed by n lines. Carlitz L.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 6, 407—411 (англ.)

Рассмотрим n попарно пересекающихся прямых, из которых никакие 3 не проходят через одну точку. Обозначим через g_n число групп из n точек, составленных из точек пересечения этих прямых, в каждой из которых никакие 3 не лежат на одной прямой. Робинсон (Robinson R., Amer. Math. Monthly, 1951, 58, № 7, 462—469) показал, что g_n удовлетворяет соотношению

$$g_{n+1} = ng_n + [n(n-1)/2]\,g_{n-2},$$

если считать, что $g_3 = 1$, $g_1 = g_2 = 0$.

В настоящей работе устанавливаются сравнения

$$g_{n+m} \equiv g_m g_n \pmod{m_0},$$

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} g_{n+sm} g_{(r-s)m} \equiv 0 \pmod{m_0^{[(r+1)/2]}},$$

$$g_p \equiv [(p-1)/2] \pmod{p},$$

где $m_0 = m$ при m нечетном и $m_0 = m/2$ при m четном, а p — нечетное простое число. Приложена таблица чисел g_n для $n \leqslant 10$. А. А. Киселев

178. Производная Шура для многочлена. Карлиц (The Schur derivative of a polynomial. Carlitz L.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, 1, 159—163 (англ.)

Пусть $f(x) = f(x_1, \ldots, x_k)$ обозначает многочлен от k неизвестных с целыми коэффициентами. Для $p \neq 0$ производная Шура определяется следующими равенствами:

$$f'_m(x) = (f^{p^m+1}(x) - f^{p^m}(x^p))/p^{m+1},$$

$$f^{(r+1)}_m(x) = (f^{(r)}_{m+1}(x)\, f^{p^m+1}(x) - f^{(r)}_m(x)\, f^{p^{m+r}}(x^p))/p^{m+1},$$

где $r \geqslant 1$. Обобщая результаты Шура (Schur, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1933, 145—151), автор показывает, что если p — простое, то $f^{(r)}_m(x)$ имеет целые коэффициенты для $1 \leqslant r \leqslant p-1$. Точнее, определяется вычет $f^{(r)}_m(x)$ по mod p^m. В заключение рассматриваются обобщения полученных результатов на произвольные коммутативные кольца, содержащие рациональные числа. A. L. Whiteman

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 404.

179. Заметка о числах и полиномах Эйлера. Карлиц (A note on Euler numbers and polynomials. Carlitz L.), Nagoya Math. J., 1954, 7, June, 35—43 (англ.)

Полином Эйлера $E_m(x)$ степени m и число Эйлера E_m определяются для $m = 1, 2, \ldots$ формулами $E_m(x+1) + E_m(x) = 2x^m$, $E_m = 2^m E_m(1/2)$.

Пусть p — нечетное простое число и $(p-1)\,p^{e-1} \mid 2m$. Доказываются сравнения по модулю p^e:

1) $$E_{2m} \equiv \begin{cases} 0 & \text{для } p \equiv 1 \pmod 4 \\ 2 & \text{для } p \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Частный случай 1) при $e=1$ принадлежит Нильсену (Nielsen N., Traité élémentaire des nombres de Bernoulli, Paris, 1923).

2) $$E_{2m}(a) \equiv 1 + (-1)^c,$$

где a и c — целые числа, $a \equiv c \pmod{p}$, $1 \leqslant c \leqslant p-1$. Если же $c = 0$, то

3) $$E_{2m}(a) \equiv 0.$$

Для случая, когда m есть нечетное кратное числа $(p-1)\,p^{e-1}/2$, имеем

4) $$E_m(a+p) \equiv E_m(a),\quad E_m(0) \equiv \Sigma_{i=0}^{p-1}(-1)^i \left(\frac{i}{p}\right),$$

$$E_m(0) - E_m(a) \equiv 2(-1)^a \sum_{s=0}^{a-1} (-1)^s \left(\frac{s}{p}\right),\ a \geqslant 1.$$

Далее рассматриваются полиномы $\Phi_m(x, \zeta)$, определяемые соотношением $\Phi_m(x+1, \zeta) - \zeta\Phi_m(x, \zeta) = (1-\zeta)\,x^m$, где $\zeta^l = 1$, $\zeta \neq 1$, $l \geqslant 2$, и для них при $x = \alpha$, где $\alpha \in R(\zeta)$, устанавливаются сравнения, аналогичные 2) и 3). А. А. Киселев

180. q-Бернуллиевы и эйлеровы числа. Карлиц (q-Bernoulli and Eulerian numbers. Carlitz L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 2, 332—350 (англ.)

В работе автора (Duke Math. J., 1948, 15, 987—1000) были введены q-бернуллиевы числа $\beta_m = \beta_m(q)$ с помощью формулы $\beta_m = \eta_m + (q-1)\eta_{m+1}$, где $\eta_0 = 1$, $\eta_1 = 0$, а при $m > 1$ η_m определяются символическим рекуррентным соотношением $(q\eta + 1)^m = \eta^m$. При $q = 1$ β_m превращаются в обычные числа Бернулли B_m. В настоящей работе вводятся и изучаются рациональные функции от x и q $H_m = H_m(x, q)$, которые можно определить формулами $H_0 = 1$, $H_1 = 1/(x-q)$ $(qH+1)^m = xH^m$. При $q = 1$ H_m становятся известными функциями, с помощью которых Фробениус доказал ряд свойств чисел Бернулли и им родственных (Frobenius G., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1910, 809—847). В данной работе этим же методом выводится ряд теорем о q-бернуллиевых числах. Наиболее интересным результатом является установление для чисел β_m аналогов теоремы Штаудта. Пусть p — нечетное простое число, а q — рациональное число, целое (mod p), тогда, если $q \not\equiv 1 \pmod p$, то при $p-1 \mid m$ имеем $p\beta_m \equiv -1 \pmod p$, а при $p-1 \nmid m$ β_m будет целым (mod p). В случае $q \not\equiv 1 \pmod p$ результат формулируется более сложно. Отмечается, что знаменатель числа β_m может оказаться делящимся на сколь угодно высокую степень p.

А. А. Киселев

181. Некоторые арифметические свойства функций Оливье. Карлиц (Some arithmetic properties of the Olivier functions. Carlitz L.), Math. Ann., 1955, 128, № 5, 412—419 (англ.)

Функциями Оливье автор называет функции $\Phi_r(x)$, представленные рядами $\Phi_r(x) = \sum_{m=0}^{\infty} x^{mk+r}/(mk+r)!$ Число k не включается в обозначение. Эти функции, являющиеся, очевидно, линейными комбинациями функций вида $e^{\omega x}$, исследовались Оливье (Olivier, J. reine und angew. Math., 1827, 2, 234—251) и позже рассматривались Глэшером и Беллем.

Рассматривается последовательность рациональных a, определенных формулой $\Phi_0^{-1}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m/m!$ и, более обще, последовательность $a_m^{(\lambda)}$, заданная соотношением

$$\Phi_0^{-\lambda}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(\lambda)} x^m/m!,$$

где λ — целое положительное число.

$\Phi_r(x)$ при $k = 2$ переходят в тригонометрические и поэтому коэффициенты $a^{(\lambda)}$ в разложении $\Phi_0^{-\lambda}(x)$ являются обобщениями чисел Эйлера. Известно, что числа Эйлера удовлетворяют сравнению Куммера

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} E_{m+sw} \equiv 0 \pmod{p^{re}, p^{m}},$$

где p — нечетное простое число такое, что w делится на $p^{e-1}(p-1)$.

Доказывается следующий аналог сравнения Куммера

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+sw}^{(\lambda)} \not\equiv 0 \pmod{p^{re}, p^{m}},$$

где $p \nmid k$, $p^{e-1}(p^u - 1) \mid w$ и где $a_n^{(\lambda)}$ определены при любом k разложением $\Phi_0^{-\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(\lambda)} x^n/n!$ Доказательство основано на рассмотрении идеалов поля деления круга. Далее полученные сравнения несколько обобщаются. В конце дается приложение указанных общих результатов к получению сравнений для коэффициентов некоторых степенных рядов, связанных с эллиптическими функциями.

Н. П. Романов

182. Сравнения для решений некоторых уравнений в конечных разностях второго порядка. Карлиц (Congruences for the solutions of certain difference equations of the second order. Carlitz L.), Duke Math., J., 1954, **21**, № 4, 669—679 (англ.)

Рассматривается уравнение в конечных разностях

$$u_{n+1} = nu_n + cu_{n-1} \tag{1}$$

и доказывается, что если c, u_0, u_1 — независимые переменные или рациональные числа, целые (mod m), причем $(c, m) = 1$, то при всех целых n решение u_n уравнения (1) удовлетворяет сравнениям

$$\Delta^{2r-1} u_n \equiv \Delta^{2r} u_n \equiv 0 \pmod{M_r}, \tag{2}$$

где $\Delta^r u_n = \sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c^{m(r-s)} u_{n+2sm}$, $r \geqslant 1$, $M_r = m^r$ при m нечетном и $M_r = 2^{-r+1} m^r$ при m четном. При $r = 1$ из (2) получается сравнение Лемера (Lehmer D. H., Ann. Math., 1932, 33, 143—150)

$$u_{n+2m} \equiv c^m u_n \pmod m. \tag{3}$$

Результаты, аналогичные (2) и (3), устанавливаются и для решения уравнения

$$u_{n+1} = nu_n + bcu_{n-1} + b^n + c^n, \quad bc \neq 0, \tag{4}$$

при условии, что $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ и $b \equiv c \pmod p$, где p — любой простой делитель m. Эти результаты переносятся затем и на уравнения, несколько более общие, чем (4).

А. А. Киселев

183. О распределении пифагоровых треугольников. Ламбек, Мозер (On the distribution of Pythagorean triangles. Lambek J., Moser L.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 1, 73—83 (англ.)

Прямоугольный треугольник называется примитивным пифагоровым, если его стороны a, b, c выражаются натуральными числами и $(a, b, c) = 1$. Определяется функция $P_a(n)$ — число примитивных пифагоровых треугольников с площадью меньше n: $P_a(n) = cn^{1/2} + O(n^{1/3})$, где $c = \Gamma(1/4)^2 2^{-1/2} \pi^{-3/2} = 0{,}531340\ldots$ Проблема нахождения $P_a(n)$ сводится при этом к определению числа точек решетки в определенной области декартовой плоскости. Доказываются формулы для $P_h(n)$ и $P_p(n)$ — числа примитивных пифагоровых треугольников с гипотенузой $h < n$ и соответственно с периметром $p < n$, данные Д. Н. Лемером в 1900 г. и Д. Х. Лемером в 1948 г., $P_h(n) = \frac{1}{2}\pi^{-1} n + O(n^{1/2} \log n)$, $P_p(n) = \pi^{-2} n \log 2 + O(n^{1/2} \log n)$.

В. А. Голубев

184. Доказательство теоремы Мёснера посредством линейных преобразований. Паше (Beweis des Moessnerschen Satzes mittels linearer Transformationen. Paasche Ivan), Arch. Math., 1955, 6, № 3, 194—199 (нем.)

Теорема Мёснера касается некоторого видоизменения суммирования ряда единиц, образующего треугольник Паскаля: Если образовать при данном K ($\geqslant 0$, целое), исходя из ряда единиц, как ряда 0-го порядка, суммы по схеме треугольника Паскаля так, что в ряде $\varkappa$-го порядка ($\varkappa = 0, 1, 2, \ldots$) перед суммированием вычеркивается каждое $(K - \varkappa + 1)$-е число, то этот процесс

прерывается при $x = K$ на числах 1^K, 2^K, 3^K, ... Например, при $K = 3$ получается схема:

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. . . .
1	2	3		4	5	6		7	8	9	. . .
1	3			7	12			19	27		. .
1				8				27			.

Известны три доказательства этой теоремы. Автор дает (второе) доказательство путем линейного преобразования E_k, дающего числа k-й строки по числам $(k-1)$-й строки. Теорема является следствием леммы, доказываемой методом полной индукции.

В. А. Голубев

185. О числах, которыми заканчиваются полные квадраты. Тебо (Sur les nombres qui terminent les carrés parfaits. Thébault Victor), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, Suppl., 8—11 (франц.)

Если в системе счисления с основанием $B = 2n$, где n — нечетное положительное, N_0 — наименьшее из чисел N, квадрат каждого из которых оканчивается заданным числом $\overline{cdu}$ из трех цифр, то все остальные числа N, взаимно простые с n, удовлетворяют условию $N \equiv \pm N_0 \pmod{B^3/4}$ или $N \equiv \pm N_0 \pmod{B^3/2}$. Доказаны необходимость и достаточность условия. Приведены примеры.

Б. А. Кордемский

186. Ряд замечательных квадратов. Тебо (Suites de carrés parfaits remarquables. Thébault Victor), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, Suppl. 1—8 (франц.)

Рассматриваются различные виды квадратов двузначных чисел, состоящих из двух одинаковых или отличающихся на единицу цифр. Система счисления произвольная.

В. Д. Подсыпанин

187. Замечательные треугольные числа. Ийер, Делькурт (Nombres triangulaires remarquables. Iyer R. V., Delcourte M.), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, Suppl. 11—15 (франц.)

Рассматриваются различные случаи, когда треугольные числа имеют симметрическую запись в системе счисления с произвольным основанием.

В. Д. Подсыпанин

188. Треугольные числа специальных форм. Ийер (Nombres triangulaires spéciaux. Iyer R. V.), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, Suppl. 16—23 (франц.)

Треугольными называются числа вида $T(x) = x(x+1)/2$. Решена следующая задача: найти целые числа a, b, c и соответствующие основания B систем счисления, в каждой из которых можно было бы образовать треугольные числа форм $aabb = T(cc)$, $abba = T(cc)$, $abab = T(cc)$, $T(a+b) = 10^n a + b$ и др. Решениями являются корни некоторых систем неопределенных уравнений. Приведены примеры решений.

Б. А. Кордемский

189. О строе Эйткина. Мозер, Уайман (On an array of Aitkin. Moser Leo, Wyman Max), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, Sec. 3, **48**, June, 31—37 (англ.)

Пусть числа G_n определяются равенством $\exp(\exp x - 1) = \sum_0^\infty G_n x^n/n!$. Как показал Эйткин, для вычисления чисел G_n можно пользоваться формулами $G_n = G_{0,n} = G_{n-1,0}$; $G_{m,n} = G_{m-1,n} + G_{m-1,n+1}$; $G_{0,0} = G_{1,0} = 1$, где $G_{m,n}$ — некоторые новые числа. Рассматриваются числа $A_{m,n}$, представляющие обобщение чисел $G_{m,n}$ и отличающиеся от них только тем, что $A_{0,0} = a$, $A_{1,0} = b$. Для этих чисел доказана формула $A_n = aG_n + (b-a)B_n$, где B_n определяются формулой $\exp(\exp x - 1)\int_0^x \exp(-\exp t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty B_n x^n/n!$. Таким образом для изучения любых A_n надо, кроме чисел G_n, знать еще свойства чисел B_n. Для чисел B_n в работе доказано тождество

$$B_n = \sum_{r=1}^n \sigma_n^r (0! - 1! + 2! - \cdots + (-1)^{r-1}(r-1)!),$$

где $\sigma_n^r = \frac{(-1)^r}{r!}\sum_{i=1}^r \left[(-1)^i \binom{r}{i} i^n\right]$,

и сравнение $B_p \equiv -1\left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(p-1)!}\right) \pmod p$.

Для чисел G_n в работе доказано

символическое равенство $G_{m,n} = (G+1)^m G^n$,

тождество $G_{m,n} = e^{-1}\sum_{r=0}^\infty (r+1)^m r^n/r!$

и сравнение $G_{n+mp} \equiv G_{m,n} \pmod p$.

В. Д. Подсыпанин

190. Поправки (Errata), Proc. Nat. Acad. Sci. USA 1955, **41**, № 4, 251 (англ.)

К РЖМат, 1955, 3606.

191 К. Доказательство последней теоремы Ферма. Бомон (Démonstration du dernier théorème de Fermat. Beaumont Henry du Boscq de, Editions Industrielles, Techniques et Littéraires, Paris, 1953, ii+18 pp.) (франц.)

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 401.

См. также: 9,10,11,12

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

192. Новое доказательство мультиномиальной теоремы. Невилл (A new proof of the multinomial theorem. Neville E. H.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 324, 134 (англ.)

Приводится простой вывод формулы для коэффициентов членов степени $(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$.

Л. Я. Окунев

193. Взаимно обратные формулы в сочетаниях. Сюй Ли-чжи (組合算法中的一對互逆公式及其應用. 徐利治), 數學通報 (Шусюэ тунбао), 1954, № 2, 49—52 (кит.)

Пусть $f(k)$, $g(k)$ — любые функции целочисленного переменного k ($k \geqslant 0$). Если функции $f(k)$ и $g(k)$ удовлетворяют одному из соотношений

$$f(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k g(k), \qquad (1)$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k f(k), \qquad (2)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ и $f(0) = g(0)$, то они удовлетворяют и другому. Формулы (1), (2) автор называет взаимно обратными. С их помощью решаются следующие вопросы:

1. Сколькими способами можно послать m различных словарей n библиотекам при условии, что каждая библиотека получает по крайней мере один словарь. $\left(\text{Ответ: } \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m\right)$.

2. Имеет место следующая формула

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m = \begin{cases} 0, & \text{когда } m < n \\ n!, & \text{когда } m = n \end{cases}$$

3. Пусть $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x(x-1) + a_3 x(x-1) \times (x-2) + \ldots$, тогда $\binom{n}{0}\varphi(0) - \binom{n}{1}\varphi(1) + \binom{n}{2}\varphi(2) - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\varphi(n) = (-1)^n a_n n!$

4. Имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{m+k}{k} = (-1)^n \binom{m}{s-n},$$

где m, n, s — любые положительные целые числа, и $\binom{m}{s-n} = 0$, когда $s < n$ или $m < s-n$.

5. Пусть $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$ $(H_1 = 1, H_0 = 0)$, тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k H_k = -\frac{1}{n}.$$

Лю Шао Сюэ

194. К вопросу о перестановках. Шао Пинь-цун (*n* 個相異文字的直線排列問題. 邵品琮), 數學通報 (Шусюэ тунбао), 1954, № 4, 17—22 (кит.)

Статья состоит из трех частей. В первой части вводится понятие «положительного определителя»:

$$+\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{1n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+ = \sum_{(i_1 \ldots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}.$$

Пусть $a_{ij} = a_j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $n!$ членов этого положительного определителя есть $n!$ перестановок n различных букв $a_1 \ldots a_n$.

В частности $n! = +\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \underbrace{1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1}_{n} \end{vmatrix}+$

Во второй части на примерах показывается общий метод нахождения числа перестановок при определенных условиях. Один из этих примеров такой: дано 4 буквы: a_1, a_2, a_3, a_4. Если a_i не может занимать i-е место, то число перестановок равняется значению следующего положительного определителя:

$$+\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}+$$

В третьей части дается следующий результат: имеются n различных букв $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и n мест. Известно, что на i-е место a_1 можно поставить P_i способами, $a_2 - Q_i$ способами, $\ldots a_n - K_i$ способами. Оказывается, что число размещений этих n букв на n местах при условии, что разные буквы ставятся на разные места, равно значению положительного определителя

$$+\begin{vmatrix} P_1 Q_1 \ldots K_1 \\ P_2 Q_2 \ldots K_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ P_n Q_n \ldots K_n \end{vmatrix}+$$

Лю Шао Сюэ

195. Проективная классификация кубических тройничных форм в вещественной области. Соколов Н. П., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 4, 405—417

Работа содержит в подробном изложении часть результатов, опубликованных автором ранее в конспективной форме (РЖМат, 1955, 3065). В. Б. Демьянов

196. О некоторых вопросах проблемы резольвент. Морозов В. В., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 173—187

В своих работах, посвященных проблеме резольвент, Н. Г. Чеботарев развил два подхода.

Первый подход заключается в том, что рассматриваются содевающие группы для группы Галуа заданного уравнения. Основной результат этих исследований Н. Г. Чеботарева заключается в теореме, называемой автором статьи первой теоремой Чеботарева. Применительно к уравнениям со знакопеременной группой и неопределенно-переменными коэффициентами получается, что число параметров такого уравнения при присоединении некоторой иррациональности может быть снижено самое большее на три. Автор статьи показывает, что этот мало обнадеживающий результат не может быть усилен.

Второй подход состоит в том, что проблема резольвент рассматривается с точки зрения критических многообразий. Основной результат этих исследований Н. Г. Чеботарева содержится в теореме, называемой автором статьи второй теоремой Чеботарева. Доказательство этой теоремы основано на утверждении, что целое рациональное преобразование параметров переводит содержащиеся друг в друге критические многообразия различной размерности в многообразия также различной размерности. Приводится пример, построенный Г. Н. Чеботаревым, опровергающий такое утверждение. Имеется, однако, основание предполагать, что утверждение Н. Г. Чеботарева будет верным, если дополнительно потребовать снижения размерности параметрического пространства. Автор статьи показывает, что в случае уравнений с симметрической или знакопеременной группой и с неопределенно-переменными коэффициентами это предположение справедливо, и приходит к выводу, что целая рациональная резольвента такого уравнения содержит самое меньшее $n-1$ параметров, за исключением уравнения третьей степени со знакопеременной группой. Таким образом, для дальнейшего снижения числа параметров необходимо присоединить некоторые иррациональности. Решение вопроса о выборе этих иррациональностей с помощью критических многообразий все еще далеко от своего завершения.

Л. Я. Окунев

197. К проблеме резольвент. Чеботарев Г. Н., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 189—193

Работа является продолжением исследований Вимана. Основная теорема: Общее алгебраическое уравнение степени $n \geqslant 21$ допускает $(n-6)$-параметрическую резольвенту. Л. Я. Окунев

198. О циклотомическом полиноме. Редеи (Über das Kreisteilungspolynom. Rédei Ladislaus),

Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, № 1—2, 27—28 (нем.; резюме русс.)

Дается краткое доказательство теоремы, использованной автором при исследовании теоретикогрупповой факторизационной проблемы, поставленной Хайошем. Теорема заключается в том, что если $F_n(x)$ — n-й циклотомический полином и p пробегает различные простые делители n, то имеет место следующее равенство между идеалами:

$$(F_n(x)) = (F_p(x^{\frac{n}{p}}), \ldots).$$

Это доказательство является более простым, чем доказательство Брёйна (РЖМат, 1954, 3627). Первое доказательство, данное автором, было неполным.

Л. Я. Окунев

199. О разложении полиномов с помощью конечного числа шагов. III. Крулль (Über Polynomzerlegung mit endlich vielen Schritten. III. Krull Wolfgang), Math. Z., 1954, 60, № 2, 109—111 (нем.)

Устанавливается связь между D-критерием М. Кнезера и A-критерием Крулля.

D-критерий Кнезера заключается в следующем: последовательность полей K_i обладает свойством (Z) в том и только в том случае, когда для всех целых D, отличных от 0 и 1, существует такая вычисляемая граница $\nu_0(D)$, что при $i > \nu_0(D)$ поле K_i не содержит подполя с дискриминантом D.

A-критерий Крулля формулируется так: последовательность полей K_i тогда и только тогда обладает свойством (Z), когда для всякого целого положительного числа $n > 1$ может быть определена система целочисленных полиномов $\varphi_{in}(u)$ $(i = 1, 2, \ldots, l(n))$ от n неизвестных $u_1, \ldots, u_n$, удовлетворяющая следующим условиям: для каждой пары чисел (n, M) $(n, M = 2, 3, \ldots)$ существует такая вычисляемая граница $\nu_0(n, M)$, что целочисленный полином $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$, неприводимый над K_0, будет при $\mu > \nu_0(n, M)$ приводим над K_μ, когда неравенство $|\varphi_{in}(a_1, \ldots, a_n)| > M$ удовлетворяется хотя бы для одного i из ряда чисел $1, \ldots, l(n)$.

Связь между A- и D-критериями обнаруживается с помощью следующей теоремы: Пусть граница $\nu_0^*(M)$ $(M = 2, 3, \ldots)$ такова, что при $i > \nu^*(M)$ всякое подполе $K \neq K_0$ поля K_i последовательности $K_1, K_2, \ldots$ обладает дискриминантом D, абсолютная величина которого больше M. Тогда можно указать такую систему полиномов $\varphi_{in}^*(u)$ $(i = 1, \ldots, l^*(n); n = 2, 3, \ldots)$, что для последовательности $K_1, K_2, \ldots$ будут выполняться условия A-критерия, причем $n(l) = n^*(l)$, $\varphi_{in}(u) = \varphi_{in}^*(u)$, $\nu_0(n, M) = \nu_0^*(M)$.

Л. Я. Окунев

200. О кубическом уравнении. Андерссон (Sur l'équation cubique. Andersson J.), Mathesis, 1954, 63, № 3—5, 102—104 (франц.)

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия того, чтобы три корня y_1, y_2, y_3 уравнения $y^3 - ay + b = 0$ с целыми коэффициентами были целые. Доказательство достаточности основано на теореме Жерардена (если $a^3 = \Delta_1^2 + 3(3b_1)^2$ и $(a, b, \Delta_1) = 1$, то существуют два целых числа s и t таких, что $\Delta_1 + 3b_1\sqrt{-3} = (s + t\sqrt{-3})^3$). Из доказательства достаточности одновременно вытекает способ нахождения целых корней уравнения $y^3 - ay + b = 0$, способ более рациональный, чем способ, основанный на изыскании делителей числа b, в особенности когда b большое число.

С. В. Огай

201. О свойствах и применениях перманентов. Гарсия-Прадильо (Sobre propiedades y aplicaciones de los permanentes. Garcia Pradillo Julio), Gac. mat., 1954, ser. 1, 6, № 1—2, 8—14 (исп.)

По данной квадратной матрице перманент строится так же, как детерминант, с тем лишь различием, что все члены берутся со знаком «плюс».

В реферируемой статье перечисляются (без доказательств) основные свойства перманентов, весьма сходные с соответствующими свойствами детерминантов. Кроме того, даются применения перманентов к некоторым простейшим задачам теории вероятностей и комбинаторики. Последняя из указанных задач такова: найти сумму $S_{n,h}$ всех произведений по h из n данных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; для $S_{n,h}$ установлена рекуррентная формула.

Г. Б. Гуревич

202. Детерминантное неравенство. Фань Цюй, Тодд (A determinantal inequality. Fan Ky, Todd John), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 1, 58—64 (англ.)

Пусть $p_{j_1 j_2 \ldots j_m}$ — комплексные числа, зависящие от m индексов j_k, $1 \leqslant j_k \leqslant n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, но не меняющиеся при любых перестановках этих индексов, $\Sigma_{j_1 < \ldots < j_m} p_{j_1 j_2 \ldots j_m} = P \neq 0$, и пусть $\bar{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, m векторов n-мерного унитарного пространства, причем миноры m-го порядка матрицы $A = \|a_{ik}\|$ отличны от нуля. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{G(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{m-1})}{G(\bar{a}_1, \ldots, a_m)} \leqslant \frac{1}{|P|^2} \times$$

$$\times \sum_{j_m=1}^{n} \left| \sum_{\substack{j_1 < \ldots < j_{m-1} \\ j_1, \ldots, j_{m-1} \neq j_m}} p_{j_1 j_2 \ldots j_m} \frac{A(j_1, j_2, \ldots, j_{m-1})}{A(j_1, j_2, \ldots, j_m)} \right|^2,$$

где G — определитель Грама, а $A(j_1, j_2, \ldots, j_l)$ — минор матрицы A, стоящий на пересечении столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_l$ и t первых строк.

Вначале доказывается частный случай при $p_{j_1 j_2 \ldots j_m} = 1$.

В. Г. Калагастов

203. О проблеме К. Царанкевича. Кёвари, Шош, Туран (On a problem of K. Zarankiewicz. Kövari T., Sós V. T., Turán P.), Colloq. math., 1954, 3, № 1, 50—57 (англ.)

Рассматривается квадратная матрица порядка n, составленная из нулей и единиц. Вопрос, поставленный Царанкевичем (Colloq. math., 1951, 2), следующий: каково минимальное число $k_j(n)$ элементов матрицы, равных единице, обеспечивающее существование минора порядка j $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$, состоящего только из единиц?

В статье дается асимптотическое решение проблемы для $j = 2$. Доказывается, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{k_2(n)}{n^{3/2}} = 1, \qquad (1)$$

а для любого j устанавливается неравенство

$$k_j(n) < 1 + jn + \left[(j-1)^j n^{\frac{2j-1}{j}} \right], \qquad (2)$$

где $[x]$ — целая часть x.

Кроме того, в случае прямоугольной матрицы, содержащей $n_1 = p(p+1)$ строк и $n_2 = p^2$ столбцов (p — простое), для $k_2(n_1, n_2)$ устанавливается точный минимум, равный $p^2(p+1) + 1$.

Неравенство (2) используется для решения следующей задачи. В системе из n точек пространства некоторые пары точек соединены отрезками (ребрами) так, что любые два ребра не пересекаются; каково должно быть наименьшее число $H_j(n)$ ребер, чтобы можно было выделить подсистему из $2j$ точек, распадающуюся на два класса по j точек в каждом так, что точки разных классов разъединены, а любые две точки одного и того же класса соединены ребрами. Доказывается, что

$$H_j(n) \leqslant 1 + \left[\frac{1}{2} k_j^*(n)\right], \qquad (3)$$

где через $k_j^*(n)$ обозначена правая часть неравенства (2).

А. Г. Школьник

204. Вычисления с таблицами. Хамминг (Rekenen met tabellen. Hamming G.), Landbouwkund. tijdschr., 1954, **66**, № 3, 151—165 (голл.; резюме англ.)

Элементарное (притом не всегда строгое) изложение основных фактов алгебры матриц. Статья представляет некоторый методологический интерес. При рассмотрении таких вопросов, как вырожденность и невырожденность матриц, ранг и дефект матриц и т. п., автор обходится без привлечения теории определителей, доказывая теорему о разложимости матрицы в произведение двух «треугольников», верхнего и нижнего. После этого, например, дефект матрицы определяется как число нулей на диагонали одного из сомножителей.

А. П. Ершов

205. О неотрицательных матрицах. Ван (On non-negative-valued matrices. Wong Y. K.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 2, 121—124 (англ.)

Рассматриваются $n \times n$ матрицы $A = (a_{ij})$ с неотрицательными элементами. Вводятся следующие обозначения: $S_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, $S_j = S_j^{(n)}$, $\| A \| = \max(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

Основная теорема. Если $S_j \leqslant 1$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, то эквивалентны следующие свойства: 1) матрица $I - A$ — неособенная; 2) матрица A эквивалентна матрице (т. е. может быть получена из нее при перестановке одних и тех же строк и столбцов), удовлетворяющей условию $S_k^{(k)} < 1$ при $k = 1, 2, \ldots, n$; 3) существуют $h < n$ и $e > 0$, для которых $\| (S_1, S_2, \ldots, S_n) A^h \| \leqslant e < 1$; 4) $\lim_q \| A^q \|^{\frac{1}{q}} < 1$; 5) матрица A эквивалентна матрице, удовлетворяющей условиям:

$$\sum_{i=1}^{k-1} S_i^{(k)} a_{ik} < 1 - a_{kk} \quad (k = 2, 3, \ldots, n), \quad a_{11} < 1.$$

Из этой теоремы следует: пусть λ_1 — наибольшее и простое характеристическое число ненильпотентной матрицы A, тогда

$$0 < \lambda_1 = \lim_q \| A^q \|^{\frac{1}{q}} = e^b, b = \inf_p [p^{-1} \log \| A^p \|] > -\infty.$$

Полученные результаты применяются для определения верхней и нижней границ матриц вида $\beta' A_*$, где $A_* = I + A + A^2 + \ldots + A^p + \ldots$, A удовлетворяет условиям основной теоремы, а β' — строчная матрица с неотрицательными элементами.

Х. Р. Сулейманова

206. Заметка о нормальных матрицах. Паркер (A note on normal matrices. Parker W. V.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 330—331 (англ.)

Доказывается следующее предложение: Пусть A — нормальная матрица (т. е. $AA^* = A^*A$), разбитая на клетки $A_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k$. Если характеристический полином матрицы A совпадает с произведением характеристических полиномов матриц $A_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k$, то все матрицы $A_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Г. Б. Гуревич

207. Об одном свойстве проектирующих матриц и его использовании для канонического представления функций от матрицы. Эгервари (On a property of the projector matrices and its application to the canonical representation of matrix functions. Egerváry E.), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 1—6 (англ.)

Для построения полной системы правых и полной системы левых собственных векторов (с. в.), образующих биортогональную систему (б. с.) для линейного преобразования A, минимальный полином которого имеет только различные корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$, автор предлагает предварительно вычислить полиномы Лагранжа $L_i(\lambda)$ (степень которых не превышает $s-1$), удовлетворяющие условиям: $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, s)$. Легко проверить, что линейное преобразование $P_i \equiv L_i(A)$ является проектором (т. е. $P_i^2 = P_i$), у которого пространство правых с. в. и пространство левых с. в. совпадают с соответствующими пространствами для A, принадлежащими собственному числу λ_i. Для нахождения б. с. векторов, определяющих эти собственные пространства, указывается вычислительный алгоритм, использующий определители не выше второго порядка (элементы матрицы линейного преобразования P_i принимаются за исходные данные этого алгоритма). Совокупность полученных указанным путем б. с. при $i = 1, 2, \ldots, s$ определит искомую б. с. для A.

А. М. Лопшиц

208. Осцилляционная теорема для алгебраической задачи о собственных значениях. Зинден (Ein Oszillationssatz für algebraische Eigenwertprobleme. Sinden Frank William), Z. angew. Math. und Phys., 1954, **5**, № 1, 86—88 (нем.)

Матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ называется уменьшающей число перемен знака, если при любом векторе x число перемен знака среди координат $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вектора $y = Ax$ не превосходит числа перемен знака для вектора x. Формулируется без доказательства основной результат.

Теорема. Пусть 1) $A = \| a_{ik} \|_1^n$ — симметрическая положительно определенная матрица, 2) все $a_{i,\,i+1} \neq 0$ и $a_{i-1,\,i} \neq 0$, 3) A уменьшает число перемен знака, 4) D — положительная диагональная матрица (все $d_{ii} > 0$); тогда в уравнении $Ax = \mu Dx$ все характеристические числа различны между собой и положительны $\mu_1 > \mu_2 > \ldots > \mu_n > 0$ и (в соответствии с этой нумерацией характеристических чисел) среди координат k-го собственного вектора имеется ровно $k-1$ перемен знака $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Примечание референта. Этот результат не является новым. Из теоремы Шенберга и критерия осцилляционности сразу следует, что матрица A, удовлетворяющая условиям теоремы, является осцилляционной; характеристические же числа и собственные векторы осцилляционной матрицы обладают теми свойствами, о которых идет речь в теореме. Замена матрицы D на единичную матрицу не нарушает общности рассуждений (Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2-е, М., 1950, стр. 105, 120, 298; см. также Compositio math., 1937, **4**, 445—476).

Ф. Р. Гантмахер

209. О приведении матриц к диагональной форме. Эпстейн, Фландерс (On the reduction of a matrix to diagonal form. Epstein Marvin,

Flanders Harley), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 168—171 (англ.)

Устанавливается критерий возможности приведения матрицы A с элементами из поля F характеристики 0 к диагональному виду в некотором расширении поля F. В этом критерии используются лишь элементы самого поля F, но не его расширения.

Степенью матрицы называется степень ее минимального многочлена, $S(X)$ — обозначение следа матрицы X.

Теорема. Матрица A степени s с элементами из поля F может быть приведена к диагональному виду в некотором расширении поля F тогда и только тогда, когда детерминант $|S(A^{i+j})|_{i,\,j=0}^{s-1}$ отличен от нуля.

Приводятся два доказательства теоремы, одно из которых элементарно, а второе существенно опирается на теорию полупростых алгебр. Я. Л. Шмульян

210. Распространение нормальной теории на общие матрицы. Ламберт (Extension of normal theory to general matrices. Lambert Robert J.), Iowa State Coll. J. Sci., 1953, **27**, № 2, 206—207 (англ.)

Неособенную вещественную матрицу A с различными собственными значениями автор называет общей (general). Для каждой общей матрицы A порядка n существует такой вещественный полином $p(A)$ степени не выше $n-1$, определяемый однозначно, и такая положительно определенная эрмитова матрица J, что $JAJ^{-1} = p(A')$.

Матрица $p(A)$ играет по отношению к A такую же роль, как сопряженно-транспонированная по отношению к нормальной матрице. Так, собственные значения матриц $A + p(A)/2$, $A - p(A)/2$ и $Ap(A)$ являются соответственно вещественными частями, мнимыми частями и квадратами модулей собственных значений матрицы A. Знание $p(A)$ позволяет проводить вычисление собственных значений матрицы A при помощи алгебраических операций в поле вещественных чисел.

Полином $p(A)$ характеризуется соотношением $p(\Lambda)=\Lambda$, где Λ — диагональная форма матрицы A.

Пусть $R(A)$ — алгебра всех вещественных полиномов от A. Совокупность матриц из $R(A)$, все собственные значения которых вещественны, образует подалгебру $H(A)$. Полином $p(A)$ обладает свойством $p[p(A)] = A$. Инволюционный автоморфизм $A \leftrightarrow p(A)$ есть единственный, кроме тождественного, автоморфизм алгебры $R(A)$, относительно которого $H(A)$ поэлементно-инвариантна.

Показано, что $p(A)$ выражается через элементы идемпотентного базиса подалгебры $H(A)$ и разработан метод построения этого базиса, что дает способ фактического нахождения полинома $p(A)$.

Работа содержит лишь перечень результатов, доказательства и пояснения отсутствуют. В. К. Иванов

211. Свойства и мультипликативные представления матриц, определяемые с помощью операции псевдотранспонирования. Кац, Олкин (Properties and factorizations of matrices defined by the operation of pseudo-transposition. Katz Leo, Olkin Ingram), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 331—337 (англ.)

Операция «псевдотранспонирования» переводит $n \times n$-матрицу $C \equiv \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$, где C_1 есть $p \times p$-, а C_4 есть $q \times q$-матрица и $p + q = n$, в матрицу $C^0 \equiv \begin{pmatrix} C_1' & -C_3' \\ -C_2' & C_4' \end{pmatrix}$. P называется псевдосимметрической, псевдокососимметрической, псевдоортогональной, если выполняются соответственно равенства: $P^0 = P$, $P^0 = -P$; $PP^0 = E$. Ограничиваясь матрицами с вещественными элементами, авторы дают алгебраические доказательства теорем (аналогичных известным теоремам) о мультипликативном представлении псевдоортогональной и псевдокососимметрической матрицы. Доказывается следующая теорема, аналогичная теореме Теплица: Пусть $A \equiv \begin{pmatrix} B & C \\ -C' & D \end{pmatrix}$, где $B' = B$, $D' = D$, B — положительно определенная, $(D + C'B^{-1}C)$ — положительно полуопределенная; тогда $A = TT^0$, где T — нижняя треугольная матрица, диагональные элементы которой не отрицательны. Если же $(D + C'B^{-1}C)$ — положительно определенная матрица, то диагональные элементы положительны, а такое мультипликативное представление однозначно. Отметим, что результаты авторов естественно включаются в теорию линейных преобразований в псевдоунитарных пространствах (Мальцев А. И., Основы линейной алгебры, ОГИЗ, 1948, гл. X). А. М. Лопшиц

212 К. Основы линейной алгебры. Лопатинский Я. Б. Львов, Изд-во Львовского гос. ун-та им. Франко, 1954, 93 стр., 3 руб.

1. Предмет линейной алгебры. Решение линейных систем, преобразования квадратичных форм к каноническому виду, алгебра матриц и, как основа их объединения, теория линейных пространств. 2. Алгебраические операции. Группы. Кольца. Поля. Линейные операции. Линейные уравнения в общей форме. 3. Матрицы, действия с ними. 4. Линейные уравнения с коэффициентами из евклидова кольца. Приведение матрицы системы к диагональной форме с помощью элементарных операций. Элементарные делители. Условия эквивалентности матриц. 5. Векторное пространство над коммутативным полем. Линейная зависимость, базис, размерность, изоморфизм, линейные операторы и матрицы. Собственные векторы. Приведение матрицы оператора к канонической форме в комплексном и вещественном поле. 6. Евклидово пространство. Сопряженные операторы. Приведение матриц самосопряженных и ортогональных операторов к каноническим формам.

Г. Е. Шилов

ГРУППЫ

213. Частичные эндоморфизмы конечных групп. Нёйман, Нёйман (Partial endomorphisms of finite groups. Neumann B. H., Neumann Hanna), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 4, 434—440 (англ.)

Частичным эндоморфизмом группы G называется гомоморфное отображение μ подгруппы A этой группы на подгруппу B той же группы. Частичный эндоморфизм μ_1 надгруппы G_1 группы G называется распространением μ, если при μ_1 надгруппа A_1 группы A гомоморфно отображается на подгруппу группы G_1, причем для элементов A μ_1 совпадает с μ. Частичный эндоморфизм μ называется вполне распространяемым, если существует надгруппа G^* группы G, обладающая полным эндоморфизмом μ^*, являющимся распространением μ.

Доказывается теорема: Если частичный эндоморфизм μ конечной группы G является вполне распространяемым, то в качестве соответствующей надгруппы G^* может быть подобрана конечная группа.

При доказательстве этой теоремы используются свойства совокупностей, называемых частичными группоидами; это системы, в которых определена бинарная операция, называемая умножением и обладающая следующим свойством: если a и b — элементы системы, то произведение ab может быть определено или нет; если оно определено, то является единственным элементом той же системы. В аддитивной записи такие системы были рассмотрены (под названием add) Бэром (Baer R.,

Amer. J. Math., 1949, **71**, 706—742). Взаимнооднозначный гомоморфизм частичного группоида в другой (в частности, в группу) называется вложением. Доказывается следующая «лемма о конечности»: Пусть Π — частичный группоид, который может быть вложен в конечную группу P'; пусть φ — гомоморфизм Π в конечную группу P. Тогда имеется такое вложение χ частичного группоида Π в конечную группу Q и такой гомоморфизм η группы Q в P, что $\varphi = \chi\eta$.

В. К. Туркин

214. О соотношении между типом и рангом конечной группы. Цитароза (Sulla relazione tra il tipo ed il rango di un gruppo finito. Zitarosa Antonio), Boll. Unione mat. ital., 1954, 9, № 2, 164—167 (итал.)

Доказывается, что между типом τ и рангом ρ конечной группы в случае $\rho \geqslant 2$ имеет место соотношение $\tau + 2 \geqslant 2^{\rho+1} + \rho - 1$.

Это неравенство является усилением аналогичных формул, выведенных ранее Цаппа (G. Zappa).

Кроме того, на примере группы, определяемой соотношениями $b^{2^m} = 1$, $a^{2^n} = b^{2^s}$, $a^{-1}ba = b^{1+2^x}$ (m, n, s — целые положительные числа; $s \leqslant m$; $x = 2^r k$, где k — нечетное, $s + r + 1 \geqslant m$; $r \geqslant 1$; $n + r + 1 \geqslant m$), доказана справедливость предположения Цаппа о том, что существуют группы, для которых $\tau + 2 = 3(2^\rho - 1)$.

В. К. Туркин

215. Две теоремы о группах, порождаемых конечным числом образующих. Шенкман (Two theorems on finitely generated groups. Schenkman Eugene), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 3, 497—498 (англ.)

Пусть $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ — коммутатор элементов a и b группы G. Устанавливаются следующие результаты:

1. Если группа G порождается конечной подгруппой A и элементом b конечного порядка, причем $[[a, b], b] = e$ для любого $a \in A$, то G — конечная группа.

2. Если группа G порождается конечным множеством образующих $b_1, b_2, \ldots, b_n$, причем $[[g, b_i]\, b_i] = e$ для каждого $g \in G$ и для $i = 1, 2, \ldots, n$, то G — нильпотентная группа класса k, где $k \leqslant n$. Если все b_i имеют конечный порядок, то G — конечная группа.

Из последнего утверждения непосредственно следует известный результат Бернсайда: Если группа G порождается конечным множеством образующих и порядок каждого ее элемента равен 3, то G — конечная группа.

А. П. Диман

216. Плетизм S-функций. Фаулкс (Plethysm of S-functions. Foulkes H. O.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, A246, № 920, 555—593 (англ.)

Матрица $T(A)$ называется инвариантной матрицей от матрицы A (в смысле Шура), если: 1) элементы $T(A)$ являются многочленами от элементов A; 2) $T(A) \cdot T(B) = T(AB)$. След неприводимой инвариантной матрицы $T(A)$, т. е. неприводимого представления полной линейной группы, является S-функцией (РЖМат, 1955, 2115) характеристических корней матрицы A.

Пусть $A^{[\lambda]} = A^{[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p]}$ — инвариантная матрица со следом $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p\}$. Как известно, инвариантная матрица от инвариантной матрицы $[A^{[\lambda]}]^{[\mu]}$ может быть выражена в виде прямой суммы неприводимых инвариантных матриц:

$$[A^{[\lambda]}]^{[\mu]} = \sum k_{\lambda\mu\nu} [A^{[\nu]}]. \qquad (1)$$

Плетизм S-функций $\{\lambda\}$ и $\{\mu\}$ определяется, исходя из (1), следующим образом: $\{\lambda\} \otimes \{\mu\} = \Sigma k_{\lambda\mu\nu} \{\nu\}$ (Littlewood D. E., The theory of group characters, 2-nd ed., Oxford, 1950).

В реферируемой статье дан эффективный метод определения коэффициента $k_{\lambda\mu\nu}$ любой S-функции $\{\lambda\}$ в плетизме $\{m\} \otimes \{\mu\}$, где (μ) — разбиение числа 4 на неотрицательные слагаемые, а m — натуральное (т. е. (m) состоит из единственного слагаемого). Доказано равенство коэффициентов некоторых S-функций в $\{m\} \otimes \{\mu\}$, когда m — натуральное, а (μ) — разбиение произвольного натурального числа.

Существенно использованы введенные автором (J. London Math. Soc., 1949, 24, 136—143) дифференциальные операторы D_λ, связанные с S-функциями.

Л. М. Глускин

217. Обобщение диаграммы Юнга. Барроу (A generalization of the Young diagram. Burrow M. D.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 4, 498—508 (англ.)

Доказывается следующая лемма 1: Пусть θ и φ — представления первой степени соответственно подгруппы R и C конечной группы G. Если элемент $s \in G$ принадлежит подгруппе CR в том и только в том случае, когда $\theta(r) = \varphi(c)$ для любой пары элементов $r \in R$, $c \in C$, удовлетворяющих условию $srs^{-1} = c$, то $e = PN$ является примитивным идемпотентом группового кольца группы G, где $P = \Sigma_{r \in R} r\theta(r)$, $N = \Sigma_{c \in C} c\varphi(c)$. Условие леммы 1 выполняется тогда и только тогда, когда представления группы G, индуцированные представлениями первой степени подгрупп R и C, имеют одну и только одну общую неприводимую компоненту, входящую в каждое из этих индуцированных представлений лишь по одному разу. Вводится формула для характеров неприводимого представления, соответствующего примитивному идемпотенту $e = PN$.

Полученные результаты применяются к изучению неприводимых представлений группы $GL(2, q)$. В работах Штейнберга (Steinberg R., Canad. J. Math., 1951, 3, 225—235, Trans. Amer. Math. Soc., 1951, 71, 274—282) было показано, что группа $GL(2, q)$ имеет следующие неприводимые представления: а) $q - 1$ представлений степени 1, б) $q - 1$ представлений степени q, в) $\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$ представлений степени $q + 1$ и г) $\frac{1}{2}q(q-1)$ представлений степени $q - 1$.

Подобрав подгруппы R и C группы $GL(2, q)$, удовлетворяющие условию леммы 1, автор выписывает примитивные идемпотенты, соответствующие неприводимым представлениям группы $GL(2, q)$ для случаев а), б) и в), и базисы полных матричных алгебр степеней q и $q + 1$, входящих в разложение группового кольца группы $GL(2, q)$.

Автор отмечает, что ему не удалось подобрать подгруппы, удовлетворяющие условию леммы 1, с помощью которых можно было бы найти примитивные идемпотенты, соответствующие неприводимым представлениям группы $GL(2, q)$ степени $q - 1$.

Е. Г. Шульгейфер

218. Представление композиции конечных групп комплексами отрезков. Келлер (Eine Darstellung der Komposition endlicher Gruppen durch Streckenkomplexe. Keller Ott-Heinrich), Math. Ann., 1954, 128, № 3, 177—199 (нем.)

Развивается известная теорема Жордана — Гельдера о композиционных рядах. Под псевдопростой группой понимается либо простая, либо p-группа. Нормальный ряд, факторы которого псевдопростые, называется псевдокомпозиционным, а его факторы — композиционными факторами.

Пусть в псевдокомпозиционном ряду

$$G \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset G_{i+2} \supset \ldots \supset E \qquad (1)$$

G_{i+2} — нормальный делитель G_i, G_i/G_{i+2} — прямое произведение, один из множителей которого есть

$F_{i+1} = G_{i+1}/G_{i+2}$. Если G_i/G_{i+2} не p-группа, то другой множитель $\overline{F}_{i+1} = \overline{G}_{i+1}/G_{i+2}$ определяется однозначно. Образуем псевдокомпозиционный ряд

$$G \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+1} \supset G_{i+2} \supset \ldots \supset E. \qquad (2)$$

Фактор-группы F_{i+1} и $\overline{F}_i = G_i/\overline{G}_{i+1}$, F_i и $\overline{F}_{i+1}$ изоморфны. В этом случае говорят, что ряды (1) и (2) получаются один из другого перестановкой факторов F_i и F_{i+1}, а факторы F_i и F_{i+1} называются перестановочными в ряду (1). Если же G_i/G_{i+2} является p-группой, то говорят, что в псевдокомпозиционном ряду

$$G \supset \ldots \supset G_i \supset G_{i+2} \supset \ldots \supset E \qquad (3)$$

фактор G_i/G_{i+2} возникает склеиванием факторов F_i и F_{i+1} ряда (1). Переход от ряда (3) к ряду (1) рассматривается как расщепление фактора G_i/G_{i+2}.

Доказывается, что два псевдокомпозиционных ряда группы G могут быть получены один из другого последовательностью перестановок соседних композиционных факторов, склеиванием двух p-групп в одну, расщеплением одной p-группы на два композиционных фактора. Установлено, что склеивание и расщепление не мешает перестановочности факторов (теоремы 3,4) и что перестановочность двух композиционных факторов может быть определена независимо от их места в композиционном ряду (теоремы 5—11).

Каждому композиционному фактору F поставим в соответствие точку $P(F)$, соединим ее векторами со всеми точками $P(F_i)$, соответствующие композиционные факторы F_i которых стоят в каком-либо псевдокомпозиционном ряду справа (но не слева) от F, причем эти векторы имеют конец в точке $P(F)$, а начало в $P(F_i)$. Более детально разработана конструкция комплекса отрезков для неплотной группы. Под неплотной группой понимается группа, у которой каждый псевдокомпозиционный ряд является композиционным.

Сечением в множестве точек комплекса отрезков называется такое его разбиение на нижний и верхний классы, что:

1. Если конец вектора принадлежит нижнему классу, то и начало его также принадлежит этому классу.
2. Если начало вектора принадлежит верхнему классу, то и конец его также принадлежит этому классу.

Каждому сечению в множестве точек комплекса отрезков отвечает субинвариантная подгруппа (Wielandt H., Math. Z., 1939, 45, 209—244). Последовательность сечений в множестве точек комплекса отрезков, упорядоченная по включению нижних классов, между двумя соседними членами которой нельзя вставить нового сечения, определяет в группе композиционный ряд. Таким образом можно получить все композиционные ряды. Указаны условия, при которых такого рода последовательности сечений отвечают главный или характеристический ряды.

В конце работы делается попытка перенести указанные результаты на более широкий класс групп.

Н. Ф. Сесекин

219. **Конечные унитарные группы отражений. Шепард, Тодд** (Finite unitary reflection groups. Shephard G. C., Todd J. A.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 2, 274—304 (англ.)

Исследуются свойства конечных групп $\mathfrak{G}$, порождаемых отражениями в унитарном пространстве U_n (понятие о таких группах введено в работе Шепарда «Unitary groups generated by reflections» (РЖМат, 1954, 3242)).

Фактор-группа $\mathfrak{G} : \mathfrak{Z}$, где $\mathfrak{Z}$ — подгруппа, состоящая из всех скалярных матриц группы $\mathfrak{G}$, изоморфна группе $\mathfrak{G}'$ коллинеаций в проективном пространстве S_{n-1}. Исследование свойств группы $\mathfrak{G}$ производится путем рассмотрения соответствующей группы $\mathfrak{G}'$.

В первой части работы определены все типы неприводимых групп $\mathfrak{G}$ (приводимые $\mathfrak{G}$ являются прямыми произведениями своих неприводимых компонентов). Если неприводимая группа imprimitивна, то она совпадает с группой мономиальных преобразований $x_i' = \theta^{\nu_i} x_{\sigma(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где θ — первообразный корень степени m из 1 и $\Sigma\nu_i \equiv 0 \pmod{p}$; здесь m — целое положительное число, большее чем 1; p — делитель m. Такая группа обозначается авторами через $G(m, p, n)$ и имеет порядок, равный $m^n \cdot n!/p$; она является группой симметрий одного вида комплексных политопов. Примитивная неприводимая группа $\mathfrak{G}$ в случае $n = 1$ является циклической. При $n > 1$ к примитивным неприводимым $\mathfrak{G}$ принадлежит симметрическая группа подстановок степени $n + 1$. Кроме того, при различных значениях n от 2 до 8 имеются 34 различные примитивные неприводимые группы $\mathfrak{G}$ порядков от 24 до $192 \cdot 10!$; бóльшая часть этих групп также связана с группами симметрии политопов.

Вторая часть работы посвящена исследованию различных свойств групп $\mathfrak{G}$. Доказано, что конечная (порядка g) группа унитарных преобразований n переменных является группой $\mathfrak{G}$ в том и только в том случае, если у этой группы имеется система n алгебраически независимых инвариантных форм $I_1, I_2, \ldots, I_n$ степеней $m_1 + 1$, $m_2 + 1, \ldots, m_n + 1$, причем $\Pi_{i=1}^{n}(m_i + 1) = g$. Числа m_i называются экспонентами группы. Этому необходимому и достаточному условию можно придать также следующий вид: группа должна иметь такую, называемую базисом, систему n алгебраически независимых инвариантных форм, что всякая инвариантная форма группы выражается в виде полинома через формы, входящие в базис. Число элементов группы $\mathfrak{G}$, оставляющих инвариантным какое-либо $n - k$-мерное линейное многообразие, равно коэффициенту при t^k в выражении $\Pi_{i=1}^{n}(1 + m_i t)$. Если группа $\mathfrak{G}$ неприводимая и порождена n отражениями в U_n, то эти отражения можно выбрать таким образом, что характеристические корни их произведения будут равны числам

$$e^{\frac{2\pi i m_r}{h}} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где h — наибольшее из чисел $m_i + 1$.

В заключение приведены определяющие соотношения для рассмотренных типов групп. В. К. Туркин

220. **Автоморфизмы, порожденные классом поднормальных подгрупп. Хаймо** (Automorphisms generated by a class of subnormal subgroups. Haimo Franklin), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 349—353 (англ.)

Пусть $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_k$ — нормальная цепочка подгрупп группы G, $Z_0 = 1 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots$ — верхняя центральная цепь G и пусть $G_k \supset Z_j$.

Рассматривается группа $\Gamma(j, k)$ всех автморфизмов G, которые порождают единичный автоморфизм в каждой из фактор-групп: G_i/G_{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, k = 1)$, G_k/Z_j и Z_s/Z_{s-1} $(s = 1, 2, \ldots, j)$.

Теорема 1. Если центры групп G_i $(i = 1, 2, \ldots, k - 1)$ содержатся в G_k, то $\Gamma(0, k)$ — нильпотентная группа класса $n \leqslant k$.

Теорема 2. Пусть подгруппы $G_1, G_2, \ldots, G_k$ имеют ту же самую верхнюю центральную цепь, что и группа G, и пусть $Z = UZ_s$ — гиперцентр G. Если автоморфизм α группы G индуцирует единичные автоморфизмы групп G_i/G_{i+1} $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, G_k/Z_j и Z, то α порождает тождественный автоморфизм в фактор-группе G/Z_{j+k}.

Теорема 3. Группа $\Gamma(j, k)$ n-ступенно разрешима и $n \leqslant j + k$.

Последний результат не нов и является частным случаем одного более общего результата Л. А. Калужнина (РЖМат, 1955, 91). Д. М. Смирнов

221. **О нильпотентных группах и кольцах Ли. Лазар** (Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. Lazard Michel), Ann. scient. Ecole norm. supér., 1954, 71, № 2, 101—190 (франц.)

Исследуются связи между N-группами (группы с убывающими центральными рядами) и кольцами Ли. С каждой N-последовательностью в группе связывается некоторое кольцо Ли. При этом существенную роль играет метод фильтрации (РЖМат, 1955, 4895). Большая часть работы посвящена подробным доказательствам результатов, ранее опубликованных без доказательств (РЖМат, 1954, № 1563; 1955, №№ 4895, 4896). Приводится чисто алгебраическое доказательство теоремы А. И. Мальцева о пополнении локально нильпотентных групп без кручения. И. Б. Плоткин

222. **Об одном классе периодических групп. Сесекин Н. Ф., Старостин А. И.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 225—228

Известно (Zassenhaus H., Lehrbuch der Gruppentheorie, 1937, 1), что конечная группа, все силовские подгруппы которой циклические, является полупрямым произведением циклических подгрупп взаимно простых порядков. В работе этот результат переносится на локально конечные группы, все силовские подгруппы которых локально циклические (такие группы авторы называют Ц-группами). Доказывается, что Ц-группа G разложима в полупрямое произведение двух локально циклических подгрупп: $G = G' \times B$, порядки элементов которых взаимно просты; G' — коммутант группы G. Доказывается также, что всякая группа, разложимая в полупрямое произведение двух своих локально циклических, периодических подгрупп, порядки элементов которых взаимно просты, является Ц-группой П. А. Гольберг

223. **О нильрадикале группы. Плоткин Б. И.,** Докл. АН СССР, 1954, 98, № 3, 341—343

Нильрадикалом группы называется ее максимальный локально нильпотентный нормальный делитель.

Элемент $g \in G$ называется нильэлементом, если для любого $h \in G$ найдется такой номер k, что сложный коммутатор $(g, (g, \ldots, (g, h)\ldots))$ длины $\geqslant k$ равен единице. Известно (РЖМат, 1954, 1565), что в конечной разрешимой группе нильрадикал совпадает со множеством всех нильэлементов группы. В реферируемой работе это предложение распространяется на группы, обладающие возрастающим нормальным разрешимым рядом, а также на локально разрешимые группы. В. М. Глушков

224. **Характеристически простая группа. Мак-Лейн** (A characteristically-simple group. Mc Lain D. H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 4, 641—642 (англ.)

Приводятся примеры локально конечных p-групп и групп без кручения, не имеющих собственных характеристических подгрупп.

Конструкция автора является некоторой модификацией примера, приведенного в работе референта (Докл. АН СССР, 1943, 40). И. Д. Адо

225. **Фактор-пространства разрешимых групп. Мостов** (Factor spaces of solvable groups. Mostow G. D.), Ann. Math., 1954, 60, № 1, 1—27 (англ.)

Разрешимым многообразием называется однородное пространство G/S, где G — разрешимая группа Ли и S — ее замкнутая подгруппа. Изучается топология разрешимых многообразий. Случай, когда группа G нильпотентна, был исследован Мальцевым (Изв. АН СССР, 1949, 13, № 1, 10—32). Два разрешимых компактных многообразия, имеющие изоморфные фундаментальные группы, гомеоморфны. Эта теорема является обобщением на разрешимые группы соответствующего результата Мальцева. Компактное разрешимое многообразие, имеющее коммутативную фундаментальную группу, является тороидом.

Для любого разрешимого многообразия существует прямое произведение некоторого компактного разрешимого многообразия и евклидова пространства, образующее конечнолистное регулярное накрытие данного многообразия. Если группа G нильпотентна, то, как показал Мальцев, G/S гомеоморфно прямому произведению компактного нильпотентного многообразия и евклидова пространства.

Пусть S — замкнутая подгруппа Ли, S^c — ее связная компонента единицы. Пусть далее существует подгруппа R (не обязательно замкнутая) такая, что

1) $S = R \cdot S^c$;

2) преобразование присоединенного представления группы G, соответствующее элементу из подгруппы R, является экспоненциалом инфинитезимального присоединенного преобразования.

Тогда подгруппа S называется алгебраически связываемой в G.

Для разрешимых многообразий G/S с алгебраически связываемой в G подгруппой S предыдущая теорема усиливается. Такое разрешимое многообразие является произведением компактного разрешимого многообразия и евклидова пространства.

Перечисленные теоремы доказываются довольно сложно с использованием результатов цитированной работы Мальцева и теории косых произведений (Стинрод Н., Топология косых произведений, М., 1953). Из многочисленных вспомогательных теорем, доказанных автором, приведем следующую.

Пусть S — замкнутая равномерная подгруппа (т. е. G/S компактно) разрешимой группы Ли G, не содержащая нетривиальных аналитических нормальных делителей группы G; N — аналитическая подгруппа, соответствующая максимальному нильпотентному идеалу алгебры Ли группы G. Тогда SN замкнута, и максимальная аналитическая подгруппа подгруппы S принадлежит N. Г. И. Кац

226. **Группы с системами дополняемых подгрупп. Черников С. Н.,** Матем. сб., 1954, 35, № 1, 93—128

Без доказательств результаты этой работы были опубликованы ранее (РЖМат, 1954, 2868; там же см. определения используемых ниже понятий).

Помимо результатов, изложенных в реф. 2868, необходимо отметить также следующее:

1. Если группа $\mathfrak{G}$, обладающая возрастающим нормальным рядом с полными абелевыми фактор-группами, факторизуема относительно системы своих полных абелевых подгрупп, то она сама является полной абелевой группой.

2. Если в группе $\mathfrak{G}$, обладающей центральными множествами, дополняемы все члены хотя бы одного из них, то она коммутативна.

Отсюда, в частности, вытекает, что локально нильпотентная группа, в которой дополняем каждый нор-

мальный делитель, является прямым произведением элементарных абелевых групп. Н. В. Черникова

227. О свойствах симметрии степеней представлений двумерной унимодулярной унитарной группы. Мурнаган (On the symmetry properties of powers of representations of the two-dimensional unimodular unitary group. Murnaghan Francis D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **40**, № 9, 822—825 (англ.)

Пусть $\{m\}$ — неприводимое $m+1$-мерное представление двумерной унимодулярной унитарной группы. Кронекерова степень $\{m\}^k$ этого представления, как известно, разлагается на сумму конституэнтов — представлений (вообще говоря, приводимых), обозначаемых через $\{m\}\otimes(\lambda)$, где $(\lambda)=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ есть какое-либо разбиение числа k на сумму целых положительных слагаемых. В работе приведена таблица разложений представлений $\{m\}\otimes(\lambda)$ для значений $k\geqslant 2$, $mk\leqslant 20$, на суммы неприводимых представлений. При построении таблицы использованы полученные автором формулы $\{m\}\otimes k=(\{m-2\}\otimes k)+(\{m-1\}\otimes k-1)\times\times(\{m+k-1\}-\{m+k-3\})+(\{m\}\otimes k-2)$; $\{m\}\otimes 1^k=\{m-k+1\}\otimes k$.

Указывается на значение полученных формул для спектроскопии. В. К. Туркин

228. Об унитарных лучевых представлениях непрерывных групп. Баргман (On unitary ray representations of continuous groups. Bargmann V.), Ann. Math., 1954, **59**, № 1, 1—46 (англ.)

Лучом операторов $\mathbf{U}$ в комплексном гильбертовом пространстве H называется совокупность операторов вида τU, где U — унитарный оператор и τ — комплексное число, $|\tau|=1$. Некоторые вопросы квантовой механики приводят к рассмотрению унитарных лучевых представлений непрерывных групп, т. е. соответствий $r\to\mathbf{U}_r$ между элементами r группы G и лучами операторов $\mathbf{U}_r$, удовлетворяющих некоторым требованиям непрерывности и такими, что $\mathbf{U}_{rs}=\mathbf{U}_r\cdot\mathbf{U}_s$. Если выбрать в каждом луче операторов $\mathbf{U}_r$ представитель U_r, то $U_{rs}=\omega(r,s)U_rU_s$, где $\omega(r,s)$ — комплексное число такое, что $|\omega(r,s)|=1$. При этом

$$\omega(r,s)\,\omega(r,s,t)=\omega(s,t)\,\omega(r,st). \qquad (A)$$

Как показал Уигнер (Wigner E. P., Ann. Math., 1939, **40**, 149—204), из непрерывности лучевого представления следует возможность выбора представителей U_r для всех r из некоторой окрестности единицы V группы G так, что для любого вектора $f\in H$ $U_rf\to U_sf$ при $r\to s$ (в смысле сильной сходимости). Каждая непрерывная функция $\omega(r,s)$, определенная в некоторой окрестности единицы V, принимающая комплексные значения такие, что $|\omega(r,s)|=1$, и удовлетворяющая уравнению (A), называется локальным фактором группы G. Локальному фактору $\omega(r,s)$ соответствует локальный показатель $\xi(r,s)$ такой, что $\omega(r,s)=\exp(\xi(r,s))$. Локальные показатели удовлетворяют линейному функциональному уравнению.

Изучение локальных факторов связано с исследованием алгебры Ли $\mathfrak{G}$ группы G. Для n-мерной группы Ли G полная система неэквивалентных локальных показателей дается линейными комбинациями $\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\xi_k$ (γ_k — постоянные) m соответственно выбранных локальных показателей $\xi_k(r,s)$, где $m\leqslant\frac{1}{2}n(n-1)$ (два локальных фактора $\omega(r,s)$ и $\omega'(r,s)$ называются эквивалентными, если существует функция $\varphi(r)$ такая, что $|\varphi(r)|=1$ и $\omega'(r,s)=\varphi(r)\varphi(s)\omega(r,s)/\varphi(r,s)$). Указаны дифференциальные уравнения, из которых можно найти локальные показатели. Вообще говоря, локальные показатели нельзя расширять до показателей, определенных на всей группе G' (компоненте единицы группы G). Это возможно, если группа G' односвязна. Поэтому совокупность локальных факторов группы G' совпадает со множеством унитарных лучевых представлений ее универсальной накрывающей группы G^*. Если все локальные показатели группы G эквивалентны нулю, то каждому унитарному лучевому представлению G соответствует обычное представление G^* (для группы G' это уже не имеет места; например, существуют двузначные представления группы вращений). Знание всех факторов $\omega(r,s)$ позволяет сводить изучение лучевых представлений к изучению обычных представлений, так как операторы $e^{i\theta}U_r$, содержащиеся во всех лучах операторов U_r данного лучевого представления, образуют группу и определяют представление группы H, определяемой G^* и показателями ξ_k (H является расширением G^*, т. е. $G^*=H/T$, где T — центральная однопараметрическая подгруппа H). Указаны приложения теории к некоторым группам, представляющим интерес для квантовой механики (группе галилеевых преобразований, группе Лоренца, группе де Ситтера и др.). Показано, что каждый локальный показатель полупростой группы Ли эквивалентен нулю, что каждое непрерывное лучевое представление компактной связной абелевой группы Ли индуцируется обычным ее представлением и что каждое непрерывное лучевое представление компактной связной группы Ли индуцируется представлением компактной накрывающей группы. Н. Я. Виленкин

229. О полупростых подгруппах полупростых групп Ли. Карпелевич Ф. И., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 196

Пусть $\mathfrak{G}$ — полупростая вещественная группа Ли и $\mathfrak{K}$ — ее максимальная компактная подгруппа. Э. Картан показал, что существует такое множество $\mathfrak{T}\subset\mathfrak{G}$, гомеоморфное евклидову пространству, что любой элемент $g\in\mathfrak{G}$ однозначно представим в виде $g=kt$, где $k\in\mathfrak{K}$, $t\in\mathfrak{T}$. Множество $\mathfrak{T}$ называется дополнением к подгруппе $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}$.

Пусть $\tilde{\mathfrak{G}}$ — полупростая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, $\tilde{\mathfrak{K}}$ — ее максимальная компактная подгруппа и $\tilde{\mathfrak{T}}$ — дополнение к $\tilde{\mathfrak{K}}$ в $\tilde{\mathfrak{G}}$. Основную роль в докладе играет теорема: Существует максимальная компактная подгруппа $\mathfrak{K}$ группы $\mathfrak{G}$ такая, что $\tilde{\mathfrak{K}}\subset\mathfrak{K}$ и $\tilde{\mathfrak{T}}\subset\mathfrak{T}$, где $\mathfrak{T}$ — дополнение к $\mathfrak{K}$ в $\mathfrak{G}$.

Эта теорема допускает эквивалентную формулировку в терминах геометрии симметрического однородного пространства $\mathfrak{E}=\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$.

Основная теорема и картановская теория вещественных форм позволяют провести классификацию вещественных полупростых подалгебр вещественных полупростых алгебр Ли. Докладчик отмечает также следствие основной теоремы: однородное пространство $\mathfrak{M}=\mathfrak{G}/\tilde{\mathfrak{G}}$ является косым произведением с базой $\mathfrak{N}=\mathfrak{K}/\tilde{\mathfrak{K}}$ и слоем, гомеоморфным евклидову пространству. А. Л. Онищик

230. Несуществование некоммутативных однопараметрических формальных групп Ли. Лазар (La non-existence des groupes de Lie formels non abéliens à un paramètre. Lazard Michel), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 16, 942—945 (франц.)

Рассматривается коммутативное кольцо K, обладающее единицей и не содержащее нильпотентных элементов, и алгебра A формальных степенных рядов без постоянного члена: $A\subset K[x,y,z]$.

Пусть $f(x,y)=\Sigma a_{ik}x^iy^k\in A$ такой, что 1) $f(x,f(y,z))=f(f(x,y),z)$, 2) $a_{10}=a_{01}=1$.

Из последнего условия вытекает, что уравнения $f(x, v) = u$ и $f(v, x) = u$ разрешимы в A при любых $u, v \in A$. Операция *: $u * v = f(u, v)$, $u, v \in A$, превращает A в «формальную однопараметрическую группу». Доказано, что полученная таким образом группа коммутативна. Ф. А. Березин

231. О максимальных приводимых подгруппах простых вещественных групп Ли. Мушиц Н. П., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 2, 195—204

Пусть R — одна из комплексных линейных классических групп A_n, B_n, C_n, D_n и пусть $Q(\xi, \eta)$ — невырожденная эрмитова форма. Множество G всех матриц из R, оставляющих $Q(\xi, \eta)$ инвариантной, образует вещественную форму группы R. Перечисляются максимальные приводимые подгруппы во всех таких вещественных формах. При этом автор опирается на следующую теорему: Пусть $\varphi(\xi, \eta)$ — невырожденная билинейная форма, инвариантная относительно вещественной линейной группы G. Пусть G_0 — максимальная приводимая подгруппа группы G и R_u — инвариантное относительно G_0 подпространство. Тогда $\varphi(\xi, \eta)$ либо невырождена на R_u, либо тождественно равна 0 на нем.

Остаются неисследованными некоторые из вещественных форм классических групп, например вещественная форма группы A_{2n-1}, изоморфная группе линейных преобразований n-мерного векторного пространства над телом кватернионов. А. Л. Онищик

232. Интерпретация групп векторных когомологий. Коккрофт (Interpretation of vector cohomology groups. Cockcroft W. H.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 3, 599—619 (англ.)

Обобщая известные построения Эйленберга и Маклейна, Уайтхед (Whitehead J. H. C., Quart. Math., 1950, 3, 219) определил так называемые группы векторных когомологий и нашел алгебраические интерпретации групп H_2^3 и H_1^2. В первой части статьи автор находит аналогичную интерпретацию для группы H_0^1.

Пусть X, Y — мультипликативные группы (левых) операторов аддитивной абелевой группы G. Функции $c(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n)$ переменных $x_i \in X$, $y_j \in Y$ со значениями в G естественно образуют абелеву группу $C^{m,n}$. Элементы прямой суммы $C^n = \Sigma_k C^{k,n-k}$, т. е. последовательности $(c_0, \ldots, c_n)$, $c_k \in C^{k,n-k}$, называются векторными коцепями. Подгруппа группы C^n, состоящая из коцепей, для которых $c_{p+1} = \ldots = c_n = 0$, обозначается через C_p^n. Через C_{-1}^0 обозначается подгруппа группы $G = C^0$, состоящая из элементов, инвариантных относительно X.

Предположим, кроме того, что X определена как группа (левых) операторов группы Y, причем $x(yg) = (xy)(xg)$. Определим гомоморфизмы $\delta_x : c^{m,n} \to c^{m+1,n}$, $\delta_y : c^{m,n} \to c^{m,n+1}$, положив:

$$(\delta_x c)(x_1, \ldots, x_{m+1};\quad y_1, \ldots, y_n) = x_1 c(x_2, \ldots, x_{m+1};$$

$$y_1, \ldots, y_n) + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i c(x_1, \ldots, x_i x_{i+1}, \ldots, x_m;$$

$$y_1, \ldots, y_n) + (-1)^{m+1} c(x_1, \ldots, x_m;\quad x_{m+1} y_1, \ldots, y_n),$$

$$(\delta_y c)(x_1, \ldots, x_m;\ y_1, \ldots, y_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_m y_1) \times$$

$$\times c(x_1, \ldots, x_m;\ y_2, \ldots, y_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i c(x_1, \ldots, x_m;$$

$$y_1, \ldots, y_i y_{i+1}, \ldots, y_{n+1}) + (-1)^{n+1} c(x_1, \ldots, x_m;$$

$$y_1, \ldots, y_n).$$

Для любой векторной коцепи $(c_0, \ldots, c_n) \in C^n$ положим $\Delta(c_0, \ldots, c_n) = (\delta_y c_0, \delta_x c_0 - \delta_y c_1, \ldots, \delta_x c_{n-1} + (-1)^{n-1} \delta_y c_n, \delta_x c_n)$. Оказывается, что гомоморфизм $\Delta : c^n \to c^{n+1}$ удовлетворяет обычному соотношению $\Delta\Delta = 0$. Подгруппу векторных коциклов (элементов, принадлежащих ядру гомоморфизма Δ), содержащихся в C_p^n, обозначим через $\mathfrak{Z}_p^n$ и положим $\mathfrak{H}_p^n = \mathfrak{Z}_p^n - \Delta C_p^{n-1}$ (у автора опечатка: пропущен индекс p. *Реф.*).

Аддитивная (вообще говоря, неабелева) X-операторная группа E называется X-расширением группы G с помощью группы Y, если существует операторный гомоморфизм $\varphi : E \to Y$, ядром которого является G. Пусть A_1 — группа всех операторных автоморфизмов группы E, переводящих G в себя и индуцирующих на G и Y тождественные отображения, а A_2 — ее подгруппа, состоящая из внутренних автоморфизмов $e \to g + e - g$, порожденных элементами $g \in C_{-1}^0$. Оказывается, что $A_1/A_2 \approx H_0^1$. Для $X = 1$ это дает известную теорему Бера. Автор выводит указанный изоморфизм из некоторого более общего предложения, касающегося гомоморфных отображений одного расширения в другое.

Во второй части статьи изучаются группы H_n^{n+1} для $n \geqslant 2$. Оказывается, что эти группы можно интерпретировать как группы некоторых операторных расширений абелевой группы до произвольной лупы с операторами. Для луп без операторов соответствующие результаты принадлежат Эйленбергу и Маклейну (Eilenberg S., Maclane S., Duke Math. J., 1947, 14, 435). М. М. Постников

233. Коммутативные полугруппы. Мак-Кензи (Commutative semigroups. MacKenzie Robert E.), Duke Math. J., 1954, 21, № 3, 471—477 (англ.)

В коммутативной полугруппе $\mathfrak{M}$ рассматриваются идеалы по образцу идеалов коммутативных колец. Вместо самих идеалов автор предпочитает пользоваться коидеалами, т. е. дополнениями идеалов до полугруппы $\mathfrak{M}$. Коидеал, являющийся полугруппой, называется простым. Корадикал $S^{\blacktriangle}$ коидеала S есть множество всех элементов из S, все степени которых содержатся в S. Коидеал Q называется примарным, если он содержит произведение $QQ^{\blacktriangle}$. Представление $S = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$ коидеала S в виде суммы (теоретико-множественной) конечного числа примарных коидеалов Q_i называется нормированным, если все корадикалы $Q_i^{\blacktriangle}$ различны между собой и ни один примарный коидеал Q_i не содержится в сумме остальных. При нормированном представлении множество корадикалов $Q_1^{\blacktriangle}, \ldots, Q_n^{\blacktriangle}$ и число n примарных коидеалов определяются однозначно для данного коидеала S.

Для множества P простых коидеалов, содержащихся в данном коидеале S, определяют изолированную компоненту $S : P$ как сумму всех примарных коидеалов, содержащихся в S и содержащих член из P. Если $S = Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$, где Q_n — примарные коидеалы, то $S : P$ есть сумма тех коидеалов среди Q_i, которые содержат какой-либо член из P.

Коидеал называется собственным, если его корадикал не пуст. Собственные коидеалы S и T называются разделенными, если пересечение $S \cap T$

уже не содержит собственных коидеалов. Если коидеал S является суммой конечного числа собственных примарных коидеалов, то S будет также суммой собственных примарных коидеалов, попарно разделенных между собой, каждый из которых уже не является суммой двух разделенных собственных примарных коидеалов. В работе формулируется также достаточный критерий представления коидеалов в виде конечной суммы примарных коидеалов, связанный с условием стабилизации убывающих цепей изолированных компонент. П. Г. Конторович

234. **Теория характеров коммутативных полугрупп. Шварц Штефан,** Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 3, 219—247 (резюме англ.)

Пусть S есть конечная коммутативная полугруппа. Характером S называется комплексная функция χ, определенная на S и удовлетворяющая условию: $\chi(a)\chi(b)=\chi(ab)$ $(a, b \in S)$. S^* — множество характеров S само является конечной коммутативной полугруппой относительно умножения; $(\chi_1\chi_2)(a)=\chi_1(a)\chi_2(a)$, $(a \in S)$. S^* оказывается суммой попарно не пересекающихся групп: $S^*=\bigcup_{i=1}^{m+1} G_i^*$. Каждая G_i^* изоморфна некоторой подгруппе S. Так как к тому же удается описать закон умножения между собой групп G_i^*, то тем самым выясняется строение S^*.

Если $S=J\cup J'$, где J и J' — полугруппы, не имеющие общих элементов, причем $xy \in J$ для любых $x \in J$, $y \in S$, то J называется простым идеалом S. Множество характеров, которые равны нулю точно на J, является группой. Число простых идеалов, отличных от S, равно числу максимальных подгрупп S и равно m. Для J определяется ε_j идемпотент S^*: $\varepsilon_j(x)=0$ (если $x \in J$), $\varepsilon_j(x)=1$ (если $x \in J'$). Оказывается, что таким способом получаются все идемпотенты S^*.

Дается метод построения всех характеров S. Для этого надо знать все простые идеалы S и все характеры некоторых подгрупп S.

Частично упорядоченное множество ненулевых идемпотентов из S^* и полуструктура идемпотентов из S взаимно антиизоморфны. В соответствии с этим имеет место изоморфизм между максимальными подгруппами полугрупп S и S^*, имеющими единицами соответствующие идемпотенты. Е. С. Ляпин

235. **Заметка о структуре коммутативных полугрупп. Нумакура** (A note on the structure of commutative semigroups. Numakura Katsumi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 4, 262—265 (англ.)

Пусть S — коммутативная полугруппа (ассоциативная система), x — любой ее элемент, S_x — множество всех элементов $a \in S$, удовлетворяющих при любом $p \in S$ условию: $\bigcap_{n=1}^{\infty} Spa^n = \bigcap_{n=1}^{\infty} Spx^n$.

S_x содержит не более одного идемпотента и является подполугруппой S. Всякая коммутативная полугруппа S является теоретико-множественной суммой своих попарно не пересекающихся подполугрупп S_x, причем $S_xS_y \subset S_{xy}$. Если S_x содержит идемпотент e, то $G_x=S_xe$ — группа. G_x — ядро, т. е. минимальный идеал S_x (Сушкевич А. К., Теория обобщенных групп, Харьков — Киев, 1937). Объединение $\overline{S}$ всех S_x, содержащих идемпотенты, является подполугруппой в S. Если для каждого элемента $a \in S$ существует такое $n=n(a)$, что $Sa^{n+1}=Sa^n$, то $\overline{S}=S$.

Л. М. Глускин

236. ▼ **О компактных абелевых полугруппах. Исеки** (On compact abelian semi-groups. Iséki Kiyoshi), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 1, 59—60 (англ.)

Пусть S — коммутативная топологическая полугруппа, т. е. топологическое хаусдорфово пространство, в котором определено коммутативное ассоциативное умножение элементов, непрерывное относительно обоих множителей. Если S компактно, то доказывается, что в S существует такой идемпотентный элемент e, относительно которого для всякого $a \in S$ найдется такой $a' \in S$, что $aa'=e$. Легко видеть, что такой e единственный. Если S обладает нулевым элементом, то он и является таким e. Е. С. Ляпин

237. **Естественно упорядоченные коммутативные полугруппы. Клиффорд** (Naturally totally ordered commutative semigroups. Clifford A. H.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 631—646 (англ.)

Рассматриваются только коммутативные полугруппы. Полугруппа S называется естественно упорядоченной (е. у.), если S является упорядоченным множеством при отношении «$<$»: $a<b$ тогда и только тогда, когда $a \neq b$ и разрешимо уравнение $ax=b$.

Пусть задано множество $\{S_\tau\}$ е. у. полугрупп, где индекс τ пробегает некоторое упорядоченное множество I. Полагая $a_\sigma b_\tau = b_\tau a_\sigma = b_\tau$ для всех $a_\sigma \in S_\sigma$, $b_\tau \in S_\tau$, когда $\sigma < \tau$ в I, превращаем теоретико-множественную сумму S всех S_τ в е. у. полугруппу, называемую ординальной суммой упорядоченного множества полугрупп S_τ. Если е. у. полугруппа S не является ординальной суммой двух или большего числа подполугрупп, то S называется ординально неприводимой. В работе показано, что каждая е. у. полугруппа может быть представлена (единственным образом) в виде ординальной суммы ординально неприводимых е. у. полугрупп. Тем самым изучение общих е. у. полугрупп сведено к изучению ординально неприводимых е. у. полугрупп.

Е. у. подполугруппа S е. у. полугруппы Σ называется всюду плотной в Σ, если 1) S содержит наибольший и наименьший элементы Σ, когда они существуют, и 2) если между элементами α и β из Σ нет других элементов Σ, то α и β принадлежат S, а в противоположном случае между α и β существует элемент подполугруппы S. Е. у. полугруппа S называется недискретной, если она не имеет наименьшего элемента. Она называется архимедовой, если для каждых двух ее элементов a и b существует такое положительное целое число r, что $b \leqslant a^r$. Пусть a — какой-либо элемент полугруппы S. Если $a^n=a^{n+1}$ для некоторого целого положительного числа n, то a называется элементом конечного индекса. Ординально неприводимая е. у. полугруппа S, каждый элемент которой является элементом конечного индекса, называется сегментом.

Главная часть работы посвящена изучению сегментов. Показано, что для каждого сегмента S существует архимедова е. у. полугруппа T, для которой справедлив закон сокращения и которая содержит такой идеал T_1, что фактор-полугруппа T/T_1 в смысле Риса (Rees D., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1940, **36**, 387—400) изоморфна с S. Затем доказывается основная, по мнению автора, теорема о том, что каждый недискретный сегмент с помощью однозначно определенного изоморфизма можно отобразить на всюду плотную подполугруппу или фактор-полугруппы $P/[1]$, или фактор-полугруппы $P/(1)$, где P — аддитивная полугруппа действительных положительных чисел, а $[1]$ и (1) — множества всех действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x \geq 1$, $x > 1$ соответственно. В статье отмечено, что архимедова е. у. полугруппа, в которой не справедлив закон сокращения, является сегментом. Таким образом, основной результат работы аналогичен результату, полученному Гельдером (Hölder O., Berichte über die Verhandlungen der Königlich

Sachsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse, 1901, 53, 1—64), о включении архимедовой полугруппы с законом сокращения в аддитивную полугруппу всех положительных действительных чисел.

Как следствие основной теоремы получается, что недискретными сегментами, в которых каждое ограниченное сверху множество имеет наименьшую верхнюю грань, могут быть с точностью до изоморфизма только сегменты $P[1]$ и $P(1)$. А. А. Виноградов

238. Автоморфизмы матричных полугрупп. Халезов Е. А., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 2, 245—248

Совокупность всех квадратных матриц порядка n с элементами из некоторого тела F, ранг которых не превосходит $r \geqslant 1$, является полугруппой относительно умножения, обозначаемой через F_n^r. Доказывается, что каждый автоморфизм θ полугруппы F_n^r $(n \geqslant 2)$ имеет вид $\| x_{ij} \|^{\theta} = S \| x_{ij}^{\varphi} \| S^{-1}$, где S — фиксированная невырожденная матрица из F_n, а φ — автоморфизм основного тела.

В заключение указывается, что аналогичным образом доказывается и утверждение, что для изоморфизма полугрупп F_n^r, G_m^s $(n \geqslant 2,\ m \geqslant 2)$ необходимо и достаточно, чтобы $n = m$, $r = s$ и тело F было изоморфно телу G. А. И. Мальцев

239. Изоморфизм матричных полугрупп. Халезов Е. А., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 42—56

Обе теоремы, сформулированные в прореферированной выше статье (реф. 238), объединяются в одно предложение: Если полугруппа F_n^r $(n \geqslant 2)$ изоморфна полугруппе G_m^s, то $n = m$, $r = s$ и тело F изоморфно телу G. Каждый изоморфизм θ полугруппы F_n^r на полугруппу G_m^s имеет в этом случае вид $\| x_{ij} \|^{\theta} = S \| x_{ij}^{\varphi} \| S^{-1}$, где φ — некоторый изоморфизм F на G, а S — обратимая матрица из G_n. А. И. Мальцев

240. О характеристике групп через их сокращаемые отношения эквивалентности. Тьеррен (Sur la caractérisation des groupes par leurs équivalences simplifiables. Thierrin Gabriel), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 21, 2046—2048 (франц.)

Доказывается теорема: Чтобы полугруппа с законом сокращения (семи-группа) была группой, необходимо и достаточно, чтобы всякое отношение эквивалентности, сокращаемое справа, было также регулярным справа. (Отношение эквивалентности φ сокращаемо справа, если из $ax \equiv bx\ (\varphi)$ следует $a \equiv b\ (\varphi)$; оно регулярно справа, если из $a \equiv b\ (\varphi)$ следует $ax \equiv bx\ (\varphi)$).

П. Г. Конторович

241. Неразложимые полугруппы. Уоллес (Indecomposable semigroups. Wallace A. D.), Math. J. Okayama Univ., 1953, 3, № 1, 1—3 (англ.)

Континуум (связное компактное хаусдорфово пространство) называется неразложимым, если его нельзя представить в виде объединения двух собственных подконтинуумов. Доказывается, что топологическая полугруппа с единицей, пространство которой есть метрический неразложимый континуум, является топологической группой. Пусть S есть топологическая полугруппа с единицей u, пространство которой является континуумом, K — подгруппа всех ее обратимых элементов. Если не содержащее внутренних точек подмножество $C \subset S$ таково, что $U \in C$ и для любого континуума $Q \subset S$ непустота $Q \cap C$ влечет за собой либо $Q \subset C$, либо $C \subset Q$, то $C \subset K$. В. М. Глушков

242. Преупорядоченные моноиды и цепи Мальцева. Тамари (Monoides préordonnés et chaînes de Malcev. Tamari Dov), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 1, 53—96 (франц.)

Моноидом называется непустое множество M, обладающее внутренней бинарной и однозначной операцией (умножением), причем эта операция не предполагается определенной для каждой пары элементов из M. Для элементов a, b из M имеет место отношение K в том и только в том случае, когда их произведение определено в M. Предполагается, что каждый элемент моноида является левым (также и правым) множителем хотя бы в одном произведении.

Моноид называется прямоугольным, если из aKx, aKy, bKx следует bKy. Прямоугольный моноид можно включить в такой прямоугольный моноид, каждый элемент g которого имеет левый единичный элемент γ_g и правый единичный элемент δ_g. На этом основании в дальнейшем предполагается, что прямоугольный моноид имеет единичные элементы.

Прямоугольный моноид S называется полугруппоидом в случае, когда для его элементов выполняются следующие свойства:

1) если произведения $a(bc)$ и $(ab)c$ определены в M, то $a(bc) = (ab)c$;

2) если произведения ab и bc определены, то произведения $a(bc)$ и $(ab)c$ также определены;

3) произведение $a(bc)$ определено тогда и только тогда, когда определено произведение $(ab)c$;

4) из $ax = bx$, а также из $ya = yb$ следует $a = b$.

Полугруппоид G (с единичными элементами) называется группоидом, если каждый элемент $g \in G$ обладает обратным элементом $\bar{g}$ таким, что $g\bar{g} = \gamma_g$, где γ_g — левый единичный элемент элемента g, и $\bar{g}g = \delta_g$, где δ_g — правый единичный элемент элемента g.

Рефлексивное транзитивное отношение $a \to b$, установленное для некоторых пар элементов множества M, называется отношением преупорядочения. Моноид M с отношением преупорядочения «$\to$» называется преупорядоченным моноидом, если это отношение связано с операцией умножения так, что из $a \to b$ и $a' \to b'$ следует, что произведения aa' и bb' определены одновременно, и в этом случае $aa' \to bb'$.

В первой части работы, кроме определений, содержатся указания на связь между различными (частичными) отношениями, операцией умножения и (неполной) ассоциативностью в моноиде.

Во второй части, исходя из данного преупорядоченного полугруппоида S с элементами $a, b, c, \ldots$, конструируется преупорядоченный группоид G, названный группоидом, порожденным полугруппоидом S. Элементы группоида G могут быть представлены альтернативными словами, составленными чередующимися буквами без черты и с чертой. Буквы без черты обозначают элементы S, а те же буквы с чертой $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots)$ обозначают формальные обратные соответственных элементов из S.

Обобщается проблема слов в том смысле, что рассматриваются не только цепи слов (преобразований), основанные на равенстве, но и цепи слов (преобразований), полученные с помощью замены одной части слова на другую в случае, когда эти части находятся в отношении преупорядочения. Автор рассматривает цепи слов (элементов) преупорядоченного группоида G, порожденного полугруппоидом S, получаемые особым образом, используя при этом для получения последующего слова цепи два приема: 1) в слове заменяется его часть ab на $a'b'$, если $ab \to a'b'$ в S; 2) вместо левого единичного элемента γ_a в слово вводится произведение $a\bar{a}$, а вместо правого единичного элемента δ_a вводится $\bar{a}a$ или

заменяется $a\bar{a}$ на γ_a и $\bar{a}a$ на δ_a. Автор пользуется идеями работы А. И. Мальцева (Матем. сб., 1939, 6, 331—336) и называет особый вид построенных общих цепей «цепями Мальцева». Пусть дана цепь слов $A \to M_1$, $M_1 \to M_2, \ldots, M_p \to B$, где «$\to$» обозначает знак отношения преупорядочения в G. Первое и последнее слова ее образуют цепь $A \to B$, называемую заключением данной цепи. S-цепью называется цепь, первое и последнее слова которой являются словами, составленными из элементов S (эти слова представляются отдельными элементами или произведениями нескольких элементов S). S-цепь названа приемлемой в S, если ее заключение может быть осуществлено в S, т. е. если заключение $A \to B$ сводится к заключению вида $ab \to a'b'$ или $ab = a'b'$, где «$\to$» означает знак отношения преупорядочения в S. А. И. Мальцевым (Матем. сб., 1939, 6, 331—336; 1940, 8, 251—264) были найдены необходимые и достаточные условия для включаемости полугруппы в группу. Основным результатом реферируемой работы является двоякое обобщение результатов Мальцева о включении полугруппы в группу: с одной стороны, операция не предполагается всюду определенной и абстрактная группа заменяется на абстрактный группоид и соответственно абстрактная полугруппа — на абстрактный полугруппоид; с другой стороны, вводится более общее, чем отношение равенства, отношение преупорядочения, и таким образом результаты Мальцева обобщаются применительно к преупорядоченным полугруппоидам. Показано, что для того чтобы преупорядоченный полугруппоид мог быть включенным в преупорядоченный группоид, необходимо и достаточно, чтобы заключения S-цепей Мальцева были приемлемы в S. Причем включаемость преупорядоченного полугруппоида S в преупорядоченный группоид G понимается в том смысле, что все элементы S переносятся в G с тем же самым отношением их соединяемости (элементы из S, для которых не определено произведение в S, остаются элементами G с неопределяемым для них произведением), отношение преупорядочения в G индуцирует первоначальное отношение преупорядочения в S.

В третьей части работы приведены различные интерпретации и свойства цепей Мальцева и указаны некоторые следствия основного результата о включаемости. В работе имеются опечатки. А. А. Виноградов

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

243. О задаче погружения полей. Шафаревич И. Р., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 5, 389—418

Дано поле k, нормальное над конечным алгебраическим расширением Ω поля рациональных чисел, с группой Галуа F и дана группа $G = F \cdot \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — нормальный делитель G порядка l^α, $F \cap \mathfrak{H} = 1$. Исследуется вопрос о существовании поля K с группой G над Ω, содержащего k так, что автоморфизм $\sigma = \tau\lambda$, $\tau \in F$, $\lambda \in \mathfrak{H}$ поля K порождает в k автоморфизм τ. Существование доказывается при следующих дополнительных предположениях: 1. Группа $\mathfrak{H}$ имеет класс $c < l$ или $1'$. Порядки F и $\mathfrak{H}$ взаимно просты. Алгебраической основой доказательства является теорема: Любая группа $\mathfrak{H}$ порядка l^α и класса $c < l$ с группой операторов F является операторно-гомоморфным образом некоторой центрально-диспозиционной группы. Под этим названием подразумевается l-группа, центр которой разлагается в прямое произведение элементарных l-групп, каждая из которых, в свою очередь, есть прямое произведение сопряженных относительно F циклических групп. Тем самым задача в общей постановке сводится к рассмотрению центрально-диспозиционных групп $\mathfrak{H}$.

Дальнейшее построение ведется методами, близкими по идее к методам, примененным в работе «О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^α» (РЖМат, реф. 244). Д. К. Фаддеев

244. О построении полей с заданной группой Галуа порядка l^α. Шафаревич И. Р., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 3, 261—296

Конструкция полей с заданной группой порядка l^α над данным полем алгебраических чисел была осуществлена в 1936—1937 гг. Шольцем (Scholz A., Math. Z., 1936, **42**, 161—188) и Рейхардтом (Reichardt H., J. reine und angew. Math., 1937, **177**, 1—5). Методом Шольца—Рейхардта строятся поля над полем рациональных чисел, что для произвольного основного поля дает лишь узкий класс полей. Реферируемая работа содержит значительно более свободную конструкцию. Автор называет поле K/k с l-группой Галуа шольцевым, если: 1) простые делители l в k полностью распадаются в K; 2) вещественные бесконечно удаленные дивизоры k остаются вещественными в K; 3) все критические простые дивизоры K/k имеют относительный порядок 1; 4) абсолютные нормы критических простых дивизоров $\mathfrak{p}_i$ удовлетворяют условию: $N(\mathfrak{p}_i)^m \equiv 1 \,(l^h)$, при некотором m, взаимно простом с l, и достаточно большом h ($h > \alpha$, если $(K : k) = l^\alpha$). Шольцевы поля допускают погружение в поля с любыми наперед заданными простыми центральными расширениями группы K/k.

Первая часть работы посвящена выяснению необходимых и достаточных условий для того, чтобы шольцево поле было бы погружаемо в шольцево же поле с группой, являющейся данным простым центральным расширением группы K/k. Эти условия заключаются в обращении в 1 некоторых инвариантов поля, имеющих арифметический характер.

Для построения полей с любыми l-группами достаточно дать конструкцию для построения полей с любой группой $\mathfrak{H}_d^{(c)}$, являющейся фактор-группой свободной группы S_d с d образующими по нормальному делителю N_c, где $N_0 = S$, N_c есть подгруппа N_{c-1}, порожденная коммутаторами элементов S с элементами N_{c-1} и l-ми степенями N_{c-1}.

Во второй части дается конструкция для построения шольцева поля с группой $\mathfrak{H}_\delta^{(c)}$ и с единичными вариантами, как только построено любое шольцево поле с группой $\mathfrak{H}_d^{(c)}$, при достаточно большом d.

Эта конструкция, вместе с результатом первой части работы, дает возможность строить поля с любыми l-группами Галуа над произвольным полем алгебраических чисел. Случай $l = 2$ не представляет исключения, что имело место в работах Шольца и Рейхардта.

Д. К. Фаддеев

245. О полях, являющихся полями отношений. Фрид (Über als echte Quotientenkörper darstellbare Körper. Fried E.), Acta scient. math., 1954, **15**, № 2, 143—144 (нем.)

Дается элементарное доказательство следующего предложения: поле P можно представить в виде поля отношений некоторой содержащейся в нем области целостности тогда и только тогда, если P не является алгебраическим расширением конечного поля.

В. М. Курочкин

246. О евклидовых кольцах и кольцах главных идеалов. Леммлейн В., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 4, 585—587

Показано, что существуют кольца главных идеалов W, в которых нельзя определить никакой нормы G,

относительно которой в кольце W можно было бы установить алгоритм Евклида. Результат этот не нов (Motzkin Th.; Bull. Amer. Math. Soc., 1949, **55**, 1142—1146). В. И. Шнейдмюллер

247. Об основной теореме теории идеалов коммутативных колец. Фукс (On the fundamental theorem of commutative ideal theory. Fuchs L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, № 1—2, 95—99 (англ.; резюме русс.)

Доказывается следующее обобщение принадлежащей Е. Нетер основной теоремы мультипликативной теории идеалов коммутативных колец.

Пусть R — коммутативное кольцо с единицей и A — идеал кольца R, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Идеал A представим в виде

$$A = P_1^{k_1} P_2^{k_2} \dots P_r^{k_r},$$

где P_i — простые идеалы кольца R.

2. Для любого идеала B, делящего A, имеет место представление

$$B = P_1^{l_1} P_2^{l_2} \dots P_r^{k_r},$$

где $l_i \leqslant k_i$, $i = 1, \dots, r$.

В таком случае:

A. В кольце R имеет место условие минимальности по модулю A.

B. Для любого простого делителя P идеала A, которому соответствует изолированная компонента идеала A, отличная от P, между P и P^2 не содержатся другие идеалы кольца R.

Обратно, из условий A и B вытекают 1 и 2.

А. И. Узков

248. Об основной теореме теории идеалов. Фукс (Az ideálelmélet főtételéről. Fuchs László), Magyar tud. akad. mat. és fis. oszt. kozl., 1954, **4**, № 1, 87—95 (венг.)

Венгерский текст работы (реф. 247), отличающийся от английского перевода наличием более развернутых исторических замечаний. А. И. Узков

249. О частных идеалов и о простых идеалах. Штейнфельд (On ideal-quotients and prime ideals. Steinfeld Otto), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **5**, № 3—4, 289—298 (англ.; резюме русс.)

Если $\mathfrak{b}$ — идеал, а H — произвольное подмножество элементов ассоциативного кольца R, то через $(\mathfrak{b} : H)_l$ и $(\mathfrak{b} : H)_r$ обозначаются соответственно левый идеал, состоящий из элементов, удовлетворяющих условию $\beta H \subseteq \mathfrak{b}$, и правый идеал, состоящий из элементов, удовлетворяющих условию $H\beta \subseteq \mathfrak{b}$. Частным $\mathfrak{b} : H$ идеала $\mathfrak{b}$ по подмножеству H называется множество элементов β, удовлетворяющих условиям $\beta H \subseteq \mathfrak{b}$ и $H\beta \subseteq \mathfrak{b}$; если H — идеал, то $\mathfrak{b} : H$ — также идеал. Введенные понятия используются в следующей теореме.

Пусть $\mathfrak{a}$ — отличный от (0) и R идеал кольца R и $\mathfrak{p}$ — простой идеал идеала $\mathfrak{a}$ (рассматриваемого как кольцо). Тогда $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = \mathfrak{p} : \mathfrak{a}$ есть простой идеал кольца R и $\mathfrak{p}_\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. Если $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ будет единственным простым идеалом кольца R, пересечение которого с $\mathfrak{a}$ равно $\mathfrak{p}$. В последнем случае $\mathfrak{p}_\mathfrak{a}$ можно задать также следующим образом:

$$\mathfrak{p}_\mathfrak{a} = (\mathfrak{p} : \mathfrak{a})_l = (\mathfrak{p} : \mathfrak{a})_r = (\mathfrak{p} : \mathfrak{l})_l = (\mathfrak{p} : \mathfrak{r})_r,$$

где $\mathfrak{l}$ и $\mathfrak{r}$ — произвольные соответственно левый и правый идеалы идеала $\mathfrak{a}$, не содержащиеся в $\mathfrak{b}$ (то, что $\mathfrak{p}$ является идеалом всего кольца R, было доказано в работе Нагата (Nagata M., J. Math. Soc. Japan, 1951, **3**, 330—344) и передоказывается автором).

Из сформулированной теоремы легко следует, что в кольце R тогда и только тогда существует собственный (т. е. отличный от R) простой идеал, когда существует собственный простой идеал либо в некотором идеале $\mathfrak{a}$ кольца R, либо в фактор-кольце $R/\mathfrak{a}$, и что множество всех простых идеалов кольца R можно полностью описать, зная множество простых идеалов некоторого идеала $\mathfrak{a}$ кольца R и множество простых идеалов фактор-кольца $R/\mathfrak{a}$.

Кольцо R называется почти свободным от делителей нуля, если его нулевой идеал (0) является простым; идеал $\mathfrak{a}$ кольца R называется почти свободным от делителей нуля, если он является почти свободным от делителей нуля кольцом. В качестве второго следствия из той же теоремы доказывается следующее утверждение: кольцо R тогда и только тогда почти свободно от делителей нуля, когда в R существует по крайней мере один такой почти свободный от делителей нуля идеал $\mathfrak{a}$, что для содержащегося в нем элемента $\alpha \neq 0$ уравнение $\beta\alpha = (0)$ имеет в R единственное решение $\beta = 0$.

Аналогичные результаты доказываются для вполне простых идеалов. В заключение автор естественным образом переформулирует указанные выше следствия в терминах теории расширения колец.

Е. Г. Шульгейфер

250. О частных идеалов и о простых идеалах. Штейнфельд (Ideálhányadosokról és primideálokról. Steinfeld Ottó), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 1, 149—153 (венг.)

Приводятся (без доказательств) результаты из другой работы автора (реф. 249). Е. Г. Шульгейфер

251. Условие Сода для квазифробениусовых колец. Хинохара (Shoda's condition on quasi-Frobenius rings. Hinohara Yukitoshi), Proc. Japan. Acad., 1954, **30**, № 4, 291—293 (англ.)

В работе содержится новое доказательство эквивалентности в кольце A с условием минимальности для левых и правых идеалов следующих утверждений:

1) Кольцо A — квазифробениусово.

2) Для каждого левого и для каждого правого идеалов справедливы аннуляторные соотношения, т. е. $l(r(\mathfrak{l})) = \mathfrak{l}$ и $r(l(\mathfrak{r})) = \mathfrak{r}$, где $r(\mathfrak{l})$ — правый аннулятор левого идеала $\mathfrak{l}$, а $l(\mathfrak{r})$ — левый аннулятор правого идеала $\mathfrak{r}$.

3) В A выполняется условие Сода для минимальных левых и правых идеалов. (Под условием Сода подразумевается следующее условие: каждое гомоморфное отображение одного левого (правого) идеала на другой левый (правый) идеал задается посредством умножения справа (слева) на некоторый элемент кольца A.)

4) Кольцо A обладает левой единицей и каждое гомоморфное отображение левого идеала на минимальный левый идеал задается посредством умножения справа на некоторый элемент из A.

В работе доказывается, что из условия 4) следует условие 3), а из условия 3) следует условие 1). Затем автор делает ссылку на работы Накаяма (Nakayama T., Ann. Math., 1942, **42**, 1—21) и Икеда (Ikeda M., Osaka Math. J., 1952, **4**, № 2, 203—210), в которых доказывается, что из условия 1) следует условие 2), а из условия 2) следует условие 4).

В заключение автор приводит свое доказательство утверждения, что из условия 3) следует условие 2). Это доказательство не вполне корректно.

Е. Г. Шульгейфер

252. Некоторые замечания о ν-транзитивных кольцах и линейной компактности. Вулфсон (Some remarks on ν-transitive rings and linear compactness. Wolfson Kenneth G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954 **5**, № 4, 617—619 (англ.)

Пусть K — произвольное ассоциативное кольцо. Аннулятором (точнее — правым аннулятором) называется правый идеал кольца K, состоящий из всех элементов x, аннулирующих справа некоторое фиксированное подмножество P кольца K (т. е. $Px = 0$). Через W обозначается совокупность следующих множеств: все максимальные аннуляторы; все идеалы, являющиеся пересечением конечного числа максимальных аннуляторов; все классы смежности по перечисленным выше правым идеалам. Пусть ν — любое кардинальное число. Для того чтобы кольцо K было изоморфно ν-транзитивному кольцу линейных преобразований, содержащему линейные преобразования конечного ранга, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

1. Цоколь кольца K (т. е. сумма всех минимальных правых идеалов) отличен от нуля и содержится в любом другом двустороннем идеале кольца K.

2. Любая центрированная совокупность множеств из W, состоящая менее чем из ν элементов, имеет непустое пересечение.

В частности, кольцо всех линейных преобразований может быть охарактеризовано тем, что оно удовлетворяет условиям 1 и следующему:

3. Любая центрированная совокупность множеств из W имеет непустое пересечение. См. также статью автора, РЖМат, 1953, 1103. В. М. Курочкин

253. О поведении гильбертовой функции однородного идеала при рациональных преобразованиях. Грёбнер (Über das Verhalten der Hilbertfunktion eines H-Ideals bei rationalen Transformationen. Gröbner Wolfgang), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 1—3 (нем.)

Значение гильбертовой функции $H(t, a)$ для натурального числа t и однородного идеала a (определение однородного идеала см., например, в книге Ван дер Вардена «Современная алгебра», т. II, изд. II, стр. 62) в кольце $\Omega_x = K[x_0, x_1, \ldots, x_m]$ определяется как число форм степени t из Ω_x, линейно независимых по модулю a. Рациональное преобразование $y_j = \varphi_j(x_0, \ldots, x_m)$, $j = 0, \ldots, n$, где φ_j — формы одной и той же степени μ, переводит идеал $a \in \Omega_x$ в идеал $a_y \in \Omega_y$, состоящий из тех $F(y_0, \ldots, y_n) \in \Omega_y$, для которых $F(\varphi_0, \ldots, \varphi_n) \in a_x$. Доказывается формула

$$H(t, a_y) = H(\mu t, \mathfrak{A}_\lambda) - H(\mu t, a_x + \mathfrak{b}^t),$$

где $\mathfrak{b}$ обозначает идеал, порожденный формами $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$. Приводятся некоторые следствия из этой формулы при различных частных предположениях о рациональном преобразовании. И. Р. Шафаревич

254. Заметка о теореме коммутативности. Херстейн (A note on a commutativity theorem. Herstein I. N.), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 4, 119—120 (англ.)

Дается простое и чисто алгебраическое доказательство следующих двух теорем.

I. Пусть R — алгебра над полем комплексных чисел, в которой определена *-операция, удовлетворяющая, помимо обычных, также условию: из $a^*a = 0$ следует $a = 0$. Если операция $x \circ x = \frac{xy + yx}{2}$ ассоциативна на самосопряженных ($x^* = x$) элементах, то R коммутативна.

II. Если в кольце K без нильпотентных элементов элемент x коммутирует со всеми коммутаторами $yz - zy$, то x лежит в центре.

Теорема I для C^*-алгебр была ранее доказана Турумару (Turumaru, Kōdai Math. Sem. Repts, 1951, 51) с использованием спектральных теорем. Теорема II для тел доказана Анкохеа (Ancochea G., Ann. Math., 1947, 147—153). В. М. Курочкин

255. Элементарное доказательство теоремы Джекобсона. Херстейн (An elementary proof of a theorem of Jacobson. Herstein I. N.), Duke Math. J., 1954, 21, № 1, 45—48 (англ.)

Приводится элементарное, но длинное доказательство теоремы Джекобсона о коммутативности колец, в которых каждый элемент x удовлетворяет уравнению $x^{n(x)} = x$. В. М. Курочкин

256. Заметка о кольцах, все нильпотентные элементы которых лежат в центре. Херстейн (A note on rings with central nilpotent elements. Herstein I. N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 620 (англ.)

Доказывается предложение, усиливающее одно, полученное ранее тем же автором (РЖМат, 1955, 109), обобщение известной теоремы Джекобсона: Пусть в кольце R 1) все нильпотентные элементы лежат в центре, 2) для любого элемента $x \in R$ можно указать целое число $n = n(x) > 0$ и целочисленный многочлен $p(t)$ такие, что $x^{n+1} p(x) = x^n$; тогда R коммутативно. В. М. Курочкин

257. Кольца с условием минимальности для идеалов. Андрунакиевич В. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 3, 329—332

Доказана теорема о том, что всякое кольцо с условием минимальности для идеалов (двусторонних) единственным образом представимо в виде прямой суммы полупростого кольца в смысле Брауна — Маккоя и кольца, ограниченного своим радикалом в смысле М. Холла. (Это обобщает теорему Холла о том, что кольцо с условием минимальности для правых идеалов единственным образом представимо в виде прямой суммы полупростого в классическом смысле кольца и кольца, ограниченного своим радикалом.) Доказательство этой теоремы опирается на следующие два факта: всякий ненулевой минимальный идеал произвольного кольца является либо присоединенно-простым кольцом, либо простым кольцом с единицей, и всякий обладающий единицей идеал кольца выделяется в этом кольце прямым слагаемым. Л. И. Головина

258. О критерии Фридрихса для коммутаторов в свободной ассоциативной алгебре. Кон (Sur le critère de Friedrichs pour les commutateurs dans une algèbre associative libre. Cohn Paul Moritz), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 13, 743—745 (франц.)

Множество E свободных образующих свободной ассоциативной алгебры A над полем K характеристики p порождает относительно операций $a \circ b = ab - ba$, $a \to a^p$, сложения и умножения на элементы из K ограниченную алгебру Ли L (в случае характеристики нуль операция $a \to a^p$ опускается, и L — обычная алгебра Ли).

Пусть $E', E'', \ldots, E^{(k)}, \ldots$ — множества, элементы каждого из которых находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами множества E; если $x_i = x_i^{(0)} \in E$, то соответствующий ему элемент множества $E^{(k)}$ обозначим через $x_i^{(k)}$. Пусть далее $A^{(k)}$ — свободная ассоциативная алгебра над полем K с множеством $E^{(k)}$ свободных образующих, а $\mathfrak{A}$ — тензорное произведение алгебр $A^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, и алгебры A. В алгебре $\mathfrak{A}$ вводятся операции

$$\nabla_k f(x, x', \ldots, x^{(n)}) = f(x + x^{(k)}x', \ldots, x^{(n)}) - f(x, x', \ldots, x^n).$$

Автор приводит простое доказательство известной теоремы Фридриха.

Теорема 1. Элемент $f(x)$ алгебры A тогда и только тогда лежит в L, если $\nabla_1 f(x) = f(x')$ в алгебре $\mathfrak{A}$.

Обозначив через L^n линейное пространство в алгебре A, порожденное произведениями по n множителей из L, и $C_n = L + L^2 + \cdots + L^n$, автор обобщает теорему 1, доказывая следующие теоремы.

Теорема 2. В случае поля характеристики нуль элемент f из алгебры A принадлежит C_n тогда и только тогда, если $\nabla_1^{n+1} f = 0$ в a

Теорема 3. Элемент f алгебры A лежит в C_n тогда и только тогда, если $\nabla_{n+1}\nabla_n \cdots \nabla_2 \nabla_1 f = 0$.

Теорема 4. Элемент f алгебры A лежит в C_n тогда и только тогда, если

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} f(x^{(k)}) - \sum_{0 \leqslant k < l \leqslant n} f(x^{(k)} + x^{(l)}) + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^n f(x + x' + \cdots + x^{(n)}) = 0 \text{ в } \mathfrak{A}.$$

Примечание референта. В формулировке теоремы 3 в работе допущена опечатка и условие сформулировано в виде $\nabla_n \cdots \nabla_2 \nabla_1 f = 0$.

А. И. Ширшов

259. Представления ограниченных алгебр Ли характеристики p. Хохшилд (Representations of restricted Lie algebras of characteristic p. Hochschild G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 603—605 (англ.)

Работа посвящена ограниченным в смысле Джекобсона (Алгебр. реф. сб., М., 1948, № 795) алгебрам Ли. Представление такой ограниченной алгебры называется ограниченным, если элементу $x^{[p]}$ соответствует p-я степень образа элемента x.

Доказывается, что если L — конечномерная ограниченная алгебра Ли над полем F характеристики p, то для того чтобы все конечномерные пространства ограниченных представлений L были полупросты, необходимо и достаточно, чтобы L была абелева и элементы $x^{[p]}$ порождали L над F.

Б. И. Плоткин

260. Структуры с обобщенными дополнениями и квазидополнениями. Сас (Generalized complemented and quasicomplemented lattices. Szász G.), Publs mathematicae, 1953, 3, № 1—2, 9—16 (англ.)

Структура S называется структурой с обобщенными дополнениями, если для каждого элемента $a \in S$ и произвольной пары элементов $u, v \in S$ существует по крайней мере один элемент $x \in S$, для которого $a \cap x \leqslant u$, $a \cup x \geqslant v$; такой элемент x называется (u, v)-дополнением a в S и обозначается a_u^v. Структура S называется структурой с обобщенными относительными дополнениями, если все ее замкнутые интервалы являются структурами с обобщенными дополнениями. Для структур с 0 и 1 понятие структуры с обобщенными дополнениями эквивалентно понятию структуры с дополнениями. Структура с обобщенными относительными дополнениями является структурой с обобщенными дополнениями. Приводятся примеры структур с обобщенными дополнениями, не являющихся структурами с дополнениями.

Дедекиндова структура S с обобщенными дополнениями является структурой с обобщенными относительными дополнениями. В дистрибутивной структуре S с обобщенными дополнениями $a_u^v \cap b_u^v$ является элементом вида $(a \cup b)_u^v$, а $a_u^v \cup b_u^v$ — элементом вида $(a \cap b)_u^v$ для произвольных элементов a, b, u, v из S. Если a, b и u, v — произвольные элементы дедекиндовой структуры S с обобщенными дополнениями, причем $u \leqslant a \leqslant b$, и если x есть относительное дополнение элемента a на интервале $[u, b]$, то a является (u, v)-дополнением $a \cup b_u^v$. В структуре S с 0, взяв $u = 0$, при тех же предположениях доказывается, что: 1) x является $(0, v)$-дополнением $a \cup b_u^v$ для всех $u \leqslant a$; 2) если структура S дистрибутивна, то x является (u, v)-дополнением $a \cup b_u^v$ для всех $u \in S$.

Структура S называется структурой с квазидополнениями, если все ее элементы $a \neq 0,1$ (если 0 и 1 существуют) обладают (u, v)-дополнениями для произвольной пары элементов $u \neq 0$, $v \neq 1$. Каждый интервал $[a, b]$ дедекиндовой структуры S с квазидополнениями является структурой с обобщенными дополнениями, если $a \neq 0$, $b \neq 1$. Сформулированные в предыдущем абзаце утверждения остаются справедливыми и для структур с квазидополнениями в предположении, что $a \neq 0,1$; $b \neq 0,1$; $u \neq 0$, $v \neq 1$. Приводятся примеры структур с квазидополнениями (с 0 и 1), не являющихся структурами с дополнениями.

А. Х. Лившиц

261. Замечания о булевых функциях. Эллис (Remarks on Boolean functions. Ellis David), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 345—350 (англ.)

Булевой функцией одного переменного называется функция

$$f(x) = (a \wedge x) \vee (b \wedge x) = (a + b)x + b,$$

отображающая булеву алгебру B на $[u \wedge b, a \vee b]$, через $+$ обозначается симметричная разность. Доказывается:

1) Класс булевых функций на B образует полугруппу преобразований на B, группа единиц которой есть в точности группа изометричных движений на B или, что эквивалентно, является регулярным представлением аддитивной группы B относительно операции $+$.

2) Класс R булевых функций на B образует кольцо операторов B. Функции-константы образуют идеал I_c кольца R, булево кольцо R/I_c изоморфно B.

3) Наименьшие аргументы, для которых функция $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения, соответственно равны $a' \wedge b$ и $a \wedge b'$; наибольшие аргументы, для которых $f(x)$ принимает наименьшее и наибольшее значения, соответственно равны $a' \vee b$ и $a \vee b'$.

Булева функция многих переменных

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{P_i} \{a_i \wedge [\bigwedge_{j=1}^{n} x_j^i]\},$$

где x_j^i есть либо x_j, либо x_j' и P_i — всевозможные различные комбинации таких выборов, отображает B^n на $[\bigwedge_{P_i} a_i, \bigvee_{P_i} a_i]$.

Относительно графа булевой функции в B^2 доказываются следующие теоремы:

1. Если (x_1, y_1) — точка в B^2, то существует двупараметрическое семейство (быть может, вырождающееся) булевых функций, граф которых проходит через (x_1, y_1), а именно $f_{s,t} = (y_1(1 + x_1) + s + t)x + y_1 + s$, где $s \leqslant x_1$ и $t \leqslant 1 + x_1$.

2. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2) — пара точек в B^2; тогда и только тогда существует булева функция, граф которой проходит через эти точки, когда $y_1 + y_2 \leqslant x_1 + x_2$; в этом случае имеется однопараметрическое семейство (быть может, вырождающееся) таких функций, а именно $f_t(x) = ((y_1 + y_2) + t)x + (y_1 + x_1(y_1 + y_2) + x_1 t_1)$, где $t \leqslant 1 + x_1 + x_2$.

3. Если (x_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, n$ — множество точек в B^2, то булева кривая $f(x) = (a + b)x + b$, осуществляющая наилучшее приближение этого множества, задается следующими соотношениями:

$$a = \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} y_i\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} (x_i + y_i)'\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\Big)\Big] \vee$$
$$\vee \Big[\Big(\bigvee_{i=1}^{n} y_i'\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i + y_i)'\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} y_i\Big)\Big],$$
$$b = \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} y_i\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\Big)\Big] \vee$$
$$\vee \Big[\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} y_i\Big)\Big].$$

Полное отклонение в этом случае равно

$$\Big(\bigvee_{i=1}^{n} y_i'\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} (x_i + y_i)'\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\Big) \wedge \Big(\bigvee_{i=1}^{n} y_i\Big).$$

Рассматривается частный случай функции $f(k)$ при $b \leqslant a$, отображающей B на $[b, a]$. Через B_f обозначается топологическое пространство B относительно орбитальной топологии, индуцированной функцией $f(x)$ (РЖМат, 1954, 1592). Для указанного случая $f(f(x)) = f(x)$ при всех x; $f(x) = f(y)$ тогда и только тогда, когда $x = y \pmod{I_f}$, где I_f — главный идеал, порожденный элементом $1 + a + b$. Для рассматриваемого случая $f(x)$ есть структурный гомоморфизм B на $[b, a]$, и x тогда и только тогда является точкой накопления множества E из B_f, когда x принадлежит $[b, a]$ и E содержит бесконечное множество точек класса конгруэнтности x по модулю I_f. Главный идеал, порожденный элементом $a + b$, есть группа гомеоморфизмов B_f на себя. В структуре всех топологий на B объединение орбитальных топологий, индуцированных булевыми функциями, в рассматриваемом частном случае есть самая сильная T_1-топология. А. Х. Лившиц

262. Симметрические функции, инволюции и n-ады в булевой алгебре. Андреоли (Funzioni simmetriche, involuzioni ed n-adi in un'algebra di Boole. Andreoli Giulio), Giorn. mat. Battaglini, 1952—1953, **81**, № 2, 181—198 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

По аналогии с классической задачей о симметрических многочленах в кольце многочленов ставится вопрос об изучении симметрических функций в булевой алгебре. Операции в булевой алгебре обозначаются символами $+$, $\times$ и *. Рассматриваются в булевой алгебре две конкретные симметрические функции, определяемые следующим образом. Пусть $a, b, \ldots, l, m$ — переменные и в произведении $ab \times \ldots \times lm$ к четному числу переменных применена операция * (по одному разу), тогда сумма всевозможных таких произведений обозначается $P(a, b, \ldots, l, m)$. Аналогично этому сумма всевозможных произведений $ab \times \ldots \times lm$, в каждом из которых операция * применена к нечетному числу множителей, обозначается $D(a, b, \ldots, l, m)$. (Например: $P(a, b, c) = abc + ab^*c^* + a^*bc^* + a^*b^*c$; $D(a, b, c, d) = a^*bcd + ab^*cd + abc^*d + abcd^* + ab^*c^*d^* + a^*bc^*d^* + a^*b^*cd^* + a^*b^*c^*d$). Без доказательств формулируется ряд тривиальных свойств функций P и D, а также формулируется 4 свойства, которые на самом деле неверны:

$$P(b, b, c, \ldots, l, m) = D(b, c, \ldots, l, m),$$
$$D(b, b, c, \ldots, l, m) = P(b, c, \ldots, l, m),$$
$$P(b^*, b, \ldots, l, m) = P(b, c, \ldots, l, m),$$
$$D(b^*, b, \ldots, l, m) = D(b, c, \ldots, l, m).$$

$P(a, b) = ab + a^*b^*$ определяет на булевой алгебре известную операцию, которую автор называет диадой и обозначает $a \sim b$. Если в соотношении $a \sim b = c$ зафиксировать a и заставить b пробегать всю булеву алгебру, то получается отображение $I_a(b) = c$ булевой алгебры на себя, которое автор называет инволюцией. Пользуясь функциями P и D, автор доказывает ряд известных свойств (Биркгоф, Теория структур, М., 1952, 217—219) диады и инволюции. Далее как производное понятие от понятий инволюции и диады вводятся понятия триады, тетрады, ... n-ады. Для этих понятий также устанавливается ряд свойств, непосредственно примыкающих к определению.

Примечание референта. Работа изобилует опечатками. Ссылок на какую-либо литературу, в том числе на литературу, где ранее установлен ряд утверждений автора, в работе нет. Ю. И. Соркин

263. О неалгебраических расширениях алгебраических систем. Сода (Über die nicht algebraischen Erweiterungen algebraischer Systeme. Shoda Kenjiro), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 70—73 (нем.)

Алгебраическая система — множество с произвольным числом бинарных операций, определенных не обязательно для всех пар элементов (см., например, Алгебраический реферативный сборник, М. — Л., 1948, вып. III, 690—697).

Настоящая статья является непосредственным продолжением предыдущей работы автора (Osaka Math. J., 1952, **4**, 133—143), где он дает аналог теории алгебраических расширений полей и расширений групп.

Подсистема B системы A называется нормальной, если она является полным прообразом элемента при некотором гомоморфизме системы A. Расширение $A' = A \cap B$ системы A посредством нормальной подсистемы B называется распадающимся, если $A \cap B = 0$. Рассмотрен ряд свойств распадающихся расширений. В частности, показано, что всякое расширение Ω системы A является алгебраическим над некоторым распадающимся расширением A' системы A, и указаны условия, при которых A' однозначно определено. Л. М. Глускин

См. также: 9, 10, 11, 12, 41 К, 112, 125, 136, 150, 151, 153, 154, 155, 156, 157, 163, 169, 170, 178, 285, 298, 301, 359, 415, 580, 617, 622, 629 К, 702, 715, 749, 760, 764, 793

ТОПОЛОГИЯ

264. Кельтские орнаментальные переплетения и топология. Терстон (Celtic interlacing patterns and topology. Thurston H. A.), Sci. News, 1954, № 33, 50—62 (англ.)

Популярная статья. Доказывается известная теорема Гаусса о замкнутых самопересекающихся кривых (см., например, Радемахер, Теплиц, Числа и фигуры, ОНТИ, 1938, стр. 74). С. С. Рышков

265. Замечание о счетно паракомпактных пространствах. Исеки (A note on countably paracompact spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 5, 350—351 (англ.)

Открытое покрытие γ топологического пространства R называется локально (соответственно звездно) конечным, если у каждой точки $x \in R$ существует окрестность Ox (соответственно $Ox \in \gamma$), пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия γ. Показывается: если во всякое счетное открытое покрытие пространства R можно вписать локально конечное покрытие (счетная паракомпактность), то во всякое счетное открытое покрытие можно вписать и звездно конечное покрытие (см. Dowker C. H., Canad. J. Math., 1951, 3, 219—224). Ю. М. Смирнов

266. **Топологические пространства, в которых можно ввести полную равномерную структуру. К а ц Г. И.,** Докл. АН СССР, 1954, 99, № 6, 897—900

Исследуются топологические пространства, в которых можно ввести полную равномерную структуру, или, что то же самое, пространства, которые полны относительно своей так называемой универсальной или максимальной равномерной структуры (для этой структуры равномерно непрерывными являются все непрерывные функции). Оказывается, что эти пространства (автор называет их P-пространствами) вполне характеризуются следующим свойством: для каждого расширения $\tilde{R}$ такого пространства R существует обобщенная метрика пространства R, не продолжаемая на $\tilde{R}$. Другая характеристика P-пространств заключается в том, что для каждого содержащегося в чеховском бикомпактном расширении βR расширения $\tilde{R}$ пространства R существует не продолжаемое на $\tilde{R}$ локально конечное допустимое открытое покрытие пространства R (покрытие $\{\Gamma_\alpha\}$ называется допустимым, если существует такое покрытие $\{B_\alpha\}$, что каждое B_α функционально отделимо от соответствующего дополнения $R \setminus \Gamma_\alpha$). Скажем, что система множеств $\{A_\lambda\}$ является c-системой, если в каждом локально конечном допустимом покрытии γ имеется элемент Γ, содержащий некоторое A_λ. Оказывается, что непустота пересечений всевозможных максимальных центрированных c-систем замкнутых множеств также характеризует P-пространства.

Примечание референта. По существу в работе исследуется полнота так называемых максимальных пространств близости, т. е. пространств, в которых два множества далеки в том и только том случае, когда эти множества отделимы функционально. Для общего случая любых пространств близости вопрос о их полноте подробно рассмотрен референтом (РЖМат, 1954, 123, 2051). Ю. М. Смирнов

267. **Обобщение теоремы Жордана о кривых. Х о м м а** (An extension of the Jordan curve theorem. H o m m a T a t s u o), Yokohama Math. J., 1953, 1, № 1, 126—129 (англ.)

Даются необходимые и достаточные условия для того, чтобы гомеоморфное отображение локально связного континуума, расположенного на двумерной сфере, в двумерную же сферу можно было продолжить в гомеоморфное отображение сферы на сферу. Л. Д. Кудрявцев

268. **О расширениях метрик. Т о м и н а г а** (On extensions of a metric. T o m i n a g a A k i r a), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, A17, № 2, 185—191 (англ.)

Доказываются следующие два предложения:

1. Если замкнутый n-мерный куб Q^n топологически вложен в некоторое регулярное пространство R со счетной базой, то метрику данного куба можно продолжить в ограниченную метрику всего пространства R;

2. Если евклидово n-мерное пространство E^n топологически вложено в качестве замкнутого подмножества в некоторое регулярное локально компактное пространство R со счетной базой, то метрику пространства E^n можно продолжить в метрику всего пространства R. Ю. М. Смирнов

269. **Особенности n-покрытий для непрерывных отображений плоской области. Д о л ь к е р** (Exceptions to n-covering for continuous mappings of a plane region. D o l c h e r M a r i o), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 95 (англ.)

Пусть Φ — непрерывное отображение плоской области G, расположенной в ориентированной плоскости Π и ограниченной жордановой кривой γ, в ориентированную плоскость Π'. Пусть A' — некоторая компонента множества $\Pi' \setminus \Phi(\gamma)$ и $n = n(A')$ — степень отображения Φ на A'. Точки $x \in A'$, для которых полный прообраз $\Phi^{-1}(x)$ содержит менее чем n точек, называются особыми. Утверждается, что в случае, когда A' содержит конечное число k особых точек x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ соответственно каждая с числом прообразов $\mu_i < n$, имеет место неравенство $\sum_{i=1}^{k} \mu_i \geqslant (k-1)n + 1$. Отсюда следует, в частности, что при сделанных предположениях в A' не может быть особых точек больше чем $n - 1$. Л. Д. Кудрявцев

270. **О теореме Картрайта—Литтлвуда относительно неподвижных точек. Р е й ф е н б е р г** (On the Cartwright — Littlewood fixed point theorem. R e i f e n b e r g E. R.) Ann. Math., 1955, 61, № 1, 137—139 (англ.)

Указывается, что доказанная Картрайтом и Литтлвудом теорема о неподвижных точках (РЖМат, 1955, 4931) была также доказана Гамильтоном и Нейманом на основе брауэровской теоремы о переносах плоскости. Автор дает этой теореме новое доказательство, основная идея которого, как он указывает, содержится в работе Брауэра (Brouwer L. E. J., Proc. sect. sci. Koninkl. akad. wetensch. Amsterdam, 1911, 13, part 2, 767—777). В заключение приведены некоторые замечания о случае, когда гомеоморфное преобразование плоскости, рассматриваемое в теореме Картрайта-Литтлвуда, не сохраняет ориентации. В. Г. Болтянский

271. **О существенных особенностях семейства отображений. В е й е р** (Über die wesentlichen Singularitäten einer Abbildungsschar. W e i e r J o s e f), Math. Ann., 1955, 128, № 5, 459—470 (нем.)

Изучается поведение неподвижных точек при деформациях. Пусть f — непрерывное отображение полиэдра P в себя и a — неподвижная точка этого отображения. Неподвижная точка a называется аффинной, если она является внутренней точкой некоторого главного симплекса в P (т. е. симплекса, к которому не примыкают симплексы бо́льших размерностей) и отображение f аффинно вблизи a. В зависимости от знака этого аффинного отображения точке a приписывается индекс $+1$ или -1. Пусть теперь a — изолированная неподвижная точка отображения f и U — такая окрестность точки a, замыкание которой не содержит других неподвижных точек. Тогда существует такое отображение f', гомотопное f и совпадающее с f на $P \setminus U$, что все неподвижные точки отображения f', лежащие в U, аффинны. Сумма индексов тех неподвижных точек отображения f, которые лежат в U, называется индексом изолированной точки a. Индекс каждой изолированной неподвижной точки a определен однозначно (не зависит от выбора отображения f'); если этот индекс отличен от нуля, то точка a называется существенной.

Доказывается следующая теорема: Пусть f^t — непрерывное семейство отображений полиэдра P в себя, а F — соответствующее отображение произведения $P \times I$ в P. Обозначим через S множество всех таких точек

$(p, \tau) \in P \times I$, для которых p есть существенная неподвижная точка отображения f^τ. Тогда (если множество S непусто) существуют такие (возможно пересекающиеся) интервалы $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$ в конечном или счетном числе ($\Lambda_i \subset I$), такие непрерывные отображения a_i: $\Lambda_i \to P$, $i = 1, 2, \ldots$, и такие отличные от нуля целые числа $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$, что 1) при $\tau \in \Lambda_i$ точка $a_i(\tau)$ является для отображения f^τ (существенной) неподвижной точкой с индексом ζ_i; 2) множества $a_i(\Lambda_i)$ попарно не пересекаются; 3) $\overline{\bigcup_i a_i(\Lambda_i)} = S$. В. Г. Болтянский

272. Гомотопическая инвариантность алгебраического числа неподвижных точек. Вейер (Die Homotopieinvarianz der algebraischen Fixpunktzahl. Weier Josef), Math. Z., 1954, **61**, № 1, 82—93 (нем.)

Пусть P — триангулируемое компактное многообразие, f — его непрерывное отображение в себя, имеющее конечное число неподвижных точек. Тогда алгебраическое число неподвижных точек (сумма индексов) является гомотопическим инвариантом отображения f; это легко доказывается с использованием инвариантов, введенных Хопфом и Лефшецем. Автор проводит прямое доказательство этого предложения, причем его доказательство не предполагает триангулируемости многообразия. Другое доказательство этого же предложения автор дал в одной из предыдущих своих публикаций (РЖМат, 1955, 139). В. Г. Болтянский

273. Теорема о красках на ориентируемых поверхностях рода $p > 0$. Рингель (Farbensatz für orientierbare Flächen vom Geschlechte $p > 0$. Ringel Gerhard), J. reine und angew. Math., 1954, **193**, № 1/2, 11—38 (нем.)

Доказано, что для любой ориентируемой поверхности рода $p > 0$ хроматическое число χ_p равно максимальному числу областей соседства. Кроме того, получена следующая оценка:

$$\left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right] - 2 \leqslant \chi_p \leqslant \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right].$$

См. РЖМат, 1954, 3643. М. М. Постников

274. О теоремах Борсука — Улама, Какутани — Ямабе — Юдзобо и Дайсона. И. Ян Чжун-дао (On theorems of Borsuk — Ulam, Kakutani — Yamabe — Yujobô and Dyson. I. Yang Chung-Tao), Ann. Math., 1954, **60**, № 2, 262—282 (англ.)

Доказывается следующая теорема, ранее известная лишь для $n = 2$ (Dyson, Ann. Math., 1951, 54, 534—536): непрерывная вещественная функция на сфере S^n имеет одинаковые значения в $2n$ точках, являющихся концами некоторых n взаимно ортогональных ее диаметров.

Для доказательства автор сперва обобщает теоремы Борсука — Улама (непрерывное отображение сферы S^n в евклидово пространство E^n переводит некоторую пару антиподов в одну точку) и Какутани — Ямабе — Юдзобо (непрерывная вещественная функция, заданная на S^n, имеет одинаковые значения в концах некоторых $n+1$ взаимно ортогональных ее радиусов), давая им чисто топологические формулировки путем замены антиподов и ортогональности топологическими суррогатами. Непосредственным следствием этих обобщенных теорем 1 и 2 оказывается теорема 3, являющаяся соответственным обобщением n-мерной теоремы Дайсона.

В. А. Ефремович

275. Теорема об антиподах и ортогональных точках. Ратри (An antipodal-point orthogonal-point theorem. Rattray B. A.), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 502—512 (англ.)

Доказывается следующее предложение, родственное теоремам Какутани и Борсука — Улама (реф. 274): Непрерывное отображение сферы S^n в себя, переводящее антиподы в антиподы, отображает $n+1$ некоторых взаимно ортогональных точек в точки, попарно ортогональные. Очевидно, что эта теорема может быть сформулирована и так: Непрерывное отображение эллиптического пространства P^n в себя, индуцирующее тождественное отображение фундаментальной группы, переводит $n+1$ вершин некоторого максимального правильного n-мерного симплекса в вершины такого же n-мерного симплекса. В. А. Ефремович

276. Теорема об униформизации непрерывных функций и ее приложение к доказательству теоремы Дайсона о непрерывных отображениях поверхности сферы. Заранкевич (Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique. Zarankiewicz K.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, **2**, № 3, 117—120 (франц.) См. РЖМат, 1955, 1126.

277. Об изометрии евклидовых пространств. Бекман, Куорлес (On isometries of Euclidean spaces. Beckman F. S., Quarles D. A., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 810—815 (англ.)

Рассматривается (не предполагающееся однозначным) отображение T евклидова пространства E^n, $2 \leqslant n < \infty$, в себя. Предполагается существование такого числа $a > 0$, что для любых двух точек $x \in E^n$, $y \in E^n$, для которых $\rho(x, y) = a$, имеет место соотношение $\rho(Tx, Ty) = a$. Доказывается, что в этом случае T есть взаимно однозначное изометрическое отображение пространства E^n на себя. Приводятся примеры, показывающие, что эта теорема неверна для случаев $n = 1$ и $n = \infty$.

Л. Д. Кудрявцев

278. Характеристика неподобий деревьев Хусими. Харари, Норман (The dissimilarity characteristic of Husimi trees. Harary Frank, Norman Robert Z.), Ann. Math., 1953, **58**, № 1, 134—141 (англ.)

Граф G можно рассматривать как конечное множество элементов («вершин»), на котором задано иррефлексивное и симметрическое отношение («смежность») и выбрана подгруппа $\mathfrak{N}$ группы всех отображений множества вершин на себя с сохранением смежности. Две смежные вершины образуют ребро. Такое определение позволяет объединить рассмотрение обыкновенных и многокорневых (multiply rooted) графов. Вершины подобны, если в $\mathfrak{N}$ имеется отображение, переводящее их друг в друга. Аналогично определяется подобие ребер, циклов и вообще подграфов. Точка симметрии цикла есть конец двух смежных подобных ребер цикла, неподвижный при преобразовании подобия. Линия симметрии графа есть ребро с подобными концами. Вершина с минимальным максимумом расстояний до других вершин называется центральной, а вершина, изъятие которой нарушает связность графа,— разделяющей. Звезда есть связный граф без разделяющих вершин. Дерево Хусими есть связный граф, в котором любые два цикла не имеют общих ребер. Пусть p^*, k^*, c^* суть соответственно числа неподобных вершин, ребер и циклов в дереве Хусими H, и пусть при этом c_p^* — число циклов ровно с двумя классами подобия точек симметрии, c_k^* — число циклов ровно с двумя классами подобия линий симметрий и a — число линий симметрии, не входящих ни в один цикл.

Теорема. В любом дереве Хусими $p^* - (k^* - a) + c^* - c_p^* + c_k^* = 1$.

Левая часть равенства называется характеристикой неподобий дерева Хусими и представляет собой усовершенствование эйлеровой характеристики. Ранее Оттер (Otter R., Ann. Math., 1948, 49, 583—599) показал, что для обычных деревьев $p^* - (k^* - a) = 1$. Теорема доказывается с помощью трех лемм, из которых самостоятельный интерес представляет

Лемма 1. В связном графе G существует подграф, являющийся звездой и содержащий множество $C(G)$ центральных вершин графа G.

Звезда с максимальным числом вершин и ребер, содержащаяся в G и содержащая $C(G)$, называется центральной. Три возможных типа центральных звезд в деревьях Хусими суть вершина, пара вершин, соединенных мостиком (в смысле Кёнига), и цикл.

Применение теоремы для подсчета деревьев Хусими иллюстрируется выводом формулы для числа кактусов, т. е. деревьев Хусими, где каждое ребро входит ровно в один 3-цикл. Кактус с выделенной вершиной называется кактусом с корнем (rooted cactus). Пусть δ_n и Δ_n суть соответственно числа кактусов с корнем, имеющих n треугольников («листьев кактуса»), и пусть $\delta(x) = \delta_0 + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots$, $\Delta(x) = \Delta_0 + \Delta_1 x + \Delta_2 x^2 + \ldots$. Тогда $\Delta(x)$ находится из функционального уравнения $\Delta(x) = \exp \Sigma_{r=1}^{\infty} (x^2/2r)\,[\Delta^2(x^r) + \Delta(x^{2r})]$ (Harary F., Uhlenbeck G. E., Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, 168).

Так как в кактусах $c_p^* = c_k^* = 0$, $p^* - k^* + c^* = 1$, то $\delta(x) = \Delta(x) + (x/3)\,[\Delta^3(x) - \Delta(x^3)]$. Аналогичным методом выводится полученная ранее Оттером формула $t(x) = T(x) - \frac{x}{2}\,[T^2(x) - T(x^2)]$, где $t(x) = t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + \ldots$, $T(x) = T_0 + T_1 x + T_2 x^2 + \ldots$, а t_n и T_n суть соответственно число деревьев и деревьев с корнем, имеющих n ребер. Подсчет произвольных деревьев Хусими дан в другой статье (РЖМат, 1953, 1128).

Н. Г. Поваров

279. Характеристика неподобий линейных графов. Харари, Норман (The dissimilarity characteristic of linear graphs. Harary Frank, Norman Robert Z.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 131—135 (англ.)

Многокорневым графом называется граф, множество вершин которого разбито на непересекающиеся классы Π_i. Многокорневые графы G и G' изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами их вершин Π и Π', сохраняющее инцидентность и индуцирующее взаимно однозначное соответствие между классами Π_i и Π'_j. Автоморфизм есть изоморфизм многокорневого графа на себя, сохраняющий классы. Две вершины многокорневого графа подобны, если одна из них может быть переведена в другую некоторым автоморфизмом. Аналогично определяется подобие двух ребер и двух циклов. Вершина цикла, инцидентная двум подобным ребрам этого цикла, называется исключительной. Ребро графа, концы которого подобны, также называется исключительным. Число неподобных вершин в многокорневом графе G обозначается через p, число неподобных ребер — через k, число неподобных исключительных ребер — через k_e.

Пусть $[v]$ и $[\lambda]$ суть классы подобия соответственно вершины v и ребра λ в G, и пусть все ребра и все циклы в G ориентированы, причем ориентации подобных ребер и подобных циклов одинаковы. Пусть L — целочисленная цепь ребер в G, и пусть $L(\lambda)$ и $\overline{L}(\lambda)$ суть сумма положительных и сумма отрицательных коэффициентов ребер из $[\lambda]$ в L. Цепь L линейно зависима относительно подобия с циклами $z_1, z_2, \ldots, z_m$ из G, если существуют такие целые числа $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$, что хотя бы одно из них не равно нулю и для всякого класса подобия $[\lambda]$ из G

$$a_0 L[\lambda] = \sum_{i=1}^{m} a_i z_i[\lambda],\quad a_0 \overline{L}[\lambda] = \sum_{i=1}^{m} a_i \overline{z_i}[\lambda].$$

Базис циклов многокорневого графа G относительно подобия (dissimilarity cycle basis) есть минимальное множество циклов, от которого линейно зависит относительно подобия любой цикл в G. Цикл, в котором нет исключительных ребер и нет пар подобных ребер с противоположными ориентациями относительно цикла, называется нормальным. Цикл называется регулярным, если он линейно зависит относительно подобия от множества всех нормальных циклов, и называется исключительным в противном случае.

Теорема. Пусть G — связный многокорневой граф, B — любой его базис циклов относительно подобия, c — число циклов в B и c_e — число исключительных циклов в B. Тогда $p - (k - k_e) + (c - c_e) = 1$. Это уравнение, левая часть которого называется характеристикой неподобий графа, обобщает уравнение Оттера для деревьев (Otter R., Ann Math., 1948, 49, 583—599) и уравнение авторов для деревьев Хусими (Ann. Math., 1953, 58, 134—141; см. также реф. 278). Характеристика неподобий представляет собой усовершенствование эйлеровой характеристики графа, а доказанная в статье теорема — теоремы Эйлера о базисе циклов графа. Полученное уравнение можно использовать при подсчетах графов, в частности в связи с проблемами статистической механики.

Г. Н. Поваров

280. Об одном числовом инварианте узлов. Шуберт (Über eine numerische Knoteninvariante. Schubert Horst), Math. Z., 1954, 61, № 3, 245—288 (нем.)

Всякий узел можно представить в R^3 ломаной линией, состоящей из отрезков, лежащих на двух параллельных (горизонтальных) плоскостях, и из перпендикулярных к ним отрезков, идущих от одной плоскости к другой. Половину наименьшего возможного числа (всегда четного) перпендикулярных (вертикальных) отрезков при таких представлениях автор называет наименьшим мостовым числом узла (для краткости: мостовым числом узла), ибо это есть наименьшее число «мостиков», которые приходится перекидывать над плоскостью, когда вся остальная часть узловой линии лежит на этой плоскости. Представления, при которых вся узловая линия лежит на одной плоскости, не допускаются, так что мостовое число круга есть 1, а не 0. Мостовое число узла $\varkappa$ обозначается через $b(\varkappa)$.

Доказываются следующие свойства нового инварианта: 1) Круг есть единственный узел с мостовым числом 1. 2) Если λ — сопроводительный узел порядка α для узла $\varkappa$ (относительно определений встречающихся здесь понятий см. РЖМат, 1955, 2605), то $\alpha b(\lambda) \leqslant b(\varkappa)$, $b(\lambda) < b(\varkappa)$. Отсюда непосредственно вытекает, что порядок сопроводительного узла для узла $\varkappa$ не может превосходить $b(\varkappa)/2$ и что узлы с мостовым числом 2 просты. 3) Всякий узел $\varkappa$ может иметь лишь конечное число сопроводительных узлов, причем каждый сопроводительный узел для каждого из порядков, с которыми он входит в $\varkappa$, имеет конечную кратность. Кратностью узла λ, являющегося сопроводительным узлом порядка α для узла $\varkappa$ (один и тот же сопроводительный узел может входить в $\varkappa$ с различными порядками), называется при этом наибольшее число трехмерных колец (полных торов) в сферическом пространстве $\mathfrak{S}^3$, содержащих представляющую данный узел $\varkappa$ линию k, вложенную в них с порядком α, средние линии которых представляют λ и каждое из которых содержит внутри себя замкнутые дополнения

остальных трехмерных колец $\mathfrak{S}^3$. При разложении узла на простые множители так определенная кратность для каждого из примарных узлов, на которые разлагается данный узел, совпадает с кратностью (сцепенью), с которой он входит в разложение данного узла. Автор отмечает, что именно вопрос о конечности числа сопроводительных узлов и о естественном определении кратности сопроводительного узла и привел его к введению мостового инварианта. 4) Для произведения узлов уменьшенное на единицу мостовое число аддитивно. 5) Если $\varkappa$ — отличный от круга зацепленный узел с диагональным узлом λ, то $b(\varkappa) = 2b(\lambda)$. Отсюда вновь (РЖМат, 1955, 2605) получается, что зацепленный узел, диагональным узлом которого служит круг, всегда прост. 6) Если $\varkappa$ — узел, представимый обегающей косой с носителем λ и числом нитей α (в частности, обегающий узел с отличным от круга носителем λ и обегающим коэффициентом α), то $b(\varkappa) = \alpha b(\lambda)$. 7) Если узел $\varkappa$ представим замкнутой косой с числом нитей α, то $b(\varkappa) \leqslant \alpha$. При этом $b(\varkappa)$ может быть меньше наименьшего числа нитей замкнутых кос, которыми узел $\varkappa$ может быть представлен (каждый узел представим замкнутыми косами). Например, замкнутыми косами с числом нитей 2 представимы лишь круг и торические узлы с обегающим коэффициентом 2, а так как единственные зацепленные узлы, являющиеся вместе с тем одновременно торическими узлами, суть зеркально симметричные друг другу трилистники (как вытекает из прежних результатов автора), то остальные зацепленные узлы, имеющие диагональным узлом круг, представимы лишь замкнутыми косами с более чем двумя нитями, тогда как их мостовое число на основании свойства 5) равно 2. 8) Если $\varkappa$ — торический узел с обегающим коэффициентом α и индексом зацепления δ (со средней линией тора, на котором лежит узловая линия), причем $\alpha < |\delta|$ (что всегда осуществимо), то $b(\varkappa) = \alpha$.

М. Ф. Бокштейн

281. Регулярная сходимость. Уайт (Regular convergence. White Paul A.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 5, 431—443 (англ.)

Обзор исследований различных авторов, главным образом Уайберна, Арнольда, Уайлдера (Whyburn G. T., Arnold H. A., Wilder R. L.) и автора настоящей статьи, посвященных регулярной сходимости последовательностей замкнутых множеств в компактах или в бикомпактных пространствах, опубликованных в основном за последние 20 лет. Приводятся определения различных типов регулярной сходимости и их свойства, касающиеся главным образом сохранения при переходе к пределу гомологических или гомотопических характеристик членов последовательности, а также обратного влияния свойств предельного множества на множества последовательности. Так, для последовательности замкнутых множеств A_i компактного метрического пространства говорят, что A_i r-регулярно сходятся к A, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие N и $\delta > 0$, что всякий вьеторисовский цикл (по модулю 2 или по несколько более общей группе коэффициентов) размерности $j \leqslant r$ в подмножестве диаметра $< \delta$ множества A_n при $n > N$ гомологичен нулю в подмножестве диаметра $< \varepsilon$ множества A_n (если $r = 0$, то нужно, очевидно, рассматривать лишь нульмерные циклы, способные к ограничению; в этом случае сходимость называют просто регулярной). Если все A_i совпадают с A, то это есть обычное определение локальной j-связности для $j \leqslant r$. Оказывается, что если A_i r-регулярно сходятся к A, то имеют место следующие предложения: а) если $p^r(A_i) \leqslant n$ (p^r означает r-мерное число Бетти) для всех i, то $p^r(A) \leqslant n$; б) если $p^r(A) \leqslant n$, то $p^r(A_i) \leqslant n$ для всех i, начиная с некоторого; в) если все A_i локально j-связны при $j \leqslant r$, то этим же свойством обладает и A. Другой тип регулярной сходимости получается при замене гомологических требований гомотопическими. Рассматриваются и еще некоторые типы регулярной сходимости множеств. Кроме того, рассматривается поведение обобщенных многообразий при r-регулярной сходимости. Рассматриваются также строение и свойства пространств, точками которых служат все локально j-связные при $j \leqslant r$ замкнутые подмножества некоторого компакта, а сходимость определена как r-регулярная сходимость этих подмножеств. Наконец, рассматривается связь r-регулярной сходимости с r-монотонными непрерывными отображениями компактов (т. е. такими отображениями T, при которых $p^i(T^{-1}(b)) = 0$ для $i \leqslant r$, где b — любая точка образа).

Доказательства не приведены; даны ссылки на оригинальные работы. Библ. 31 назв.

М. Ф. Бокштейн

282. Замечание о деформационном ретракте. Аоки (Note on deformation retract. Aoki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 7, 538—541 (англ.)

Изучаются некоторые свойства отображений пространств в тор $T^{2n} = S^n \times S^n$. Методы доказательств близки к методам Спаньера (Spanier E., Ann. Math., 1949, 50, 203—245). Приведем для примера одну из доказанных теорем.

Пусть f — отображение пары (X, A) в $(Y \times Y, (y, y))$. Отображение $F: (X \times I, A \times I) \to (Y \times Y, (y, y))$ называется нормализующей гомотопией для f, если выполнены условия $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) \in (Y \times y) \cup (y \times Y)$. Отображение $F(x, 1)$ называется нормализацией отображения f.

Теорема. Пусть (X, A) — такая пара, что для любого замкнутого множества $F \subset X \setminus A$ имеем $\dim F < 4n$. Тогда для всякого отображения $f: (X, A) \to (T^{2n} \times T^{2n}, q \times q)$ существует такая нормализация g, что f гомотопно g относительно $f^{-1}[(T^{2n} \times q) \cup (q \times T^{2n})]$.

И. А. Бочек

283. Гомологические резольвенты комплексов с операторами. Хеллер (Homological resolutions of complexes with operators. Heller Alex), Ann. Math., 1954, 60, № 2, 283—303 (англ.)

Пусть K — коммутативное кольцо, а Λ — некоторая K-алгебра с единицей, снабженная дополнением (т. е. таким гомоморфизмом $\sigma: \Lambda \to K$, что $\sigma(k \cdot 1) = k$, где $k \in K$) и диагональным гомоморфизмом $\Lambda \to \Lambda \otimes_K \Lambda$. Левый Λ-модуль F называется (следуя Картану и Эйленбергу) проективным, если для любых левых Λ-модулей A и B, любого гомоморфизма $f: F \to B$ и любого эпиморфизма $\alpha: A \to B$ существует такой гомоморфизм $f': F \to A$, что $f = \alpha \circ f'$. Кольцо K называется наследственным, если любой подмодуль проективного K-модуля проективен. Комплексом автор называет градуированный Λ-модуль с граничным оператором степени — 1. Однородные компоненты комплекса X обозначаются через X_q. Группы гомологий комплекса X обозначаются через $H_q(X)$. Треугольным комплексом автор называет дважды градуированный Λ-модуль $T = \Sigma_{0 \leqslant i < j} T_{ij}$, в котором для любого $k \geqslant 1$ и любых i, j, подчиненных условию $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant k - 1$, заданы гомоморфизмы $d_{ijk}: T_{ik} \to T_{j, k-1}$, причем $(\Sigma d_{ijk}) \circ (\Sigma d_{ijk}) = 0$. Любой треугольный комплекс T можно рассматривать как комплекс с однородными компонентами $\Sigma_i T_{ij}$. Кроме того, для любого $q \geqslant 0$ последовательность $T_{q\bullet} = (T_{q,q}, T_{q,q+1}, \ldots, T_{q,k}, \ldots)$ является комплексом относительно отображе-

ний d_{qqk}. Пусть X — такой подкомплекс (однородный подмодуль) треугольного комплекса T, что $X_i \subset T_{0,i}$, и пусть включение $X \subset T$ порождает изоморфизм групп гомологий. Если модули $T_{i,j}$, $j>0$, и $T_{i,0}/X_i$ проективны, и для любого i комплекс T_{i*} гомологически тривиален, то треугольный комплекс T называется гомологической резольвентой комплекса X. Оказывается, что для любого K-проективного Λ-комплекса существует единственная (с точностью до эквивалентности) гомологическая резольвента.

Пусть T — гомологическая резольвента комплекса X, A — некоторый подкомплекс комплекса X, $L^{q-x}(T)$ — комплекс, j-я компонента которого равна $\Sigma_{i\leqslant q} T_{i,j}$, а граница определяется теми из отображений d_{ijk}, которые отображают $L^{q-1}(T)$ в $L^{q-1}(T)$. Тогда $(q+1)$- мерная группа эквивариантных когомологий $H^{q+1}_{\Lambda}(L^{q-1}(T), A : G)$ комплекса $L^{q-1}(T)$ относительно подкомплекса A с коэффициентами в некотором левом Λ-модуле G не зависит от T и обозначается через $H^{q+1}(X, A, G)$. Так как все элементы модуля $T_{q,q}$ являются циклами, то определено естественное отображение $\eta_q : T_{q,q} \to H_q(T) = H_q(X)$. Рассмотрим отображение $\eta_q \circ \delta_q : L^{q-1}_{q+1}(T) \longrightarrow H_q(X)$, где $\delta_q = \Sigma_{i<q} d_{i,q,q+1} : L^{q-1}_{q+1}(T) \to T_{q,q}$. Оказывается, что это отображение является $(q+1)$-мерным эквивариантным коциклом комплекса $L^{q-1}(T)$ относительно подкомплекса A над модулем $H_q(X)$. Его класс когомологий не зависит от T и обозначается через $\mathfrak{k}^{q+1}(X, A)$. Для $q=2$ этот класс совпадает с известным инвариантом Эйленберга и Мак-Лейна. Роль классов $\mathfrak{k}^{q+1}$ аналогична роли, которую в теории гомотопий играют введенные референтом факторы пространства, и определяется следующей теоремой:

Пусть X, X' — два комплекса, A — такой подкомплекс комплекса X, что фактор-комплекс X/A проективен, и $f : X^q + A \to X'$ — произвольное допустимое отображение, где $X^q = \Sigma_{i\leqslant q} X_i$. Отображение f естественным образом порождает гомоморфизм $\hat{f} : H^{q+1}(X', X'; G) \to H^{q+1}(X, A, G)$. Оказывается, что отображение f тогда и только тогда можно продолжить до отображения $X^{q+1} + A \to X$, порождающего данный гомоморфизм: $\alpha : H_q(X) \to H_q(X')$, когда $\hat{f}\mathfrak{k}^{q+1}(X', X') = \alpha_* \mathfrak{k}^{q+1}(X, A)$.

В конце работы автор прилагает развитую им теорию к периодическим отображениям и излагает простейшие топологические приложения (получая, в частности, известную теорему Смита). М. М. Постников

284. **Гомологические резольвенты комплекса с операторами. Хеллер** (Homological resolutions of complexes with operators. Heller Alex), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 228 (англ.)

Краткое сообщение, в котором излагаются результаты предыдущей работы (реф. 283). М. М. Постников

285. **Аксиоматическое определение алгебры коцепей в рамках теории Лере. Фари** (Notion axiomatique de l'algèbre de cochaînes dans la théorie de J. Leray. Fáry István), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 2, 97—135 (франц.)

Изложение основных понятий теории перекрытий Лере (РЖМат, 1953, 127). В отличие от Лере (который, имея в виду коцепи, когомологии и т. п. называл их цепями, гомологиями и т. п.) автор употребляет ко-терминологию, подробно объясняя весьма основательные причины этого изменения. М. М. Постников

286. **О категории классов когомологий пространства. Фари** (Sur la catégorie des classes de cohomologie d'un espace. Fáry István), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 215 (франц.)

Формулируется определение и основные свойства категории класса когомологий пространства. (РЖМат, 1954, 3980). А. С. Шварц

287. **Гомологические произведения в $K(\Pi, n)$. Маклейн** (The homology products in $K(\Pi, n)$. MacLane Saunders), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 642—651 (англ.)

Сравниваются различные умножения, которые можно определить в группе гомологий $H(\Pi, n)$ комплекса $K(\Pi, n)$, и доказывается их совпадение. В связи с этим подробно рассматриваются умножения в различных группах гомологий H-пространств. М. М. Постников

288. **Колейные группы. I. Баррат** (Track groups. (I). Barratt M. G.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 17, 71—106 (англ.)

Дается определение гомотопических групп весьма общего вида, которые автор называет колейными (track) группами. Изучаются некоторые свойства этих групп.

Пусть $[P_\lambda]$ и $[X_\lambda]$ — два семейства пространств; индексы λ пробегают одно и то же множество Λ; рассматриваемые пространства могут иметь общие точки. Отображением $f : [P_\lambda] \to [X_\lambda]$ называется такое семейство непрерывных отображений $f_\lambda : P_\lambda \to X_\lambda$, что f_λ и f_μ согласованы на $P_\lambda \cap P_\mu$ для любых $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in \Lambda$. При помощи отображения $[P_\lambda \times I] \to [X_\lambda]$, где I — единичный отрезок, определяется гомотопия двух отображений семейства $[P_\lambda]$ в $[X_\lambda]$.

Предположим теперь, что все пространства семейства $[X_\lambda]$ содержат общую точку x_0, и обозначим через $(P_\lambda)^{(m)}(X_\lambda; x_0)$ множество всех гомотопических классов отображений вида $f : [P_\lambda \times I^m, P_\lambda \times I^m] \to [X_\lambda, x_0]$. Если f и g — два таких отображения, то формула

$$(f+g)_\lambda(p, x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} f_\lambda(p, 2x_1, x_2, \ldots, x_m), & 0 \leqslant x_1 \leqslant 1/2, \\ g_\lambda(p, 2x_1 - 1, x_2, \ldots, x_m), & 1/2 \leqslant x_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

в которой λ пробегает множество Λ, а $p \in P_\lambda$, определяет новое отображение $f+g$. После перехода к гомотопическим классам мы получаем операцию сложения в множестве $(P_\lambda)^m(X_\lambda; x_0)$, превращающую это множество в группу. Получаемые таким образом «колейные» группы коммутативны при $m > 1$.

Колейные группы обладают многими свойствами, аналогичными свойствам обычных гомотопических групп. Всякое отображение $\psi : [X_\lambda, x_0] \to [Y_\lambda, y_0]$ индуцирует гомоморфизм $\psi_* : (P_\lambda)^m(X_\lambda; x_0) \to (P_\lambda)^m(Y_\lambda; y_0)$. Кроме того, всякое отображение $\varphi : [P_\lambda] \to [Q_\lambda]$ индуцирует гомоморфизм $\varphi^* : (Q_\lambda)^m(X_\lambda; x_0) \to (P_\lambda)^{(m)}(X_\lambda; x_0)$. Эти гомоморфизмы определяются гомотопическими классами отображений ψ и φ соответственно, причем имеют место соотношения $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$; $\varphi^* \circ \psi_* = \psi_* \circ \varphi^*$; $(\psi^2 \circ \psi^1)_* = \psi^2_* \circ \psi^1_*$, вытекающие из свойства ассоциативности для композиции отображений. Если X_0 — пересечение всех пространств X_λ, а X_0' — линейная компонента пространства X_0, содержащая точку x_0, то всякий путь σ в X_0', ведущий из x_0 в x_1, определяет

изоморфизм $\sigma^*:(P_\lambda)^m(X_\lambda;x_1)\to(P_\lambda)^m(X_\lambda;x_0)$. Благодаря этому в X_0' возникает локальное семейство колейных групп. Двумя простыми теоремами о поведении колейных групп при вырезании и отождествлениях заканчивается гл. 1.

В гл. 2 автор ограничивается случаем, когда множество Λ состоит из двух элементов. В соответствии с этим обозначение $(P_\lambda)^m(X_\lambda;x_0)$ превращается в $(P_1,P_2)^m(X_1,X_2;x_0)$. Считая пространство X фиксированным, обозначим группу $(P_1,P_2)^m(X,x_0;x_0)$ просто через $(P_1,P_2)^m$. Основной задачей гл. 2 является построение точной последовательности

$$\ldots\to(P,Q)^m\xrightarrow{i^*}(P,R)^m\xrightarrow{j^*}(Q,R)^m\xrightarrow{\delta^*}(P,Q)^{m-1}\to\ldots$$

для тройки $P\supset Q\supset R$. Здесь гомоморфизмы i^* и j^* порождаются вложениями $i:[P,R]\to[P,Q]$ и $j:[Q,R]\to[P,R]$ а δ^* — граничный гомоморфизм, сравнительно сложно определяемый. Для построения этой точной последовательности приходится налагать на пространства некоторые ограничения (не являющиеся стеснительными), так как приходится пользоваться теоремой о распространении деформации.

Пусть F — множество всех отображений $[P_\lambda]\to[X_\lambda]$. Если каждое из пространств P_λ регулярно и локально компактно или удовлетворяет первой аксиоме счетности, то имеется естественный изоморфизм $\pi_m(F,\overline{x_0})\approx(P_\lambda)^m(X_\lambda;x_0)$; здесь через $\overline{x_0}$ обозначено отображение, переводящее каждое множество P_λ в точку x_0. Таким образом, колейные группы представляют собой по существу гомотопические группы некоторых пространств отображений.

В гл. 3 и 4 даны некоторые приложения. Глава третья содержит некоторые ретракционные теоремы, из которых укажем для примера две следующие. Если Q есть ретракт пространства P или если $[Q,R]$ есть деформационный ретракт пары $[P,R]$, то при $m>1$ имеет место разложение $(P,R)^m\approx(P,Q)^m+(Q,R)^m$; при $m=1$ прямая сумма заменяется расширением группы $(P,Q)^1$ с помощью $(Q,R)^1$ (теорема 7.1). Пусть $P=\bigcup P_\lambda$ есть букет пространств (в слабой топологии) и p — общая точка пространств этого букета. Тогда имеет место разложение $(P,p)^m\approx\Sigma(P_\lambda,p)^m$, $m\geqslant1$ (теорема 7.41).

В гл. 4 даны приложения к клеточным разбиениям. В частности, элементы группы $(K^{n+1},K^{n-2})^m$ выражены в терминах групп когомологий клеточного разбиения K и гомотопических групп пространства X. Для вывода этого выражения автор пользуется известными формулами второго препятствия, принадлежащими Стинроду и М. М. Постникову. В. Г. Болтянский

289. **Инфинитезимально гомотопические классы равномерно непрерывных отображений. Яруткин Н. Г.**, Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 32—36

Решается поставленная Л. С. Понтрягиным задача об инфинитезимально гомотопической (т. е. осуществляемой с помощью равномерно непрерывных деформаций) классификации равномерно непрерывных отображений прямой в окружность и прямой в прямую. На самом деле решена более общая задача о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы два равномерно непрерывных отображения f и g произвольного метрического пространства X в односвязное пространство Y с неположительной кривизной были инфинитезимально гомотопны. Найденное условие заключается в существовании такого положительного числа K, что $\rho(f,g)<K$. Ю. М. Смирнов

290. **Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. Понтрягин Л. С.**, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1955, 45, 3—139

Небольшая монография (130 страниц), содержащая основные результаты теории гладких многообразий и их применения к вычислению гомотопических групп сфер.

Гл. I посвящена изучению теории гладких многообразий. Изложены основные определения и теорема о вложении гладкого компактного многообразия в евклидово пространство. В конце первой главы даны важные методы приведения в общее положение и интересные примеры применения этих методов. В частности, рассмотрены критические точки функции, самопересечения k-мерного многообразия в $2k$-мерном евклидовом пространстве и другие вопросы. Подробное изложение и применение этих методов, повидимому, впервые дано в реферируемой работе. Излагаемые методы приведения в общее положение в значительной степени опираются на предложение, которое автор называет «теоремой Дубовицкого» (РЖМат, 1953, 152); предложение это было доказано значительно раньше (Sard A., Bull. Amer. Math. Soc., 1942, 48, № 7, 883—890). В гл. II излагается разработанный автором метод «оснащенных многообразий». Каждому гладкому отображению $S^{n+k}\to S^n$ ставится в соответствие некоторое гладкое k-мерное подмногообразие пространства E^{n+k} с заданными на нем n векторными полями, ортогональными друг к другу и k-подмногообразию (эти векторные поля составляют «оснащение» подмногообразия). Оказывается, что два отображения сферы S^{n+k} в S^n тогда и только тогда гомотопны между собой, когда соответствующие им оснащенные подмногообразия в некотором смысле гомологичны. На основе этой конструкции автор дает оригинальное описание гомотопических групп сфер, как групп «оснащенных гомологий». Здесь же автор дает в терминах оснащенных многообразий описание фрейденталевского гомоморфизма надстройки. В гл. III изучается связь гомоморфизма надстройки с хопфовским инвариантом. Наконец, в заключительной гл. IV дано применение развитых во второй главе методов к вычислению групп $\pi^{n+1}(S^n)$ и $\pi^{n+2}(S^n)$. Эта часть работы является подробным изложением результатов, опубликованных автором в кратком виде (Понтрягин Л. С., Докл. АН СССР, 1938, 19, № 3, 147—149; 1950, 70, № 6, 957—959). Книга не требует от читателя почти никаких знаний по топологии. Помимо большого научного значения, книга представляет значительный интерес как учебное пособие.

В. Г. Болтянский

291. **Некоторые свойства «в целом» дифференцируемых многообразий. Том** (Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Thom René), Comment. math. helv., 1954, 28, № 1, 17—86 (франц.)

Подробное изложение ранее опубликованных результатов (РЖМат, 1953, 131, 132, 134, 1124).

В гл. I доказаны теоремы о приведении прообразов в общее положение (РЖМат, 1953, 131).

Гл. II содержит изложение основного метода автора. Рассмотрим его вкратце. Пусть G — замкнутая подгруппа ортогональной группы $O(k)$, $\mathscr{B}_G$ — N-универсальное косое произведение со слоем S^{k-1} и группой G (N достаточно велико), а p, E_G, B_G — проекция, пространство и база этого косого произведения. Тогда цилиндр A_G отображения p (являющийся пространством косого произведения, ассоциированного с $\mathscr{B}_G$ и имеющего слоем k-мерный шар) представляет собой многообразие с краем E_G. Отождествляя множество E_G в одну точку, получим из A_G пространство, которое

автор использует в качестве основного инструмента и обозначает через $M(G)$. Легко видеть, что при $0<r<k$ группа когомологий $H^r(M(G))$ тривиальна. В качестве области коэффициентов при построении группы $H^k(M(G))$ автор рассматривает группу целых чисел, если группа G связна (т. е. многообразие E^G ориентируемо), и группу порядка 2 в противном случае. Образующий элемент U группы $H^k(M(G))$ называется фундаментальным классом когомологий пространства $M(G)$. Основная теорема работы: Для того чтобы класс гомологий $z \in H_{n-k}(V^n)$, $k>0$, где V^n — гладкое многообразие, мог быть реализован подмногообразием W^{n-k}, для которого косое произведение нормальных векторов допускает G в качестве структурной группы, необходимо и достаточно существование такого отображения $f: V^n \to M(G)$, что класс когомологий f^*U является двойственным (в смысле Пуанкаре — Колмогорова) для z. Если подгруппа $G \subset O(k)$ тривиальна, это дает необходимое и достаточное условие для возможности реализации класса гомологий z в виде оснащенного подмногообразия (в смысле Л. С. Понтрягина, см. реф. 290). Для $G = SO(k)$ получается условие реализации целочисленного класса гомологий ориентированным подмногообразием, для $G = O(k)$ — условие реализации класса гомологий mod 2 произвольным (ориентируемым или нет) подмногообразием.

Далее изучаются пространства $M(SO(k))$ и $M(O(k))$. Автор показывает, что гомотопический $2k$-тип пространства $M(O(k))$ совпадает с $2k$-типом некоторого прямого произведения комплексов Эйленберга — Мак-Лейна. Благодаря этому оказывается возможным построить такое отображение $g: K^{2k}(Z_2, k) \to M(O(k))$ $2k$-мерного остова комплекса $K(Z_2, k)$, что g^*U есть фундаментальный класс когомологий комплекса $K(Z_2, k)$. Отсюда с помощью основной теоремы автора вытекает, что всякий класс гомологий mod 2 многообразия V^n, имеющий размерность $\leqslant n/2$, реализуем в виде подмногообразия.

Изучение комплекса $M(SO(k))$ значительно сложнее. Автор рассматривает $(k+h)$-тип комплекса $M(SO(k))$ лишь для $h \leqslant 8$ и отмечает, что для построения «модели» этого гомотопического типа уже нельзя, как в случае $M(O(k))$, обойтись лишь прямыми произведениями; приходится рассматривать весьма сложные косые произведения, последовательными слоями которых служат комплексы Эйленберга — Мак-Лейна. В качестве интересного следствия получаемых результатов автор находит следующую теорему (II.30): База слабых гомологий (или гомологий с действительными коэффициентами) гладкого ориентируемого компактного многообразия может быть составлена из гладких подмногообразий.

Гл. III и IV посвящены решению проблемы Стинрода и рассмотрению гладких гомологий (РЖМат, 1953, 134, 1124). Основным инструментом исследования остается комплекс $M(G)$. В. Г. Болтянский

292. Вычисление гомотопических групп сфер. Тода (Calcul de groupes d'homotopie des sphères. Toda Hirosi), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 2, 147—149 (франц.)

Обозначим через $(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ прямую сумму циклических групп порядка $p_1, p_2, \ldots, p_k$ соответственно. В реферируемой заметке утверждается, что:

$$\pi_{n+9}(S^n) = \begin{cases} (2), & \text{если } n=2 \\ (2,2,), & \text{если } n=3 \\ (2,2,2,), & \text{если } n=4,5,6,11 \\ (2,2,2,2,), & \text{если } n=7,9 \\ (2,2,2,2,2\ ), & \text{если } n=8 \\ (2,2,2,\infty), & \text{если } n=10 \end{cases}$$

$$\pi_{n+10}(S^n) = \begin{cases} (2,2), & \text{если } n=2 \\ (2,4,3), & \text{если } n=3 \\ (2,4,8,3,15), & \text{если } n=4 \\ (2,8,9), & \text{если } n=5,6,7,9 \\ (2,8,9,3), & \text{если } n=8 \\ (2,4,9), & \text{если } n=10 \\ (2,2,9), & \text{если } n=11 \\ (2,9), & \text{если } n=12 \end{cases}$$

$$\pi_{n+11}(S^n) = \begin{cases} (2,4,3), & \text{если } n=2 \\ (2,2,3,4,7), & \text{если } n=3 \\ (2,2,2,2,2,3,4,7), & \text{если } n=4 \\ (2,2,7,8,9), & \text{если } n=5 \\ (4,7,8,9), & \text{если } n=6 \\ (2,7,8,27), & \text{если } n=7,8,9 \\ (7,8,27), & \text{если } n=10,11,13 \\ (7,8,27,\infty), & \text{если } n=12 \end{cases}$$

$$\pi_{n+12}(S^n) = \begin{cases} (2,2,4,21), & \text{если } n=2 \\ (2,2), & \text{если } n=3,12 \\ (2,2,2,2,2,2), & \text{если } n=4 \\ (2,2,2), & \text{если } n=5 \\ (15,16), & \text{если } n=6 \\ 0, & \text{если } n=7,8,9,14 \\ (3,4), & \text{если } n=10 \\ (2), & \text{если } n=11,13 \end{cases}$$

$$\pi_{n+13}(S^n) = \begin{cases} (2,2), & \text{если } n=2 \\ (2,3), & \text{если } n=3,6,7,10,13 \\ (2,2,3,8,9), & \text{если } n=4 \\ (2,2,3), & \text{если } n=5,8,9,11,12 \\ (3,\infty), & \text{если } n=14 \\ (3), & \text{если } n=15 \end{cases}$$

Указаны также некоторые образующие этих групп (в частности, все образующие второго порядка) и явно выписаны естественные гомоморфизмы, переводящие одну образующую в другую.

Доказательств заметка не содержит.

М. М. Постников

293. О гомотопическом типе A_n^3-полиэдра ($n \geqslant 3$). **Сираива** (On the homotopy type of an A_n^3-polyhedron ($n \geqslant 3$). Shiraiwa Kenichi), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 1, 235—251, (англ.)

Дается полное алгебраическое описание гомотопического типа A_n^3-полиэдров (т. е. $(n+3)$-мерных полиэдров, асферичных в размерностях, меньших n) в терминах квадратов Стинрода и операций Адема. Формулировка результата весьма сложна и поэтому здесь не приводится.

Работа содержит неточности, весьма затрудняющие ее изучение. Так, например, определение гомоморфизма Φ_2 на стр. 236 явно ошибочно, так как содержит не имеющее смысла выражение $\gamma_{n+1}\Delta_2$. Далее, описывая (стр. 242) допустимые операции над матрицей данного полиэдра, автор называет строки столбцами, а столбцы — строками. На стр. 244 недостаточно четко описано строение матриц E_1 и G. Кроме того, не указано, что эти матрицы могут отсутствовать. В доказательстве основных для всей работы формул IV (стр. 245) автор ссылается на неопубликованную работу.

М. М. Постников

294. Гомотопический тип и сингулярный гомотопический тип. Олум (Homotopy type and singular homotopy type. Olum Paul), Ann. Math., 1954, **60**, № 2, 317—325 (англ.)

Пусть X, Y — линейно связные топологические пространства, а $S(X)$ и $S(Y)$ — их сингулярные комплексы. Отображение $S' \to S(Y)$, где $S' \subset S(X)$, называется сингулярным, если оно сохраняет размерность и перестановочно с операциями взятия грани и построения вырожденных симплексов. Сингулярные отображе-

ния φ_0, φ_1; $S^n(X) \to S(Y)$ называются гомотопными в размерности $k \leqslant n$, если существует сингулярное отображение $\varphi : S^{k+1}(I \times X) \to S(Y)$, совпадающее на $S^k(0 \times X)$ с φ_0, а на $S^k(1 \times X)$ — с φ_1. Пространства X и Y называются пространствами одного сингулярного n-гомотопического типа, если существуют такие сингулярные отображения $\varphi : S^{n+1}(X) \to S(Y)$, $\psi : S^{n+1}(Y) \to S(X)$, что составные отображения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ гомотопны в размерности n соответствующим тождественным отображениям.

Доказано, что 1) полиэдры тогда и только тогда имеют один n-гомотопический тип, когда они имеют один сингулярный n-гомотопический тип, и что 2) пространства тогда и только тогда имеют один сингулярный n-гомотопический тип, когда их минимальные комплексы n-изоморфны.

Эти утверждения общеизвестны и доказаны, в частности, референтом (см., например, Докл. АН СССР, 1951, 76, 789—791). Доказательства автора лишь несущественно отличаются от стандартных доказательств этих теорем. М. М. Постников

295. О некоторых инвариантах отображений. Аоки (On some invariants of mappings. Aoki Kiyoshi), Tôhoku Math. J., 1954, 5, № 3, 220—237 (англ.)

Пусть $r \geqslant 0$, n четно и $m = (r+1)n - r$. Обобщая конструкцию инварианта Хопфа, соответствующую случаю $r = 2$, автор относит любому элементу $\alpha \in \pi_m(S^n)$ некоторое целое число $W_r(\alpha)$. Доказанные автором свойства этого инварианта противоречат некоторым ранее установленным фактам. Так, например, из теорем 4.1 и 4.2 реферируемой статьи следует, что если $\alpha \in \pi_m(S^n)$ является надстройкой некоторого элемента группы $\pi_{m-1}(S^{n-1})$, то его собственная надстройка отлична от нуля: $E\alpha \neq 0$. Однако известно, что для $n = 4$, $m = 10$ ($r = 2$) это неверно. Найти ошибку в доказательствах автора не представляется возможным как из-за обилия опечаток, так и в силу метода доказательств (восходящего к Фрейденталю и не поддающемуся строгому изложению).

М. М. Постников

296. О тождестве Якоби. Чжан Су-чэн (張素誠), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 3, 365—379 (кит.; резюме англ.)

Пусть X — линейно связное топологическое пространство, $\alpha \in \pi_p(X)$, $\beta \in \pi_q(X)$, $\gamma \in \pi_r(X)$, где $r \geqslant q \geqslant p \geqslant 2$. Доказано, что

$$(-1)^{r(p+1)}[\alpha,[\beta,\gamma]] + (-1)^{p(q+1)}[\beta,[\gamma,\alpha]] + (-1)^{q(r+1)}[\gamma,[\alpha,\beta]] = 0,$$

где скобки [] обозначают производные Уайтхеда.

М. М. Постников

297. О размерности однородных пространств. Яманосита (On the dimension of homogeneous spaces. Yamanoshita Tsuneyo), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 2, 151—159 (англ.)

Пусть G — локально компактная топологическая группа со счетной базой, а H — произвольная ее замкнутая подгруппа. Доказывается, что в этом случае $\dim G = \dim H + \dim G/H$, где G/H — пространство левых смежных классов группы G по подгруппе H. Ю. М. Смирнов

298. О кручении групп Ли. Ботт (On torison in Lie groups. Bott Raoul), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, 40, № 7, 586—588 (англ.)

Пусть G — полупростая, компактная, связная и односвязная группа Ли, T — ее максимальный тор, а $\Omega(G)$ — пространство петель на G. Пользуясь теорией Морса, автор намечает эскизы доказательств следующих теорем. Пространства $\Omega(G)$ и G/T не имеют кручения (этот результат нов только для групп E_6, E_7 и E_8); их полиномы Пуанкаре можно вычислить, рассматривая диаграмму группы G. Из способа вычисления полинома Пуанкаре по диаграмме немедленно следует, в частности, что нечетномерные числа Бетти пространств $\Omega(G)$ и G/T равны нулю.

М. М. Постников

299. О многообразиях, на которых все геодезические замкнуты. Ботт (On manifolds all of whose geodesics are closed. Bott Raoul), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 375—382 (англ.)

Пусть M — риманово n-мерное ($n \geqslant 2$) многообразие класса C^3, на котором все геодезические, исходящие из некоторой точки $p \in M$, замкнуты и имеют одну и ту же длину. Обозначим через λ число точек, сопряженных с точкой p на некоторой геодезической, исходящей из p. Оказывается, что если $\lambda = 0$, то $\pi_1(M) = Z_2$ и универсальная накрывающая многообразия M является гомологической сферой. Если же $\lambda > 0$, то $\pi_1(M) = 0$, число $\lambda + 1$ является делителем числа n, целочисленное кольцо когомологий многообразия M изоморфно кольцу многочленов от одной переменной θ, имеющей степень $\lambda + 1$ и подчиненной соотношению $\theta^{n/(\lambda+1)} = 1$. Доказательство этого факта основано на теории Морса и теории спектральных последовательностей.

Автор отмечает, что единственными известными до сего времени многообразиями, удовлетворяющими сформулированным выше условиям на кольцо когомологий, являются сферы, комплексные и кватернионные проективные пространства и октавная проективная плоскость. М. М. Постников

300. Гомология расширений. Гуггенхеймер (Omologia delle dilatazioni. Guggenheimer Heinrich), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, 17, № 1—2, 13—15 (итал.)

В ряде последних работ Сегре ввел и рассмотрел понятие расширения (дилятации) алгебраического многообразия (Segre B., Ann. mat. pura ed appl., 1952, 33, 5—48 и другие работы, см. например, РЖМат, 1955, 401). Это — бирациональное преобразование (соответствие) алгебраического многообразия V в V', взаимно однозначное всюду, кроме некоторого несингулярного подмногообразия $P \subset V$, переходящего в расслоенное пространство $P' \subset V'$ с базой P, причем слой есть комплексное проективное пространство S_r некоторой размерности r (равной на единицу уменьшенной разности между размерностями V и P). Автор исследует зависимость между гомологическими свойствами пространств P' и P. Оказывается, что слой здесь всегда вполне негомологичен нулю, а потому, в силу известной теоремы Лере, группы когомологий пространства P' совпадают с группами когомологий прямого произведения $P \times S_r$ (аналогично и для групп гомологий). Далее оказывается, что характеристические классы Черна (Чжэнь Шэн-шэня) $c_k(P')$ для P' определяются по такой же формуле, как для прямого произведения $P \times S_r$, а именно: $c_k(P') = \sum_{q=1}^{k} c_{k-q}(P) \cup c_q(S_r)$. Это вытекает из результатов Чжэнь Шэн-шэня (Chern S.-S., Ann. Math., 1946, 47, 85—121) вследствие локальной приводимости метрики пространства P' (Lichnerowicz A., C. r. Acad. sci., 1951, 232, 1634—1636), естественно возникающей при вложении его в проективное пространство достаточного числа измерений. Локальная приводимость метрики следует

из свойств внешней квадратичной формы пространства P', ассоциированной с его метрикой (Guggenheimer H., Comment. math. helv., 1951, 25, 257—297, формула (78)), доказываемых применением теоремы Лере.
М. Ф. Бокштейн

301. Первый летний математический институт. Гликсон, Борел, Кертис, Каплански й (The first summer mathematical institute. Gleason A. M., Borel Armand, Curtis C. W., Kaplansky I.), Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, № 5, 457—471 (англ.)

Отчет о первом летнем математическом институте (по вопросам групп и алгебр Ли), функционировавшем 20 июня — 31 июля 1953 г. в Colby College, Waterville, Maine. Организационный комитет: Шевалле, Глисон, Джекобсон. Был проведен семинар по теории простых алгебр Ли, прочитаны четыре серии лекций (Борель, Когомологии компактных связных групп Ли и их фактор-пространств; Шевалле, Подалгебры и подгруппы Картана; Ямабе, Строение локально компактных групп; Цассенхауз, Теория представлений алгебр Ли над полем характеристики p) и сделано девять докладов. Отчет содержит краткое резюме лекций и обзор работы семинара.
М. М. Постников

См. также: 9, 10, 11, 12, 34, 225, 259, 261, 304, 305, 370, 490, 568, 596, 625, 706, 707, 734

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

302. Об одном функциональном уравнении. Исигуро (Sur le problème de l'équation fonctionnelle. Ishiguro Kazuo), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 1, 1—4 (франц.)

Пусть действительная измеримая функция $\theta(x)$ обладает следующим свойством: для любой убывающей последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$, можно указать такую последовательность действительных чисел $\{\eta_n\}$, $\eta_n \to 0$, что при $n \to \infty$

$$\lim \operatorname{mes} \{x : \theta(x+\varepsilon_n) \neq \eta_n + \theta(x)\} = 0.$$

Тогда $\theta(x)$ линейна на некотором множестве положительной меры.

Приводятся два варианта доказательства. 2-й вариант можно рассматривать лишь как часть доказательства, так как он относится к специальному случаю теоремы (когда можно утверждать, что $\theta(x)$ постоянна на множестве положительной меры). Работа содержит неточности.
Ю. Т. Медведев

303. К теории неявных функций. Колесова Е. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 5, 461—476

Функция $f(x) = f(x_1,\ldots, x_m)$, заданная на множестве E m-мерного евклидова пространства E_x^m, называется плотной на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$ в любой порции δE (т. е. пересечении множества E с m-мерным промежутком δ), содержащей точку $x^{(0)}$ разрыва функции f, найдется точка x, в которой функция f непрерывна и для которой $|f(x) - f(x^{(0)})| < \varepsilon$. Пусть на E задана система функций $f_i(x)$, $i = 1,2,\ldots, k$. Порция δE множества E называется порцией ограниченности системы $\{f_i\}$, если существует число N такое, что

$$\delta E = \mathcal{E}\{|f_i(x)| < N,\ i = 1,2,\ldots, k\} \cap \delta.$$

Показав, что всякое замкнутое множество $A \subseteq E_{xy}^{m+n}$ можно униформизировать относительно подпространства E_x^m поверхностью, обладающей определенными свойствами, автор доказывает следующую основную теорему:

Система уравнений $F_s(x_1,\ldots, x_m, y_1,\ldots, y_n) = 0$, $s = 1,2,\ldots, p$, где функции F_s определены и непрерывны в замкнутой области $(m+n)$-мерного евклидова пространства E_{xy}^{m+n}, имеет решение $y_i = f_i(x_1,\ldots, x_m)$, $i = 1,2,\ldots, n$, в точках множества E типа F_σ, являющегося проекцией в подпространство E_x^m множества точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений $F_s = 0$ $(s = 1,2,\ldots, p)$. При этом функции f_i обладают следующими свойствами: 1) они первого бэровского класса на E; 2) они плотны на каждой порции ограниченности; 3) множество E можно разбить на счетное число попарно не пересекающихся множеств E_k, каждое из которых есть разность двух замкнутых множеств и на каждом из которых функции f_i $(i = 1,2,\ldots, n)$ плотны.
Л. Д. Кудрявцев

304. О свойствах дифференцируемых отображений областей эвклидовых пространств. Кудрявцев Л. Д., Матем. сб., 1953, 32 (74), № 3, 493—514

В § 2 изучается поведение хаусдорфовой меры μ_λ размерности λ при указанных в заглавии статьи отображениях. Например, доказывается теорема:

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое отображение области $G \subseteq E_x^n$ в E_y^m, $n \gtreqless m$, $E_0 \subseteq G$ и для некоторого λ $(0 \leqslant \lambda < \infty)$ $\mu_\lambda(E_0) = 0$. Тогда и $\mu_\lambda[f(E_0)] = 0$. Отсюда для любого $E \subseteq G$ вытекает следствие:

$$\operatorname{met\,dim}[f(E)] \leqslant \operatorname{met\,dim} E.$$

В § 3 доказывается эквивалентность знакопостоянства якобиана и ориентированности отображения. Дается «принцип максимума» в следующей форме:

Пусть $u = f(x, y)$ — дифференцируемое отображение области $G \subseteq E_{xy}^{p+q} = E_x^p \times E_y^q$, $q \geqslant 0$ в E_u^p, якобиан $J(x, y) = D(u_1,\ldots, u_p)/D(x_1,\ldots, x_p) \geqslant 0$ на G (или соответственно $J(x, y) \leqslant 0$ на G), множество $G_0 = \mathcal{E}\{(x, y) : J(x, y) = 0\}$ не имеет внутренних точек и $u^{(0)}$ принадлежит границе образа области G. Тогда $f^{-1}(u^{(0)}) \subseteq G_0$ и $f^{-1}(u^{(0)})$ не есть компакт. Указывается, что в случае $q = 0$ и ограниченности области G эквивалентная теорема доказана референтом (Докл. АН СССР, 1950, 72, № 1, 15—17).

В § 4 доказана теорема о точках плотности для дифференцируемых отображений:

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемое отображение области $G \subseteq E_x^n$ в пространство E_y^n и $E \subseteq G$ — измеримое множество. Тогда для почти всех точек $y \in f(E)$ выполняется следующее условие: какова бы ни была точка $x \in f^{-1}(y)$, имеет место

$$\lim_{\delta(Q) \to 0} [\operatorname{mes} f(Q) \cap f(E)]/\operatorname{mes} f(Q) = 1,$$

где Q — куб с центром в точке x, а $\delta(Q)$ — его диаметр. Имеется ряд других результатов.
А. М. Роднянский

305. Оценки минимального числа элементов ε-сетей в различных функциональных классах и их применение к вопросу о представимости функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных. Колмогоров А. Н., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 192—194

Пусть F — компактное метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Рассматриваются всевозможные покрытия пространства F его подмножествами диаметра $\leqslant \varepsilon$. Через $N_F(\varepsilon)$ обозначается наименьшее число множеств в таких покрытиях и полагается

$$K^*(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[- \frac{\ln \ln N_F(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} \right].$$

Указывается, что характеристики множеств $N_F(\varepsilon)$ и $K^*(F)$ изучались ранее Л. С. Понтрягиным и Л. Г. Шнирельманом (Ann. Math., 1932, **33**, 156—162).

Пусть C_n — пространство непрерывных функций $f(x_1,\ldots,x_n)$ на n-мерном единичном кубе $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ с метрикой $\rho(f,g) = \max|f-g|$; $F(n, A, B, p, \alpha)$ — подмножество C_n, состоящее из p раз дифференцируемых функций f с $|f| \leqslant A$,

$$|f^{(p)}(x'_1,\ldots,x'_n) - f^{(p)}(x_1,\ldots,x_n)| \leqslant$$
$$\leqslant B \sum_1^n |x'_i - x_i|^\alpha.$$

Утверждается, что при любых $p = 0,1,\ldots$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $A > 0$, $B > 0$

$$K^*[F(n, A, B, p, \alpha)] = n/(p+\alpha).$$

Затем полагается

$$M(n, p, \alpha) = \bigcup_{A>0}^{\infty} \bigcup_{B>0}^{\infty} F(n, A, B, p, \alpha)$$

и формулируется теорема: Если

$$n/(p+\alpha) < n_0/(p_0+\alpha_0), \qquad (1)$$

то существует функция $f \in M(n, p, \alpha)$, которая не представима никакой суперпозицией из $M(n_0, p_0, \alpha_0)$. Отмечается, что эта теорема в несколько ослабленной форме ранее была сформулирована А. Г. Витушкиным (РЖМат. 1955, 148), однако метод его доказательства не выявлял сущности неравенства (1).

Отмечается, что указанного рода метрические соображения не могут дать существенного продвижения в исследовании тринадцатой проблемы Гильберта о возможности представления достаточно гладких функций большего числа переменных суперпозициями менее гладких непрерывных функций меньшего числа переменных. Л. Д. Кудрявцев

306. Об аппроксимации спрямляемых плоских кривых. Майкл (An approximation to a rectifiable plane curve. Michael J. H.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 1, 1—11 (англ.)

Доказываются интегральная теорема Коши для голоморфной функции и теорема Грина о связи двойного интеграла с криволинейным при более широких предположениях о пути интегрирования.

Путем называется непрерывный образ отрезка $[0,1]$ в евклидову плоскость E_2, цепью — конечное семейство путей. Если C — цепь, то через $K(C)$ обозначается плоское точечное множество, состоящее из всех точек, принадлежащих цепи, через $O'(C)$ — множество внутренних точек, т. е. таких точек p, что $p \neq K(C)$ и $u(p,C) \neq 0$, где $u(p, C)$ — топологический индекс точки p относительно C (степень или порядок точки относительно отображения).

Пользуясь аппроксимацией путей сетями квадратов, автор доказывает теоремы, в которых C — замкнутая цепь в E_2.

1. Если $f(z)$ непрерывна в $K(C) \cup O'(C)$ и голоморфна в $O'(C)$, то $\int_C f(z)\,dz = 0$ (если $O'(C)$ пусто, то предполагается только непрерывность $f(z)$ в $K(C)$).

2. Если $f(x,y)$ непрерывна в $K(C) \cup O'(C)$, $f_x(x,y)$ существует всюду в $O'(C)$, кроме, быть может, множества F, представимого в виде суммы счетного числа множеств конечной линейной меры, и произведение $u\{(x,y), C\} f_x(x,y)$ суммируемо в $O'(C)$ (u — топологический индекс), то

$$\iint_{O'(C)} u\{(x,y), C\} f_x(x,y)\,dxdy = \int_C f(x,y)\,dy.$$

Р. С. Гутер

307. О существовании функций, имеющих данные частные производные на кривой. Сайон (On the existence of functions having given partial derivatives on a curve. Sion Maurice), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **77**, № 2, 179—201 (англ.)

Даются достаточные условия, налагаемые на систему функций, определенных на кривой в n-мерном евклидовом пространстве E^n, для того чтобы существовала на E^n функция класса C^m, у которой вдоль данной кривой все частные производные до порядка m совпадают с соответствующими заданными функциями.

Показывается, что при любых целых n и m, $n \geqslant 2$, существует на E^n функция класса $C^{n-1\ m-1}$, у которой все частные производные порядка большего, чем m, равны нулю всюду на уитниевской кривой $P \subset E^n$ (Whitney H., Duke Math. J., 1935, **1**, 514—517); кроме того, все частные производные указанной функции равны нулю в некоторой точке кривой P и тем не менее сама функция не является постоянной.

Л. Д. Кудрявцев

308. Об одной общей теореме сходимости Корна. Шефер (Über einen allgemeinen Konvergenzsatz von A. Korn. Schaefer Helmut), Arch. Math., 1955, **6**, № 2, 132—135 (нем.)

Доказывается ошибочность теоремы Корна следующего содержания.

Пусть $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$ — ограниченная замкнутая область плоскости x, y; $f_1, f_2, \ldots$ — последовательность функций, которые на границе S равны нулю, имеют непрерывные производные до второго порядка $D_1 f_n$, $D_2 f_n$ в $\bar{\Omega}$ и удовлетворяют условиям:

$$|f_n|,\ |D_1 f_n|,\ |D_2 f_n| \leqslant A\mu^n, \qquad (H_1)$$

$$|D_2 f_n(P) - D_2 f_n(P')| \leqslant A\mu^n r^\lambda, \qquad (H_2)$$

где $A > 0$, $\mu > 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$, $\overline{PP'} = r$, $n = 1,2,\ldots$

Пусть далее

$$\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial f_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial y} \right)^2 \right] d\omega \leqslant B\theta^n, \qquad (H_3)$$

$$B > 0, \quad 0 < \theta < 1, \quad n = 1,2,\ldots$$

Тогда нижняя граница μ_0 чисел μ, одновременно допустимых в (H_1) и (H_2), меньше 1.

Показывается, что утверждение остается верным, если $\mu''_0 \leqslant \mu'_0$, где μ''_0 и μ'_0 — нижние границы чисел μ, допустимых соответственно в (H_2) и (H_1). Доказывается также, что $\mu'_0 = \theta_0$, где θ_0 — нижняя граница чисел θ в (H_3).

В. П. Ильин

309. О монотонных функциях, спектр которых есть «канторово множество с постоянным отношением». Салем (On monotonic functions whose spectrum is a Cantor set with constant ratio of dissection. Salem R.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 1, 49—55 (англ.)

Пусть $0 < \xi < 1/2$. Назовем $(\xi, 1-2\xi, \xi)$-разбиением некоторого сегмента длины ρ операцию, при которой из сегмента выбрасывается интервал длины $\rho(1-2\xi)$ так, чтобы два остающихся сегмента имели каждый длину $\rho\xi$. Произведем такое разбиение сегмента $[0, 2\pi]$, затем каждого из двух оставшихся сегментов и т. д. Полученное совершенное множество обозначим через P или $P(\theta)$, где $\theta = 1/\xi$.

Если $x \in P$, то $x = 2\pi(\theta-1)[\varepsilon_1/\theta + \varepsilon_2/\theta^2 + \ldots]$, где $\varepsilon_k = 0$ или 1 $(k=1, 2, \ldots)$.

«Функцией Лебега» со спектром $P(\theta)$ автор называет функцию, определяемую для $x \in P$ равенством $y = f(x) = \varepsilon_1/2 + \varepsilon_2/2^2 + \ldots$, непрерывную и постоянную на смежных к P интервалах (для случая $\xi = 1/3$ P — известное канторово множество и $f(x)$ — канторова ступенчатая кривая).

Условимся говорить, что θ есть число Пизо, если оно является целым алгебраическим числом, у которого все сопряженные числа по модулю строго меньше 1.

Автор доказал (Trans. Amer. Math. Soc., 1943, 54, 218—228), что $\int_0^{2\pi} e^{inx}df \to 0$ при $n \to \infty$ в том и только в том случае, когда θ не есть число Пизо.

В реферируемой работе рассматривается случай, когда θ — число Пизо, и изучается поведение интеграла $\int_0^{2\pi} e^{inx}dF$, где F — любая функция с ограниченным изменением, постоянная на смежных к $P(\theta)$ интервалах. Дело сводится к изучению интеграла $\int_0^{2\pi} e^{inx}dG(f)$, где f — функция Лебега, а G — непрерывная неубывающая функция с $G(0) = 0$, $G(1) = 1$. Показывается, что этот интеграл не стремится к нулю, если G есть абсолютно непрерывная функция или если в разложении $G = G_1 + G_2$ на абсолютно непрерывную G_1 и сингулярную G_2 компоненты G_1 не есть тождественный нуль, или, наконец, если существует такая абсолютно непрерывная функция $\psi(y)$, что $\int_0^{2\pi} e^{inx}d\psi(G) \to 0$.

Показывается, что для одного и того же $P(\theta)$ можно построить две непрерывные неубывающие функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ такие, что $\int_0^{2\pi} e^{inx}dF_1 = o(1)$, а $\int_0^{2\pi} e^{inx}dF_2 \neq o(1)$.

Примечание референта. Как известно, в указанной выше работе автор доказал что если θ не есть число Пизо, то $P(\theta)$ есть M-множество. Он утверждал, что если θ — число Пизо, то $P(\theta)$ есть U-множество, но доказательство оказалось неверным. Известно, что если бы $P(\theta)$ было U-множеством, то $\int_0^{2\pi} e^{inx}dF \neq o(1)$ для любой монотонной F, постоянной на смежных к $P(\theta)$ интервалах. Поэтому автор предпринял изучение $\int_0^{2\pi} e^{inx}dF$ для случая $P(\theta)$, где θ — число Пизо.

В настоящее время вопрос решен до конца автором и Зигмундом (C.r. Acad. sci., 1955, 240, № 22, 2040—2042), показавшими, что $P(\theta)$ есть U-множество, если θ — число Пизо. Н. К. Бари

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

310. Об одном предложении Серпинского, эквивалентном гипотезе континуума. Багемил, Спринкл (On a proposition of Sierpiński's which is equivalent to the continuum hypothesis. Bagemihl F., Sprinkle H. D.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 726—728 (англ.)

Серпинский (Sierpiński W., Glas Srpske kraljevske akad., 1932, 152, 163—169; Fundam. math., 1933, 20, 163—165) доказал следующее предложение: Если $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, то существует бесконечная последовательность таких однозначных функций действительного переменного $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., что для каждого несчетного множества N действительных чисел функции этой последовательности, за исключением, быть может, конечного числа из них, отображают N на множество всех действительных чисел.

В реферируемой работе дается уточнение свойств последовательности $\{f_n(x)\}$, а именно, для каждой функции последовательности, за исключением, быть может, конечного числа из них, каждое действительное число становится образом несчетного множества элементов множества N.

Обратное утверждение к доказанному также справедливо (Sierpiński W., Hypothèse du continu, Warszawa — Lwów, 1934).

Формулируется следующая теорема: Пусть α — порядковое число, M — множество мощности $2^{\aleph_\alpha}$. Тогда для равенства $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ необходимо и достаточно, чтобы существовала трансфинитная последовательность таких однозначных функций $f_0(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_\tau(x)$, ... $(\tau < \omega_\alpha)$, определенных на M, что для каждого подмножества $N \subseteq M$ с $|N| > \aleph_\alpha$ функции последовательности, за исключением, быть может, числа меньшего, чем $\aleph_\alpha$, отображают N на множество M, причем каждый элемент множества M есть образ больше, чем $\aleph_\alpha$ элементов множества N.

В ослабленной форме этот результат был получен ранее (Braun S., Sierpiński W., Fundam. math., 1932, 19, 1—7). З. И. Козлова

311. Разложение сферы. Деккер, Грот (Decompositions of a sphere. Dekker T., Groot J. de), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 209 (англ.)

Двумерную сферу S^2 можно так разложить в сумму попарно не пересекающихся множеств, число которых не больше мощности континуума, что любые две суммы таких множеств, отличные от пустого множества и от S^2, в частности и любые два множества разложения, конгруэнтны друг другу. Доказательство намечено. О разложении S^2 в конечную сумму множеств см. также РЖМат, 1955, 3150. Ю. М. Смирнов

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

312. О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных функций. Бари Н. К., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 201—202

Известно (Zygmund A., Duke Math. J., 1945, 12, 47—76), что если периодическая периода 2π функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| = O(h^\alpha) \quad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то этим же свойством обладает функция $\overline{f}(x)$, тригонометрически сопряженная с ней. В терминах наилучшего приближения $E_n(f)$ формулируется обобщение этого результата, представляющего собой уточнение теоремы И. И. Привалова.

Если

$$E_n(f) = O[\varphi(n^{-1})], \qquad (1)$$

где $\varphi(\delta)$ — непрерывная неубывающая на $[0, 1]$ функция, для которой $\varphi(0) = 0$ и

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^{-1}\varphi(k^{-1}) = O[\varphi(n^{-1})], \qquad (2)$$

то

$$E_n(\overline{f}) = O[\varphi(n^{-1})]. \qquad (3)$$

Сходимость ряда $\Sigma_{k=1}^{\infty} k^{-1}\varphi(k^{-1})$ и условие (2), эквивалентное условию $\overline{\lim}_{\delta\to+0}\varphi(C\delta)/\varphi(\delta) > 1$ при некотором $C > 1$, существенны для того, чтобы из (1) следовали непрерывность $\overline{f}(x)$ и соотношение (3). Указано также обобщение упомянутого результата Зигмунда в терминах модулей непрерывности высших порядков.

А. Ф. Тиман

313. A-интеграл и его применение к теории тригонометрических рядов. Ульянов П. Л., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 189—191

Определение A-интеграла дано в заметке автора (РЖМат, 1953, 163). Там же были доказаны некоторые теоремы относительно функций вида

$$f(x) = a_0/2 + \sum_1^{\infty} a_n \cos nx, \quad \overline{f}(x) = \sum_1^{\infty} a_n \sin nx$$

для случая, когда $\{a_n\}$ имеет ограниченное изменение и $a_n \to 0$. В реферируемом резюме доклада приводятся, в частности, следующие теоремы.

1. Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$, $\overline{f}(x)$ — ее сопряженная, $g(x)$ и $\overline{g}(x)$ — две сопряженные ограниченные функции, то

$$(A)\int_0^{2\pi} \overline{f}(x)\, g(x)\, dx = -(L)\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g}(x)\, dx.$$

2. Пусть $f(x) \in L^p[0, 2\pi]$ $(p > 1)$ и $\overline{f}(x)$ — ее сопряженная, тогда для почти всех $x \in [0, 2\pi]$

$$\overline{f}(x) = -\frac{1}{\pi}(A)\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}\, dt.$$

3. Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$ и $\widetilde{f}(x)$ — ее сопряженная, то для почти всех $x \in [0, 2\pi]$

$$f(x) - \frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{as}(A)\left(\int_{-\pi+\varepsilon}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\pi+\varepsilon}\right)\overline{f}(t)\,\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\, dt.$$

Н. К. Бари

314. О некоторых тригонометрических рядах. IX. Идзуми (Some trigonometrical series, IX. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 1, 30—34 (англ.)

Ранее (Tôhoku Math. J., 1939, **46**, 117—122) автор и Кавата получили критерий равномерной суммируемости рядов Фурье, более общий, чем, например, критерий Зигмунда. Но он не охватывал критерия Харди—Литлвуда (Math. Z., 1928, **28**, 630). В реферируемой статье доказывается критерий, из которого следует критерий Харди — Литлвуда. Кроме этого, дается оценка разности между функцией $f(x)$ и ее чезаровскими средними $\sigma_n^{\alpha}(x)$ порядка α.

Теорема 1. Если непрерывная периодическая функция $f(x)$ такова, что для некоторого $-1 < \alpha < 1$

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{n}{k^{1+\alpha}} \int_{\pi/n}^{2\pi/n} \left| f\left(x + t + 2k\frac{\pi}{n}\right) - f\left(x + t + (2k+1)\frac{\pi}{n}\right)\right| dt = o(1)$$

равномерно относительно x, то ряд Фурье функции $f(x)$ равномерно суммируем (C, α).

Как частный случай из этой теоремы автор выводит критерий Харди — Литлвуда, т. е. если $0 < \alpha \leqslant 1$, $\alpha p > 1$ и $f(x) \in \operatorname{Lip}(\alpha, p)$, то ряд Фурье функции $f(x)$ почти всюду суммируем $(C, -\alpha + \delta)$ для любого $\delta > 0$.

Теорема 2. Если периодическая функция $f(x) \in L(0, 2\pi)$ и $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r} |\, n^{\delta}[\sigma_n^{\delta}(x) - f(x)]\,|^p \leqslant (A_r p)^p \int_0^{\pi} \left|\frac{\varphi_x(t)}{t^{\delta}}\right|^p t^{r-2}\, dt,$$

где $p > 1$, $r > 1$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ и A_r — постоянная, зависящая только от r.

В частности, отсюда следует, что $\sigma_n^{\alpha}(x) - f(x) = O(n^{-\alpha}\ln n)$ для $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

Примечание референта. Если следовать до конца Харди и Литлвуду, то автору нужно бы формулировать в критерии Харди — Литлвуда не простую суммируемость, а равномерную, что, конечно, вполне возможно, если ссылка на теорему 1 законна. На стр. 32, строка 6 сверху, автор пользуется неравенством $(-\alpha + \delta + 1)p/(p-1) > 1$, которое влечет следующее условие на δ: $\delta > \alpha - 1/p > 0$. Следовательно, δ — не любое положительное число, как это утверждается в критерии Харди — Литлвуда. Можно все-таки методом автора доказать критерий Харди — Литлвуда, оценивая точнее сумму $\Sigma_1^{[n/2]} k^{-(1+\gamma)q}$.

Заметим также, что в цитированной литературе вместо [3] должно быть, повидимому: Hardy G. H. and Littlewood J. E. A convergence criterion for Fourier series, Math. Z., 1928, **28**, 612—634.

П. Л. Ульянов

315. О некоторых тригонометрических рядах. Х. Идзуми (Some trigonometrical series, X. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 1, 69—72 (англ.)

Автор обобщает критерий Лебега о сходимости ряда Фурье в точке, доказывая теорему:

Пусть для четной периодической функции $f(x) \in L(-\pi, \pi)$ выполняются условия:

$$\int_0^t |\, f(x)\,|\, dx = o(t) \quad (t \to 0), \qquad (1)$$

$$n\int_0^{\pi/n} |\, \psi(n, t)\,|\, dt = o(1) \quad (n \to \infty), \qquad (2)$$

где $\psi(n, t) = \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \int_{t+2k\pi/n}^{t+(2k+1)\pi/n} \frac{f(x) - f(x - \pi/n)}{x}\, dx$.

Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точке $x = 0$.

Очевидно, что если функция удовлетворяет условиям Лебега, т. е. выполняется (1) и

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{\pi} |\, f(t+\varepsilon) - f(t)\,|\, t^{-1}\, dt = 0,$$

то (2) справедливо.

В заключение утверждается, что если для четной функции $f(x)$ выполнено условие (1), то для сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ в точке $x = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/n} \cos nt\, \psi(n, t)\, dt = 0.$$

В работе содержится значительное число опечаток. Например, стр. 70, строка 4 снизу, напечатано $2k - 2$ вместо $(2k-1)/n$; стр. 70, строка 7 снизу, напечатано $\int_{t+\pi/n}^{t+\pi+\pi/n}$ вместо $\int_{t+\pi/n}^{t+\pi}$; стр. 70, строка 8 снизу напечатано $\int_t^{t+\pi}$ вместо $\int_{t+2\pi/n}^{t+\pi+\pi/n}$.

П. Л. Ульянов

316. О некоторых тригонометрических рядах. XI. Идзуми (Some trigonometrical series. XI. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 1, 73—77 (англ.)

Доказывается несколько теорем о связи между поведением коэффициентов тригонометрического ряда и интегрируемостью суммы этого ряда.

Теорема 1. Пусть ряд $\Sigma_1^\infty a_k \sin kx$ ограниченно сходится в интервале (δ, π) для любого $\delta > 0$ к функции $g(x)$ и пусть $\Sigma_n^{2n} |\Delta a_k| = O(1)$ $(\Delta a_k = a_k - a_{k+1})$. Тогда сходимость ряда $\Sigma_1^\infty a_k/k$ является необходимым и достаточным условием для существования

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^\pi g(x)\, dx.$$

Эта теорема является обобщением теоремы Боаса (Boas R. P., Duke Math. J., 1951, 18, 790).

Теорема 4. Пусть

$$f(x) = \sum_1^\infty a_k \cos kx, \quad g(x) = \sum_1^\infty a_k \sin kx,$$

где $\Sigma_1^n k a_k = O(n^\alpha)$, $\Sigma_n^\infty |\Delta a_k| = O(n^{-\beta})$ и $0 < \alpha \leqslant 1$, $0 < \beta \leqslant 1$, тогда интегралы Лебега $\int_0^\pi x^{-\gamma} f(x)\, dx$, $\int_0^\pi x^{-\gamma} g(x)\, dx$ существуют для $\gamma < 2\beta/(\alpha+\beta)$.

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 4 и, кроме того, $0 < \beta < \alpha < 1$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $L^\gamma(0, \pi)$ для $\gamma < (\alpha+\beta)/(\alpha-\beta)$.

В работе имеются опечатки. Например, стр. 74, строка 4 сверху, напечатано $\Sigma_{n=p}^N$ вместо $\Sigma_{n=p}^{\lambda-1}$; стр. 74, строка 8 сверху, напечатано $\Sigma_{n=\lambda}^{\lambda-1}$ вместо $\Sigma_{n=\lambda}^{r\lambda-1}$; стр. 76, строка 4 сверху, напечатано $\gamma < 2\alpha/(\alpha+\beta)$ вместо $\gamma < 2\beta/(\alpha+\beta)$.

П. Л. Ульянов

317. Теорема о рядах Фурье. Юдзёбо (A theorem on Fourier series. Yûjôbô Zuiman), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 1, 8—10 (англ.)

Пусть функция $f(x, t)$, определенная в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, относительно x периодична с периодом 2π и измерима, а также обладает тем свойством, что для некоторой периодической с тем же периодом функции $s(x)$, интегрируемой на $[0, 2\pi]$, для всех x и t $|f(x, t)| \leqslant s(x)$. Если, кроме того, $f(x, t)$ непрерывна по t почти для всех x из некоторого множества $A \subset [0, 2\pi]$ положительной меры и $\sigma_n(x, t)$ — соответствующие суммы Фейера относительно x, то $\sigma_n(x, t) \to f(x, t)$ равномерно по $t \in [0, 1]$ почти для всех x из A.

Исправление опечаток статьи см. реф. 318

А. Ф. Тиман

318. Опечатки. Юдзёбо (Errata. Yujôbô Zuiman), Kōdai Math. Sem. Repts, 1954, № 2, 64 (англ.)

См. реф. 317.

319. Замечание об абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье. Яно (A remark on absolute Cesàro summability of Fourier series. Yano Shigeki), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 194—195 (англ.)

Ряд называется $|C, r|$-суммируемым, если $\Sigma_1^\infty |\sigma_n^r - \sigma_{n-1}^r| < \infty$, где σ_n^r — (C, r)-средние ряда.

Известно, что $|C, r|$-суммируемость ряда Фурье функции из класса $L^p(0, 2\pi)$, $1 < p \leqslant 2$, есть локальное свойство при $r > 1/p$.

Автор доказывает существование функции $f(x) \in L^p(0, 2\pi)$, $p \geqslant 1$, равной нулю в интервале $(1, 2\pi)$ и такой, что ее ряд Фурье не суммируем $|C, 1/p|$ в точке $x = \pi$.

Следовательно, $|C, 1/p|$-суммируемость ряда Фурье функции из класса $L^p(0, 2\pi)$, $p \geqslant 1$, не является локальным свойством.

И. Е. Жак

320. Об абсолютной логарифмической суммируемости последовательности, связанной с рядом Фурье. Моханти, Мисра (On absolute logarithmic summability of a sequence related to a Fourier series. Mohanty R., Misra B.), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 1, 5—12 (англ.)

Пусть $\varphi(t)$ — четная с периодом 2π функция, суммируемая в $(0, \pi)$, a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — ее коэффициенты Фурье и $a_0 = 0$.

Доказывается, что если для $0 < \alpha < 1$ и $t > 0$ функция

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\, t^\alpha} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} \varphi(u)\, du$$

имеет ограниченную вариацию на $(0, \pi)$, то ряд

$$\Sigma_2^\infty a_n / \ln n \qquad (1)$$

суммируем методом $|R, \lambda(n), 1|$ при $\lambda(n) = \exp[(\ln n)^{1+1/\alpha}]$, т. е.

$$\int_A^\infty \left| d\left[\frac{\Sigma_{n<\omega} \{\lambda(\omega) - \lambda(n)\}\, a_n / \ln n}{\lambda(\omega)} \right] \right| < \infty.$$

Пользуясь этим и некоторыми примыкающими сюда прежними результатами Моханти (Proc. London Math. Soc., 1949, 51, 186—196; 1951, 52, 295—320), авторы получают ряд признаков абсолютной сходимости ряда (1). Ряд (1) абсолютно сходится при выполнении хотя бы одного из условий:

1) $\varphi(t)$ является функцией ограниченной вариации на $(0, \pi)$ и для $\delta > 0$ последовательность $\{n^\delta (\ln n)^{-1} a_n\}$ имеет ограниченное изменение;

2) $\varphi_\alpha(t)$ является функцией ограниченной вариации на $(0, \pi)$ и последовательность $\{n a_n / (\ln n)^{1+1/\alpha}\}$ имеет ограниченное изменение.

3) $\varphi(t) = O\{(\ln t^{-1})^{-\eta}\}$ $(0 < \eta < 1)$ и последовательность $\{n a_n\}$ имеет ограниченное изменение.

Отсюда следует, что при выполнении хотя бы одного из этих условий последовательность $\{n a_n\}$ суммируема методом $|R, \ln n, 1|$.

А. Ф. Тиман

321. О корнях трансцендентного уравнения, встречающегося в теории тригонометрических рядов. Верблюнский (On the roots of a transcendental equation, occurring in the theory of trigonometric series. Verblunsky S.), Math. Z., 1954, 61, № 3, 324—335 (англ.)

Пусть $Q(z)$ — мероморфная (нерациональная) функция, все полюсы которой μ_i действительные и простые $(\ldots < \mu_{-2} < \mu_{-1} < 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots)$. Если 0 есть полюс $Q(z)$, то он обозначается через μ_0. Пусть далее $\{C_n\}$ — последовательность окружностей $|z| = n + \delta$, где δ выбрано так, что для достаточно больших n ни один полюс $Q(z)$ не находится на C_n и $0 < \delta < 1$.

Рассматривается для этих n последовательность

$$H_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} Q(z) \cos z\xi\, dz,$$

где $\xi = x - t$, $\alpha \leqslant x$, $t \leqslant \alpha + 2\pi$, α — любое число, и функции $f(x) \in L[\alpha, \alpha + 2\pi]$ ставятся в соответствие суммы

$$s_n(x)=\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t)\,H_n(\xi)\,dt=$$

$$=\sum_{|\mu_k|<n+\delta}(\alpha_k\cos\mu_k x+\beta_k\sin\mu_k x),$$

где $\alpha_k-i\beta_k=r_k\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}f(t)\,e^{-i\mu_k t}dt$, а r_k вычет $Q(z)$ относительно μ_k.

Доказывается, что если

$Q(z)=(A\cos\pi z+B\sin\pi z)/2\,(A\sin\pi z-B\cos\pi z)$, причем $A\equiv A(z)$ и $B\equiv B(z)$ — взаимно простые полиномы с действительными коэффициентами, а уравнение

$$A\sin\pi z-B\cos\pi z=0 \qquad (1)$$

имеет лишь простые и действительные корни, то $s_n(x)$ является равномерно равносходящейся в $[\alpha,\ \alpha+2\pi]$ с n-й суммой Фурье функции $f(x)$ (с $2n$-й суммой Фурье функции $\varphi(x):\varphi(x)=f(x)$ при $\alpha\leqslant x\leqslant\alpha+2\pi$, $\varphi(x)=-f(x-2\pi)$ при $\alpha+2\pi<x<\alpha+4\pi$), когда степень $A(z)$ выше степени $B(z)$ (соответственно, когда степень $A(z)$ ниже степени $B(z)$). При равных степенях $A(z)$ и $B(z)$ существует число λ $(0<\lambda<1/2)$ такое, что $s_n(x)$ является равномерно равносходящейся в $[\alpha,\alpha+2\pi]$ с $t_n(x)=s_n^{(1)}(x)\cos\lambda x+s_n^{(2)}(x)\sin\lambda x$, где $s_n^{(1)}(x)$ — n-я сумма Фурье функции $f(x)\cos\lambda x$, $s_n^{(2)}(x)$ — функции $f(x)\sin\lambda x$. Кроме того, для частных видов уравнения (1) устанавливаются условия, при которых (1) имеет действительные и простые корни. Так, например, когда степени $A(z)$ и $B(z)$ не превышают 1, показывается, что уравнение (1) сводится к уравнению

$$(w+a)\sin w-b\cos w=0, \qquad (2)$$

все корни которого действительные и простые, если точка $(a,\ b)$ находится над циклоидой

$$2x=\varphi+\sin\varphi,\qquad 2y=\cos\varphi-1; \qquad (3)$$

если $(a,\ b)$ под циклоидой (3), то среди нулей (2) имеется пара мнимых, а если $(a,\ b)$ на циклоиде, то нули (2) действительные, но не простые.

Разложение $\Sigma(\alpha_k\cos\mu_k x+\beta_k\sin\mu_k x)$, где μ_k — корни уравнения $h\sin\pi z+z\cos\pi z=0$, являющегося частным случаем уравнения (1), изучалось ранее Фейешом (Fejes L., Acta Univ. szeged. sec. scient. math., 1946, 11, 28—36), автором (Bull. sci. math., 1952, 76, 85—96; РЖМат, 1955, 2624), а также Хаммерсли (РЖМат, 1954, 2083).

И. М. Ганзбург

322. Об одном неравенстве А. Зигмунда для функций двух переменных. Джваршейшвили А. Г., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 9, 561—568

Пусть $f(x,y)$ — функция, 2π-периодическая по каждому переменному и интегрируемая по Лебегу на прямоугольнике $[-\pi,\pi;\ -\pi,\pi]$. Рассматривается функция

$$g(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta_{\substack{s\\x}}\Delta_{\substack{t\\y}}f(x,y)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\,ds\,dt,$$

где $\Delta_{\substack{s\\x}}\Delta_{\substack{t\\y}}f(x,y)=f(x,y)-f(x+s,y)-f(x,y+t)+f(x+s,y+t)$ есть вторая смешанная разность $f(x,y)$.

Модуль непрерывности функции двух переменных $F(x,y)$ определяется так:

$$\omega[F;\delta,\eta]=\sup_{|h|\leqslant\delta,\ |k|\leqslant\eta}\Delta_{\substack{h\\x}}\Delta_{\substack{k\\y}}F(x,y).$$

Автором доказывается неравенство

$$|\Delta_{\substack{h\\x}}\Delta_{\substack{\eta\\y}}g(x,y)|\leqslant K\left[\int_0^h\int_0^\eta\frac{\omega(f;t,\tau)}{t\tau}\,dt\,d\tau+\right.$$

$$+\eta\int_0^h\int_\eta^\pi\frac{\omega(f;t,\tau)}{t\tau^2}\,dt\,d\tau+h\int_0^\eta\int_h^\pi\frac{\omega(f;t,\tau)}{\tau t^2}\,dt\,d\tau+$$

$$\left.+h\eta\int_h^\pi\int_\eta^\pi\frac{\omega(f;t,\tau)}{t^2\tau^2}\,dt\,d\tau\right],$$

где постоянная K не зависит от h и η.

Аналогичное неравенство для случая функции одного переменного было получено Зигмундом (Zygmund A., Prace mat.-fiz., 1923—1924, 33). Следует отметить некоторую небрежность в изложении работы. Так, например, не указывается, что в равенствах для сопряженных функций

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt\ \text{ и }\ g(x,y)$$

интегралы нужно понимать в смысле главного значения.

И. Г. Соколов

323. О теории локализации для двойных тригонометрических рядов. Госселин (On the theory of localization for double trigonometric series. Gosselin R. P.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1951, 24, № 2, 49—77 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (англ.)

Распространяя на двойные ряды теорию Райхмана формального умножения рядов, автор обобщает теорему Лепецкого (Lepecki Z., Fac. filos. Ciênc. e letrs do Paraná, 1940—1941, 159—187) о локализации двойных тригонометрических рядов с коэффициентами, стремящимися к нулю, на двойные тригонометрические ряды, коэффициенты которых удовлетворяют более общим условиям. В рассуждениях автор следует по пути, указанному в работе Зигмунда (Zygmund A., Math. Z., 1926, 24, 47—104), в которой теория Райхмана применена к проблемам локализации обыкновенных тригонометрических рядов. Обобщенная теорема о локализации двойных тригонометрических рядов состоит в следующем: Даны тригонометрические ряды в комплексной форме:

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}a_{mn}e^{i(mx+ny)},\qquad\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}a'_{mn}e^{i(mx+ny)}. \qquad (1)$$

Пусть $a_{mn}=a'_{mn}=0$ для $m=0$ или $n=0$ и a_{mn} и a'_{mn} суть $o[(|m|+1)^{\beta}(|n|+1)^{\sigma}]$ при $|m|\to\infty$ и $|n|\to\infty$ $(\beta>-1,\ \sigma>-1)$ и пусть $F(x,y)$ и $F'(x,y)$ — суммы абсолютно сходящихся рядов

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}\frac{a_{mn}}{(im)^K(in)^L}e^{i(mx+ny)},$$

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}\frac{a'_{mn}}{(im)^K(in)^L}e^{i(mx+ny)}, \qquad (2)$$

где целые числа K и L удовлетворяют условиям: $K-\beta>1$, $L-\sigma>1$. Тогда из предположения, что $F(x,y)=F'(x,y)$ для (x,y), удовлетворяющих условию $-\pi\leqslant a<x<b\leqslant\pi$ или $-\pi\leqslant c<y<d\leqslant\pi$, следует, что в прямоугольнике $a<a'\leqslant x\leqslant b'<b$, $c<c'\leqslant y\leqslant d'<d$ ряды (1) равномерно равносуммируемы (C,β,σ) (т. е. разность этих рядов равномерно (C,β,σ)-суммируема к 0) в смысле Прингсгейма. Если при тех же предположениях коэффициенты рядов (1) суть $o[(|m|+1)^{\beta}(|n|+1)^{\sigma}]$ при $|m|\to\infty$ или $|n|\to\infty$, то сопряженные с (1) ряды

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(mn)\,a_{mn}e^{i(mx+ny)},$$

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}\operatorname{sgn}(mn)\,a'_{mn}e^{i(mx+ny)}$$

равномерно равносуммируемы (C, β, σ) в широком смысле (т. е разность этих двух рядов равномерно (C, β, σ)-суммируема к некоторой функции). Теорема о локализации верна также в случае, когда вместо первого условия, наложенного на коэффициенты a_{mn} и a'_{mn}, предполагается, что a_{m0} и a'_{m0} суть $o[(|m|+1)^{\beta}]$ при $|m|\to\infty$ и a_{0n} и a'_{0n} суть $o[(|n|+1)^{\sigma}]$ при $|n|\to\infty$, а вместо рядов (2) берутся ряды вида

$$a_{0,0}\frac{x^K y^L}{K!\,L!}+\frac{x^K}{K!}\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_{0n}}{(in)^L}e^{iny}+$$

$$+\frac{y^L}{L!}\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_{m0}}{(im)^K}e^{imx}+\sum_{m,\,n=-\infty}^{\infty}{}'\frac{a_{mn}}{(im)^K(in)^L}e^{i(mx+ny)},$$

где Σ' обозначает, что соответствующие члены в сумме отсутствуют, а целые числа K и L удовлетворяют условиям $K-\beta>2$, $L-\sigma>2$. L. Jeśmanowicz

324. Обобщенные лапласианы второго рода и двойные тригонометрические ряды. Шапиро (Generalized Laplacians of the second kind and double trigonometric series. Shapiro Victor L.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 173—178 (англ.)

Определение r-го обобщенного лапласиана 2-го рода функции $F(x, y)$ $\Delta_2^r F(x, y)\equiv\Delta_{2,r}F(x, y)$ см. РЖМат, 1955, 5001.

Для двойного тригонометрического ряда

$$\sum a_M e^{iMX}\equiv\sum a_{mn}e^{i(mx+ny)} \qquad (1)$$

доказывается следующий основной результат, аналогичный полученному ранее для лапласианов 1-го рода $\Delta_r F(x, y)\equiv\Delta_{1,r}F(x, y)$ (РЖМат, 1955, 674).

Теорема 2. Пусть ряд (1) суммируем $(C, 2\alpha)$ по кругам в точке $X_0=(x_0, y_0)$ к сумме s, причем 2α — целое $\geqslant 0$, $a_M=o(|M|^{2\alpha+1-\varepsilon})(|M|=(m^2+n^2)^{1/2}, \varepsilon>0)$, и пусть r — целое $\geqslant\alpha+1$. Положим

$$F(X)=\frac{a_0(x+y)^{2r}}{2^r(2r)!}+\text{l. i. m.}_{R\to\infty}\sum_{1\leqslant|M|\leqslant R}(-1)^r\frac{a_M}{|M|^{2r}}e^{iMX}$$

Тогда r-й обобщенный лапласиан второго рода функции $F(X)$ существует в точке X_0 и равняется s.

Отмечается, что полученные результаты можно распространить и на многократные тригонометрические ряды. Ф. В. Широков

325. Некоторые элементарные наравенства для многочленов. Рогозинский (Some elementary inequalities for polynomials. Rogosinski W. W.), Math. Gaz., 1955, **39**, № 327, 7—12 (англ.)

Рассматриваются многочлены $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ степени не выше n, удовлетворяющие в $n+1$ действительных точках $x_0<x_1<\ldots<x_n$ неравенствам $|p(x_i)|\leqslant M_i$. При помощи интерполяционной формулы Лагранжа показывается, что для $x\notin(x_0, x_n)$

$$|p^{(k)}(x)|\leqslant|P^{(k)}(x)| \quad (0\leqslant k\leqslant n), \qquad (1)$$

где $P(x)=\Sigma_0^n A_k x^k$ определяется условиями $P(x_i)=(-1)^{n-i}M_i$, причем равенство в (1) выполняется только для $p(x)=\eta P(x)$, $|\eta|=1$ (теорема 1).

В частности, если $0\notin(x_0, x_n)$, то из (1) следуют неравенства

$$|a_k|\leqslant|A_k| \quad (0\leqslant k\leqslant n), \qquad (2)$$

представляющие собой частный случай теоремы С. Н. Бернштейна (Экстремальные свойства полиномов, М.— Л., 1937, гл. 1, § 12, стр. 54) о полиномах-осцилляторах. Далее, в предположении, что точки $\{x_i\}$ расположены симметрично относительно $x=0$, выводятся неравенства, аналогичные неравенствам (2) и в сущности являющиеся их следствиями. Теперь, однако, приходится различать случаи $n-k\equiv 0\pmod 2$ и $n-k\equiv 1\pmod 2$.

Отмечается, что если $|p(x)|\leqslant 1$ на отрезке $[-1, 1]$, то с помощью (1) сразу получаются неравенства

$$|p^{(k)}(x)|\leqslant\left(\frac{2}{1+|x|}\right)^k T_n^{(k)}(1)\ (-1\leqslant x\leqslant 1;\ \ 1\leqslant k\leqslant n),$$

выведенные ранее с помощью аналогичных соображений С. Н. Бернштейном (Собр. соч., т. I, М., 1952, 151—156). В. С. Виденский

326. Обобщение формулы Фейера для рядов по обычным ортогональным многочленам. Кемпбелл (Généralisation de la formule de Fejer pour les séries de polynomes orthogonaux usuels. Campbell Robert), Ann. scient. École norm. supér., 1954, **71**, № 4, 389—419 (франц.)

Пусть $\{P_n(x)\}_0^\infty$ — система многочленов, ортонормальная по весу $p(x)$ на $[a, b]$. Тогда, как известно,

$$P_n(x)=(A_nx+B_n)P_{n-1}(x)-A_nA_{n-1}^{-1}P_{n-2}(x) \qquad (1)$$

и если a_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, то

$$S_n[f;\ x]=S_n(x)=\sum_0^n a_kP_k(x)=$$

$$=A_{n+1}^{-1}\int_a^b G_n(x,\ t)(x-t)^{-1}f(t)\,p(t)\,dt,$$

где $G_n(x, t)=P_{n+1}(x)P_n(t)-P_n(x)P_{n+1}(t)$.

Полагая $\sigma_n^{(1)}(x)=n^{-1}\Sigma_0^{n-1}S_k(x)$, автор, при некоторых предположениях, ищет явное выражение $\sigma_n^{(1)}$ в виде сингулярного интеграла. Именно, исходя из соотношения

$$\sum_0^{n-1}A_{k+1}^{-1}G_k(x,\ t)=-A_n^{-1}P_{n-1}(x)P_n(t)+$$

$$+\sum_1^{n-1}P_k(t)[A_{k+1}^{-1}P_{k+1}(x)-A_k^{-1}P_{k-1}(x)]+$$

$$+A_1^{-1}P_1(x)P_0(t)$$

и вводя функции $f_n(x)$ и $g_n(x)$, для которых $P_n(x)=f_n(x)P_{n-1}(x)-g_n(x)P'_{n-1}(x)$, легко получить

$$\sum_0^{n-1}A_{k+1}^{-1}G_k(x,\ t)=A_n^{-1}P_{n-1}(x)P_n(t)+$$

$$+\sum_1^{n-1}P_k(t)[U_k(x)P_k(x)-V_k(x)P'_k(x)]+$$

$$+A_1^{-1}P_1(x)P_0(t),$$

где $U_k(x)=2A_{k+1}^{-1}f_{k+1}(x)-x-B_{k+1}A_{k+1}^{-1}$, $V_k(x)=2A_{k+1}^{-1}g_{k+1}(x)$.

Пусть $f_n(x)$ и $g_n(x)$ можно выбрать так, чтобы $U_k(x)$ и $V_k(x)$ не зависели от k. Тогда, используя соотношение $(x-t)P_n(t)P'_n(x)=\Delta_{n+1}(x,\ t)-\Delta_n(x,\ t)-P_n(t)P_n(x)$, где $\Delta_n(x,\ t)=\frac{1}{A_n}\begin{vmatrix}P'_n(x)&P'_{n-1}(x)\\P_n(t)&P_{n-1}(t)\end{vmatrix}$, выводимое из (1), и формулу Кристоффеля—Дарбу $\Sigma_0^nP_k(x)P_k(t)=A_{n+1}^{-1}G_n(x, t)/(x-t)$, можно найти выражение для $\sigma_n^{(1)}$ в конечном виде.

В частности, этот метод позволяет найти выражение $\sigma_n^{(1)}$ для рядов Фурье по многочленам Эрмита и Лагерра.

Далее рассматриваются обобщенные средние $m_n = \Sigma_0^n \alpha_k S_k(x) / \Sigma_0^n \alpha_k$, где постоянные α_k таковы, что соответствующие функции $U_k(x)$ и $V_k(x)$ не зависят от k. Способом, аналогичным приведенному, удается найти явное выражение для m_n. Таким образом находятся обобщенные средние m_n для рядов Фурье по ультрасферическим многочленам.

В заключение изучается вопрос о средних Чезаро и обобщенных средних высших порядков и изложенный метод применяется к рядам по функциям Бесселя.

Примечание референта. Вся глава III работы неубедительна, так как не имеют доказательной силы соображения, приведшие автора к формулам (5) и (6) этой главы. Кроме того, во всех случаях, когда автор оперирует с асимптотическими формулами, его рассуждения, по мнению референта, также не корректны, так как недостаточно тщательно учитывается влияние различных математических операций на порядок остаточных членов этих формул (например, на стр. 401 вместо $o(1)/(x-t)$ пишется $O(1)$). В работе большое количество опечаток и мелких ошибок.

Г. И. Натансон

327. О некоторых приемах обобщенного интерполирования. Молдован (Observaţii asupra unor procedee de interpolare generalizate. Moldovan Elena), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz., 1954, **6**, № 3, 477—482 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматриваются интерполяционные многочлены Эрмита — Фейера (по узлам Чебышева)

$$H_{2n-1}(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) (1 - x x_{k,n}) \frac{T_n^2(x)}{(x - x_{k,n})^2},$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$ — многочлен Чебышева и $x_{k,n}$ $(k = 1, \ldots, n)$ — его нули.

Показывается, что $|f(x) - H_{2n-1}(x)| = O[\omega(\ln n/n)]$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$. и этот результат не может быть улучшен (пример: $f(x) = |x|$). Рассматривается также некоторая модификация многочленов Бернштейна:

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n)\, l_k(x),$$

где $l_i(x) = \dfrac{\lambda_{i-1}(x) + 2\lambda_i(x) + \lambda_{i+1}(x)}{4}$, $0 < i < n$,

$l_0(x) = \dfrac{3\lambda_0(x) + \lambda_1(x)}{4}$, $l_n(x) = \dfrac{\lambda_{n-1}(x) + 3\lambda_n(x)}{4}$ и

$\lambda_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$.

Доказывается, что приближение многочленами B_n^* имеет тот же порядок, что и приближение многочленами Бернштейна, а именно

$$|f(x) - B_n^*(f; x)| \leqslant 2\omega(\sqrt{n + 2i}/2n).$$

И. Г. Соколов

328. Об отклонениях от нуля целых функций конечной степени в пространстве (L_p). Ибрагимов И. И., Докл. АН АзССР, 1955, **11**, № 2, 79—86 (резюме азерб.)

Рассматривается класс целых функций $g_\nu(x)$ степени ν, для которых при заданном $p \geqslant 1$ $\| g_\nu(x) \|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g_\nu(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty$, и устанавливается, что если $p \leqslant q \leqslant \infty$ и $\alpha \geqslant 0$, то

$$\| g_\nu(x) \|_q \leqslant C \nu^{1/p - 1/q + \alpha/p} \| g_\nu(x)\, x^{\alpha/p} \|_p. \qquad (1)$$

Константа C зависит только от значений p, q и α. Отсюда при условии, что $\| g_\nu \|_p = 1$, вытекает оценка снизу $\| g_\nu(x)\, x^{\alpha/p} \|_p \geqslant B(\alpha, p)/\nu^{\alpha/p}$. Неравенство (1) при $\alpha = 0$ со значением $C = 2$ ранее установлено С. М. Никольским (Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 244—278).

Примечание референта. Автор делает попытку перенести на метрику L_p, $p < \infty$, следующую задачу, решенную С. Н. Бернштейном (Докл. АН СССР, 1946, **51**, 567—568): найти наименьшее значение $\| g_\nu \|_\infty$ среди всех целых функций $g_\nu(x)$ степени ν, монотонно изменяющихся на всей действительной оси и удовлетворяющих условию $g_\nu'(0) = 1$. В реферируемой работе рассматривается задача: получить оценку снизу для $\| g_\nu \|_p$, $p < \infty$, среди всех целых функций степени ν, монотонных на $(-\infty, \infty)$ и подчиненных условию $g_\nu'(0) = 1$. Однако следует заметить, что для любой такой функции $\| g_\nu \|_p = \infty$. А. Ф. Тиман

329. Один класс обобщенных функций Уолша. Крестенсон (A class of generalized Walsh functions. Chrestenson H. E.), Pacif. J. Math., 1955, **5**, № 1, 17—31 (англ.)

Вводится система функций Радемахера целого порядка $\alpha (\alpha \geqslant 2)$:

$$\varphi_0(x) = \exp(2k\pi i/\alpha) \text{ при } k/\alpha \leqslant x < (k+1)/\alpha,$$
$$k = 0, \ldots, \alpha - 1,$$
$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(\alpha^n x) \quad (n \geqslant 0).$$

С помощью этих функций вводится система функций Уолша порядка α:

$$\psi_0(x) = 1, \quad \psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{a_1}(x) \ldots \varphi_{n_m}^{a_m}(x)$$

для $n = a_1 \alpha^{n_1} + \ldots + a_m \alpha^{n_m}$, где $0 < a_j < \alpha$ и $n_1 > \ldots > n_m$. При $\alpha = 2$ получается обычная система функций Уолша.

Автор рассматривает ряды Фурье по системе функций Уолша порядка α и получает для них результаты, аналогичные известным результатам для тригонометрических рядов Фурье: теорему о сходимости ряда Фурье для функции с ограниченной вариацией, теорему локализации, теоремы, соответствующие признакам Дини и Дини — Липшица, оценки коэффициентов Фурье через модуль непрерывности и через полную вариацию разлагаемой функции, теорему о равномерной суммируемости методом $(C, 1)$ ряда Фурье для непрерывной функции.

Эти результаты не являются новыми. Аналогичные результаты для некоторого класса ортонормальных систем, содержащего (как частный случай) системы функций, рассмотренные автором, были получены Н. Я. Виленкиным (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, **11**, № 4, 363—400). А. А. Шнейдер

330. Равномерная полнота семейства функций вида $(1 + k_p x)^{-1}$. Порчелли (Uniform completeness of sets of reciprocals of linear functions. Porcelli Pasquale), Duke Math. J., 1954, **21**, № 4, 595—597 (англ.)

Рассматривается последовательность функций K: $\{(1 + k_p x)^{-1}\}$ (РЖМат, 1955, 3156).

Доказывается, что для того чтобы последовательность K была полна в пространстве непрерывных на $[0, 1]$ функций, необходимо и достаточно, чтобы она была полна в пространстве $L^2[0, 1]$ или чтобы тождественная единица принадлежала к замыканию в смысле $L^2[0, 1]$ всех линейных комбинаций K.

А. П. Тамадян

331 К. Теория интерполирования и приближения функций. Изд. 2-е, перераб. Гончаров В. Л., М., Гостехиздат, 1954, 328 стр., 15 р. 95 к.

Первое издание этой книги, вышедшее в 1934 г., явилось первым образцом связного изложения всей совокупности вопросов, относящихся к приближенному представлению функций многочленами. По этой книге училось целое поколение советских математиков. Уже давно назрела необходимость ее переиздания.

Содержание нового издания таково: Введение; Гл. 1. Точечное интерполирование; Гл. 2. Теоремы Вейерштрасса; Гл. 3. Квадратические приближения; Гл. 4. Средние степенные приближения и равномерные (наилучшие); Гл. 5. Интерполирование и приближение в комплексной области; Дополнение. Наилучшее приближение в линейном нормированном пространстве.

Существенными отличиями 2-го издания от 1-го являются следующие: 1) Наличие «Дополнения», в котором ранее изложенный материал переосмысливается с более общих точек зрения современного функционального анализа. 2) Объединение всего материала, относящегося к функциям комплексного переменного, в специальную главу (раньше этот материал был разбросан по отдельным главам). 3) Дано понятие о чебышевских системах функций и их применении в интерполировании. 4) Уточнен вопрос о неравенстве нулю определителя Грама. 5) Доказано неравенство А. А. Маркова для производной алгебраического многочлена. 6) Доказана оценка С. Н. Бернштейна для производной алгебраического многочлена в случае комплексного переменного. 7) Дано обобщение теоремы Рунге о приближении функции, аналитической в области, принадлежащее Уолшу. 8) Введено понятие о множителях, корректирующих интерполяционный процесс. 9) Теорема С. Н. Бернштейна об оценке наилучшего приближения функции через ее производную $(n+1)$-го порядка доказана способом И. В. Ценова. 10) Изложены условия А. Н. Колмогорова, характеризующие многочлен наилучшего приближения в случае комплексного переменного. При помощи этих условий строго доказана теорема о числе точек отклонения алгебраического многочлена. В первом издании доказательство этой теоремы содержало неточность.

Отметим некоторые погрешности во 2-м издании: 1) В оценке разности между интегралом и интегральной суммой (стр. 19) под δ надо понимать не наибольшее из $|\Delta z_k|$, а наибольший диаметр дуг $z_k z_{k+1}$. Соответствующее исправление надо внести и на стр. 285. 2) На стр. 243 в формуле (91) и еще в 4-х местах коэффициент $1/(2n)$ надо заменить на $1/(4n)$. 3) На стр. 292 в определении $\Phi_m(z)$ надо n всюду заменить на m. 4) На стр. 301 надо исправить абзац, следующий за неравенством (78).

И. П. Натансон

332 Д. Обобщение неравенств С. Н. Бернштейна и А. А. Маркова для полиномов многих переменных и их применение в теории приближений. Исмайлов А. Я. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азерб. ун-т, Баку, 1955

333 Д. Некоторые вопросы полноты полиномов многих переменных при взвешенном приближении. Тавадян А. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ереванск. ун-т, Ереван, 1955

См. также: 11, 34, 119, 136, 138, 274, 276, 334, 384, 488, 489, 495, 499, 504, 523, 531, 534, 567, 576,578, 582, 599, 610, 620, 621, 623, 625, 629 К, 636

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

334. Замечание о степенном ряде, расходящемся всюду на единичной окружности. Херцог (A note on power series which diverge everywhere on the unit circle. Herzog Fritz), Michigan Math. J., 1953—1954, 2, № 2, 175—177 (англ.)

Н. Н. Лузин первый построил степенный ряд $\Sigma_0^\infty a_n z^n$ с $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, расходящийся всюду на окружности $|z| = 1$, причем аргументы коэффициентов a_n образуют множество, всюду плотное на $[0, 2\pi]$. Автор выясняет, насколько существенно здесь последнее обстоятельство и строит ряд $\Sigma_0^\infty a_n z^n$ с $a_n \geqslant 0$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, расходящийся всюду на окружности $|z| = 1$. Строится также ряд $\Sigma_0^\infty a_n \cos n\theta$ с $a_n \geqslant 0$, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, расходящийся для всех действительных значений θ.

Н. А. Давыдов

335. Несколько свойств, относящихся к степенным рядам и аналитическим функциям, представимым ими. Терем (Quelques propriétés relatives aux séries entières et aux fonctions analytiques correspondantes. Teghem Jean), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 175—176 (франц.)

Краткое резюме работы автора (РЖМат, 1955, 5734).

Н. А. Давыдов

336. Тауберовы теоремы для рядов Дирихле и рядов Ламберта. Коревар (Numerical Tauberian theorems for Dirichlet and Lambert series. Korevaar Jacob), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A 57, № 2, 152—160; Indagationes math., 1954, 16, № 2, 152—160 (англ.)

Относительно ряда Дирихле $F(w) = \Sigma_1^\infty a_n n^{-w}$ $(w = u + iv)$ доказывается теорема: Пусть $|a_n| \leqslant A_1 n^{A_2}$, $n = 1, 2, \ldots$ (в силу этого условия ряд сходится в некоторой полуплоскости) и пусть имеется такое $a > 0$, что в полуплоскости $u > -a$ функция $F(w)$ регулярна и удовлетворяет неравенству $|F(w)| < A_3 \exp(A_4 |v|)$. Если

$$a_n \geqslant -A_5/n \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

то тогда для $s_n = \Sigma_1^n a_k$, где $s = F(0)$, вместо наилучшая оценка

$$|s_n - s| \leqslant c/\ln(n+1). \tag{2}$$

Эта теорема, как показывается, эквивалентна следующей теореме относительно ряда $f(x) = \Sigma_1^\infty a_n e^{-nx}$: Если ряд сходится для $x > 0$, $f(x)$ удовлетворяет (для некоторого s и положительного α) условию

$$|f(x) - s| \leqslant \begin{cases} A_3 x^\alpha, & 0 < x < 1 \\ A_3, & x \geqslant 1 \end{cases} \tag{3}$$

и выполняется неравенство (1), то тогда имеет место

оценка (2). Для ряда Ламберта $f(x)=\Sigma_1^\infty a_n nx/(e^{nx}-1)$ устанавливается аналогичная теорема: Если ряд сходится для $x>0$, $f(x)$ удовлетворяет условию (3) и выполняется неравенство (1), то тогда в предположении, что дзета-функция $\zeta(w+1)$ не имеет нулей в области $u\geqslant -a\{\ln(2+|v|)\}^{-b}$ $(a>0,\ b\geqslant 0)$ (известно, что в такой области при $b>3/4$ нет нулей), имеет место оценка $|s_n-s|\leqslant c\{\ln\ln(n+e)\}^b/\ln(n+1)$.

А. Ф. Леонтьев

337. Одна теорема о пропусках для рядов Дирихле. Авакумович (Ein Lückensatz für Dirichletsche Reihen. Avakumović Vojislav G.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 79—81 (нем.)

Доказывается:

Теорема 1. Если 1) ряд $D(s)=\Sigma_{\nu=1}^\infty a_\nu e^{-\lambda_\nu s}$, где $s=\sigma+it$, $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$, сходится для $\sigma>0$;

2) $|D(s)|\leqslant C_1$ для всех $|t|\leqslant T$, $\sigma>0$ при фиксированном $T>0$;

3) $\lim_{y\to+\infty}\pi^{-1}\int_{-T}^{T}t^{-1}\sin yt\,Q(t)\,dt=Q(0)$, где $Q(t)=\lim_{\sigma\to 0}D(\sigma+it)$ для почти всех $|t|\leqslant T$;

4) $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geqslant 2\pi/T$,

существует константа C_2, не зависящая от T и такая, что при $n\to\infty$ $\overline{\lim}\,|\Sigma_1^n a_\nu - Q(0)|\leqslant C_2/T$.

В частности, если условия 2) и 3) выполнены для каждого $T>0$, то $\Sigma_1^\infty a_\nu=Q(0)$.

В качестве следствий теоремы приводятся следующие предложения, в которых

$$f(z)=\sum_1^\infty a_\nu z^\nu. \qquad (1)$$

Теорема 2. Если функция $f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и в этом круге $|f(z)|<1$, то ряд (1) сходится в каждой точке окружности $|z|=1$, в которой $f(z)$ регулярна.

Теорема 3. Если $f(z)$ регулярна в круге $|z|<1$ и $a_n=0$ для $n_k<n<n_{k+1}$, причем $n_{k+1}-n_k\to\infty$ при $k\to\infty$, то ряд (1) сходится в каждой точке окружности $|z|=1$, в которой $f(z)$ регулярна.

Примечание референта. Очевидно, что теорема 2 является частным случаем теоремы Фату, на что автор не указывает.

Теорема 3 беспредметна, ибо из условия теоремы следует, что $n_k/k\to\infty$ при $k\to\infty$ и, следовательно, по теореме Фабри (Харди Г., Расходящиеся ряды, М., 1951, 258) каждая точка окружности $|z|=1$ будет особой точкой для функции $f(z)$. Н. А. Давыдов

338. Об особенностях разложений зональной гармонической функции. Gerő (On the singularities of zonal harmonic expansions. Szegö G.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 5, 561—564 (англ.)

Пусть $\Sigma_0^\infty a_n r^n P_n(\cos\theta)$ — разложение зональной гармонической функции $u(r,\theta)$ с вещественными коэффициентами a_n и $\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=1$ и пусть $f(\zeta)=f(re^{i\theta})$ — аналитическая функция, определяемая рядом $\Sigma_0^\infty a_n\zeta^n$. Тогда обе функции регулярны для $r=|\zeta|<1$; кроме того, граничная точка $(1,\theta)$ является регулярной точкой $u(r,\theta)$ тогда и только тогда, когда точка $\zeta=e^{i\theta}$ есть регулярная точка функции $f(\zeta)$ (здесь P_n — многочлен Лежандра n-й степени; вещественность коэффициентов a_n не имеет существенного значения для доказательства теоремы).

Указывается, что вследствие этой теоремы все теоремы о свойствах степенных рядов на круге сходимости ведут к аналогичным теоремам для зональных гармонических разложений. Б. А. Рымаренко

339. Дальнейшие результаты об алгебраических базисных множествах полиномов. I, II. Макар, Макар (Further results on algebraic basic sets of polynomials. I, II. Makar Ragy H., Makar Bushra H.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 3, 306—318 319—330 Indagationes math., 1954, 16, № 3, 306—318, 319—330 (англ.)

Основные понятия см. РЖМат, 1954, 1628, 1994.

В части I доказывается теорема: Пусть $\{p_n(z)\}$ — алгебраическое степени m базисное множество полиномов, для которого $\overline{\lim}\,u(n)/n=u<\infty$ $(u(n)$ — степень $p_n(z))$. Тогда порядки $\{p_n(z)\}$ и его множеств-степеней $\{p_n(z)\}^\nu$ удовлетворяют неравенствам

$$\omega^{(\nu)}\leqslant A\sum_{i=0}^{m+|\nu|-2}u^i\ (1\leqslant|\nu|\leqslant m-1),$$

$$\omega^{(\nu)}\leqslant A\sum_{i=0}^{2m-3}u^i\ (|\nu|>m-1).$$

Здесь $\omega^{(\nu)}$ — порядок $\{p_n(z)\}^\nu$,

$$A=\lim_{R\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln A_n(R)}{n\ln n},$$

$$A_n(R)=\max_{|z|=R}|p_n(z)|.$$

В приведенных соотношениях равенства могут иметь место. В части II доказывается теорема: Пусть $\{p_n(z)\}$ — алгебраическое степени m базисное множество полиномов, удовлетворяющее следующим условиям: $\overline{\lim}\,u(n)/n=u<\infty$ и $p_{ni}\leqslant kM^n n^{An}$ при всех n и i. Тогда $\{p_n(z)\}$ эффективно в круге $|z|\leqslant R$, $R\geqslant 1$, в классе целых функций порядка $1/\omega$ и типа $1/\gamma(R)$, где $\omega=A\Sigma_{i=0}^{m-1}u^i$,

$$\gamma(R)=$$

$$=\frac{e}{\omega}\left[u^{(u+2u^2+\cdots+(m-1)u^{m-1})}A_M{}^{1+\cdots+u^{m-1}}R^{u^m}\right]^{1/\omega}$$

Приводится еще одна аналогичная теорема. Вводится понятие квазипростого базисного множества полиномов, обобщающее понятие простого базисного множества (РЖМат, 1954, 1994), и доказываются некоторые теоремы о порядке, типе и эффективности квазипростого алгебраического единичного базисного множества и его множеств-степеней. С. Я. Хавинсон

340. О приближении полиномами. Шагиняна А. Л., Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем., естеств. и техн. н., 1954, 7, № 4, 1—21 (резюме арм.)

Пусть Ω — односвязная область в плоскости z; $\nu(z)$ — положительный вес, определенный в Ω, причем $\nu(z)\in L(\Omega)$; $\Omega_p(\nu)$ — класс функций $f(z)$, регулярных в Ω и удовлетворяющих условию

$$\iint_\Omega \nu(z)\,|f(z)|^p d\sigma<\infty.$$

Рассматривается задача о полноте системы полиномов в классе Ω_p (1) для неограниченных областей, а также областей, не принадлежащих классу Каратеодори.

Доказываются, в частности, следующие теоремы:

1. Если область Ω не содержит угла Δ_α величины π/α $(\alpha>1/2)$ и функция $\theta(r)$ удовлетворяет некоторым условиям (в частности, можно считать, что $\theta(r)=r^\alpha[\ln r\ln_2 r\cdots\cdots(\ln_s r)^{1+\beta}]^{-1}$, где s — целое, $\beta>0$), то система полиномов полна в классе Ω_p (1).

2. Пусть L — кривая Жордана, уходящая в бесконечность, $p(r)$ — положительная возрастающая функция с $\int_L r^{-2}p(r)\,dr<\infty$ $(r=|z|)$. Тогда, если функция $f(z)$ непрерывна на L и $\lim e^{-p(r)}f(z)\to 0$ при $r\to\infty$, то равенство $\inf_{P_n}\sup e^{-p(r)}|f(z)-P_n(z)|=0$ в классе всевозможных полиномов P_n, вообще говоря, не выполняется (оговорен случай, когда $f(z)$ является граничным значением аналитической функции).

В. Л. Гончаров

341. Полнота близких систем. Евграфов М. А., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 525—526

Формулируется теорема:

Линейный оператор

$$L(F)=F(z)+(2\pi i)^{-1}\int_C K(z,\zeta)F(\zeta)\,d\zeta,$$

$$K(Z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(z)\zeta^{-(n+1)},\varepsilon_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}z^k,$$

$$\sup_n\sum_{k=0}^{\infty}|\varepsilon_{n,k}|R^{k-n}<1,$$

непрерывен (в смысле равномерной сходимости внутри круга) и непрерывно обратим в любом круге $|z|<r$, $r\leqslant R$.

Используя затем почти очевидное утверждение, что непрерывный оператор переводит заданный базис в некоторый новый, и подвергнув действию оператора $L(F)$ базисы $\{z^nP(z)\}$, $P(0)=1$ и $\{[\varphi(z)]^nP(z)\}$, $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=1$, автор формулирует две теоремы, из которых приведем одну:

Система $\{\varphi_n(z)\}$: $\varphi_n(z)=z^n\{P(z)+\varepsilon_n(z)\}$, $\max_{|z|\leqslant R}|\varepsilon_n(z)|=\varepsilon_n\to 0$, $P(0)=1$, образует базис в любом круге $|z|<r$, $r<R_1$, где $R_1=\min(R,R_2)$, R_2 — расстояние от точки $z=0$ до ближайшей особой точки $1/P(z)$.

Доказательства не приводятся. Имеются описки:

1) на стр. 525, строка 19 снизу, напечатано $\{\varphi_n(z)\}$, должно быть $\{\varphi_n^{(1)}(z)\}$; 2) на стр. 526, строка 15 сверху, напечатано $\overline{\lim}_{n\to\infty}$, должно быть $\sup_{0\leqslant n<\infty}$ (в реферате эта описка исправлена).

М. Г. Хапланов

342. Приближение функций рациональными дробями с заранее заданными полюсами. Тумаркин Г. Ц., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 6, 909—912

Пусть имеется таблица комплексных чисел: α_{k1}, α_{k2}, ..., α_{kN_k}, $k=1,2,\ldots$, где $|\alpha_{ki}|\neq 1$, $N_k\leqslant\infty$. Положим $S_k'=\sum_{i=1}^{N_k}(1-|\alpha_{ki}'|)$, $S_k''=\sum_{i=1}^{N_k}(1-|\alpha_{ki}''|^{-1})$, где $|\alpha_{ki}'|=\min(|\alpha_{ki}|,1)$, $|\alpha_{ki}''|=\max(|\alpha_{ki}|,1)$.

Рассматриваются последовательности рациональных функций вида

$$R_k(z)=\frac{c_0z^p+c_1z^{p-1}+\cdots+c_p}{(z-\alpha_{kn_1})(z-\alpha_{kn_2})\ldots(z-\alpha_{kn_p})},$$

где c_0, c_1, ..., c_p^1 — произвольные числа. Известно, что условия $\lim S_k'=\lim S_k''=\infty$ $(k\to\infty)$ необходимы и достаточны для того, чтобы каждую функцию, непрерывную на единичной окружности, можно было представить в виде предела равномерно сходящейся последовательности функций $R_k(z)$. В работе дается характеристика тех классов функций, определенных на окружности $|\zeta|=1$, которые в различных метриках могут быть сколь угодно хорошо аппроксимированы функциями $R_k(z)$, когда при $k\to\infty$

$\underline{\lim}\,S_k'<\infty$, $\lim S_k''=\infty$, или $\lim S_k'=\infty$, $\underline{\lim}\,S_k''<\infty$.

М. М. Джрбашян

343. О наилучших приближениях рациональными функциями. Мергелян С. Н., Джрбашян М. М., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 5, 673—675

Рассматриваются рациональные функции с заданными полюсами $R(z)=P(z)/\omega(z)$, где $P(z)$ — произвольный многочлен степени $\leqslant n$, а $\omega(z)=\prod_1^n(z-\lambda_i)$, причем $|\lambda_i|\neq 1$ (среди чисел $\{\lambda_i\}$ могут быть равные). Каждой конечной или бесконечной последовательности комплексных чисел $\{\lambda_i\}$ ставится в соответствие число

$$\varepsilon(\lambda)=[1+\Sigma'(1-|\lambda_i|)]^{-1}+[1+\Sigma''(1-|\lambda_i|^{-1})]^{-1},$$

причем сумма Σ' распространяется на те значения индекса i, для которых $|\lambda_i|<1$, а сумма Σ'' — на остальные.

Авторы дают необходимые и достаточные условия наилучшего приближения на окружности посредством указанных функций $R(z)$.

Если функция $f(z)$, определенная на $|z|=1$, имеет непрерывную производную $f^{(p)}(z)\in\operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha>0$, то при любых числах $\{\lambda_i\}_1^n$ справедливо неравенство

$$E_n(f;\lambda)=\inf_{R(z)}\max_{|z|=1}|f(z)-R(z)|<C[\varepsilon(\lambda)|\ln\varepsilon(\lambda)|]^{p+\alpha},$$

где C зависит только от $f(z)$ и p.

Если: 1) расходится по крайней мере один из рядов

$$\Sigma'(1-|\lambda_i|),\ \Sigma''(1-|\lambda_i|^{-1}),\ \Lambda=\{\lambda_i\}^{\infty};$$

2) для каждой конечной системы чисел $\{\lambda_i\}_1^n\in\Lambda$ справедливо неравенство

$$E_n(f;\lambda)\leqslant[\varepsilon(\lambda)]^{p+\alpha},\ 0<\alpha<1,$$

где $p\geqslant 0$ — целое число; 3) дуга l окружности $|z|=1$ не содержит предельных точек множества Λ, то функция $f(z)$ имеет на дуге l производную $f^{(p)}(z)\in\operatorname{Lip}\alpha$.

Я. Л. Геронимус

344. Равномерные приближения функций комплексного переменного. Мергелян (Uniform approximations to functions of a complex variable. Mergelyan S. N.), Amer. Math. Soc. Translation № 101, 1954, 99 pp.) (англ.)

Переведено из журнала «Успехи матем. наук», 1952, 7, № 2 (48), 31—122.

Перевод из Math. Revs. 1954, 15. № 7, 612.

345. Об оценке приближений формулами квадратур для аналитических функций. Турецкий А. Х., Уч. зап. Белорус. ун-та, 1954, № 16, 32—40

Если $f(z)$ — функция, аналитическая внутри окружности k радиуса r с центром в середине промежутка $(a\ b)$ действительной оси, а также на самой окружности, причем $r>(b-a)/2=l$, то отклонение суммы

$$Q=\sum_1^n p_kf(x_k)\quad(a<x_1<\ldots<x_n<b)$$

от интеграла

$I=\int_a^b f(x)\,dx$ оценивается неравенством:

$$|I-Q|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_k f(z)\left[\int_a^b\frac{dx}{z-x}-\sum_1^n\frac{p_k}{z-x_k}\right]dz\right|\leqslant MV\overline{U}/(2\pi),$$

где $M=\max|f|$, $U=\int_k\left|\int_a^b\frac{dx}{z-x}-\sum_1^n\frac{p_k}{z-x_k}\right|^2|dz|$.

Автор при заданных x_k выбирает веса p_k так, чтобы U имело наименьшее значение; затем, согласно этому же требованию, выбирает точки x_k. В итоге получается следующее выражение для минимума U:

$$U = 8\pi r \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}\left(\frac{l^2}{r^2}\right)^{2k-1} -$$

$$-\frac{2\pi}{r}\sum_{k,\nu=1}^{n}\frac{v_\nu P_n(v_k)\,R_n(u_\nu)}{(u_\nu - v_k)\,R_n'(v_k)P_n'(u_\nu)}\ln\frac{v_\nu+1}{v_\nu-1}\ln\frac{v_k+1}{v_k-1},$$

$$P_n(u) = \prod_1^n (u-u_\nu),\ R_n(v) = \prod_1^n (v-v_k),$$

$$u_\nu = (a+b)/2 - x_\nu,\quad v_k = r^2/u_k.$$

(Аналогичная идея использовалась Дейвисом (РЖМат, 1954, 3077) *Реф.*) В. Л. Гончаров

346. О конформном отображении круговых многоугольников. Штальман (Über konforme Abbildung von Kreisbogenpolygonen. Stallmann Friedemann), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 377—379 (нем.)

Краткое сообщение о применении асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений второго порядка класса Фукса в известной связи их с конформным отображением полуплоскости на круговые многоугольники. И. Е. Базилевич

347. Обобщение теоремы Альфорса об искажении. Хуккеман (An extension of the Ahlfors distortion theorem. Huckemann F.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, part 2, 261—265 (англ.)

Пусть D — односвязная область z-плоскости, в которой фиксированы два граничных элемента p_1 и p_2, и пусть s_{i_1}, s_i, s_k, s_{k_1} — непересекающиеся сечения области D такие, что s_{i_1} отделяет s_i от p_1, s_{k_1} отделяет s_k от p_2, s_i разделяет s_{i_1} и s_k, s_k разделяет s_{i_1} и s_{k_1}. Пусть область D отображена на полосу $|v|<\pi$ в плоскости $w = u+iv$ так, что $p_1(p_2)$ соответствует $-\infty(+\infty)$; положим $u_1(s_a) = \inf_{z\in s_a} u(z)$, $u_2(s_a) = \sup_{z\in s_a} u(z)$. Отобразим конформно четырехугольник, отсекаемый от D сечениями s_a и s_b, на прямоугольник так, чтобы s_a и s_b перешли в параллельные стороны с длиной 2π; длину сторон из другой пары обозначим $M(s_a, s_b)$. Пусть далее функция $\lambda(\zeta, \xi)$ отображает прямоугольник $0<\operatorname{Re}\zeta<\xi$, $0<\operatorname{Im}\zeta<1$ на полосу $0<\operatorname{Im}\lambda<1$ так, что точкам $\zeta=0$, i, $i+\xi$ соответствуют $\lambda=-\infty$, i, $+\infty$, и пусть $\lambda(\xi;\xi) = \Delta(\xi)$. Для функции $\Delta(\xi)$ имеет место оценка, данная Тейхмюллером (Teichmüller O., Dtsch. Math., 1938, 3, 621—678): $\Delta(\xi) > \pi^{-1}\ln(16^{-1}e^{\pi\xi} - 2^{-1})$ при $e^{\pi\xi} > 8$. Автор получает следующие результаты:

1. $u_1(s_k) - u_2(s_i) > 2\pi\Delta\left(\frac{1}{2\pi}M(s_i, s_k)\right)$, причем оценка наилучшая возможная.

2. $M(s_{i_1}, s_{k_1}) > u_2(s_k) - u_1(s_i)$, если $M(s_{i_1}, s_i) \geqslant 2\pi$, $M(s_k, s_{k_1}) \geqslant 2\pi$. Если здесь заменить 2π на $0{,}93\cdot 2\pi$, то указанная оценка может не иметь места.

Теорема 1 представляет собой легкую модификацию результата Тейхмюллера (статья цит. выше), ее следствием является теорема Альфорса об искажении (Неванлинна, Р., Однозначные аналитические функции, М. — Л., 1941, стр. 96). А. А. Гольдберг

348. Экстремальные многочлены и конформное отображение двусвязных областей. Лея (Polynômes extrémaux et la représentation conforme des domaines doublement connexes. Leja F.), Ann. polon. math., 1954, 1, № 1, 13—28 (франц.)

Пусть D — ограниченная двусвязная область комплексной плоскости, точки которой обозначаются буквами z, ζ или x, и пусть F_0 — внутренняя граница D (не сводящаяся к точке), а F_1 — внешняя граница D (F_1 является одновременно границей неограниченной области, лежащей в дополнении к F_1); множество $F = F_0 \cup F_1$ — граница области D.

Пусть $\varphi(\zeta)$ — функция, определенная на F формулами: $\varphi(\zeta) = 1$ для $\zeta \in F_0$, $\varphi(\zeta) = A$ для $\zeta \in F_1$, где $A = \text{const} > 1$. Для произвольного значения действительного параметра $\lambda \geqslant 0$ определим функцию $\omega(z, \zeta) = |z-\zeta|\,[\varphi(z)\varphi(\zeta)]^{-\lambda}$, $z, \zeta \in F$.

Обозначая символом $\zeta^{(n)}$ произвольную систему из $n+1$ граничных точек $\{\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$, положим:

$$\Delta^{(j)}(\lambda, \zeta^{(n)}) = \prod_{j\neq k=0}^{n} \omega(\zeta_j, \zeta_k) \text{ и } V(\lambda, \zeta^{(n)}) =$$

$$= \prod_{0\leqslant j<k\leqslant n} \omega(\zeta_j, \zeta_k).$$

Пусть $x^{(n,\lambda)}$ означает систему $n+1$ граничных экстремальных точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, т. е. таких, для которых функция $V(\lambda, \zeta^{(n)})$ достигает своего наибольшего значения: $V_n(\lambda, F) = V(\lambda, x^{(n,\lambda)})$. Точки x_0, $x_1, \ldots, x_n$ перенумерованы так, что $\Delta^{(0)}(\lambda, x^{(n,\lambda)}) \leqslant \Delta^{(j)}(\lambda, x^{(n,\lambda)})$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Функция

$$\Phi^{(0)}(z;\ \lambda, x^{(n,\lambda)}) = [\varphi(x_0)]^{n\lambda}\prod_{k=1}^{n}\frac{z-x_k}{x_0-x_k}$$

называется экстремальным многочленом для множества F. Функция

$$\varphi_n(z, \lambda) = e^{i\theta_n}\sqrt[n]{\Phi^{(0)}(z;\ \lambda, x^{(n,\lambda)})},$$

определенная выбором ветви корня и числа θ_n так, что $\varphi_n(a, \lambda) > 0$, аналитична в D. Предел $\varphi(z, \lambda) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(z,\lambda)$ также является аналитической функцией в D. Функция

$$\psi(z, \lambda) = [\varphi(z, \lambda)]^{1/[1-\alpha(\lambda)]} = \lim_{n\to\infty}[\varphi_n(z, \lambda)]^{n/(n-\nu)},$$

где $\nu = \nu(\lambda, n)$ — количество экстремальных точек системы $x^{(n,\lambda)}$, лежащих на F_1, а $\alpha(\lambda) = \lim_{n\to\infty}(\nu/n)$ (этот предел существует при $\lambda \geqslant 0$), аналитична, однозначна и однолистна в D.

Теорема. Предел $\psi(z) = \lim_{\lambda\to 0}\psi(z, \lambda)$ существует при $z \in D$. Функция $w = \psi(z)$ конформно отображает область D на круговое кольцо $1 < |w| < R$.

R. Leitner

349. Замечание по поводу теоремы Ренгеля, касающейся предположения Сегё. Цудзи (A remark on Rengel's theorem concerning Szegö's conjecture. Tsuji Masatsugu), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 4, 117—118 (англ.)

Если функция $w = f(z)$ ($f(0) = 0$, $f'(0) = 1$) голоморфна и однолистна в круге $|z|<1$ и если Γ-граница образа единичного круга $|z|<1$ при отображении $w = f(z)$, то система n выходящих из точки $w = 0$ лучей, образующих равные углы между собою, пересекает кривую Γ в точках $w_1, w_2, \ldots, w_n$ так, что выполняется неравенство $\max(|w_1|, |w_2|, \ldots |w_n|) \geqslant 4^{-2/n}$, причем равенство достигается только тогда, когда $f(z) = e^{i\theta}E_n(e^{-\theta i}z)$, $E_n(z) = z(1+z^n)^{-2/n}$.

Эти утверждения были высказаны в качестве гипотезы Сегё и доказаны Ренгелем (Rengel E., Schrift. math. Sem. und Inst. angew. Math. Univ. Berlin, 1933, 1, № 4, 141—162). В реферируемой работе дается упрощение доказательства Ренгеля, основанное на лемме

Ренгеля о функциях, голоморфных в четырехугольнике, из которого удалены сегменты, параллельные одной из сторон. Н. П. Романов

350. О некоторых специальных классах однолистных в круге аналитических функций. З м о р о в и ч В. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 175—182

Рассматриваются следующие классы функций в $|z|<1$: класс C-функций в круге $|z|<1$ — класс аналитических функций с положительной действительной частью в этом круге; U^* и U^0 — классы аналитических нормированных однолистных функций соответственно звездных и выпуклых в $|z|<1$; $U_{(\gamma)}$ и $\widetilde{U}_{(\gamma)}$ — классы аналитических нормированных функций $f(z)$, для которых соответственно $e^{i\gamma}f'(z)$ и $e^{i\gamma}zf'(z)/f(z)$ являются C-функциями в $|z|<1$, где γ действительно и $|\gamma|<\pi/2$. При этом функция $f(z)$ нормируется обычными условиями: $f(0)=0$, $f'(0)=1$.

Приводятся теоремы о представлении функций указанных классов интегралами Стилтьеса. Большая часть их в статье не доказывается, так как они были доказаны ранее (Ахиезер Н., Крейн М., О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938, стр. 46, Зморович В. А., Наукові зап. Київ. держ. пед. ін-ту, 1948, 6, № 3, 44—72; Докл. АН СССР, 1950, 72, № 5, 833—836; 1952, 86, № 3, 465—468).

В связи с рассмотренными классами функций ставится следующая, не решенная до сих пор задача. Требуется определить все выражения вида $F(z)=J(z; f(z), f'(z), \ldots, f^{(p)}(z))$, где $p\leqslant n$, обладающие следующим свойством: если для некоторой аналитической в круге $|z|<1$ функции $f(z)$ выражение $F(z)$ является C-функцией в $|z|<1$, то $f(z)$ однолистна в этом же круге. В выражение $F(z)$ могут входить также и некоторые параметры.

Кроме теорем указанного типа, обобщаются еще две теоремы (Рахманов Б. Н., Докл. АН СССР, 1951, 78, № 2, 209—211).

Примечание референта. Считая, что до недавнего времени классы U^* и U^0 были известны как единственные классы однолистных аналитических в круге $|z|<1$ функций, так или иначе связанные с C-функциями, автор доказывает, как новые результаты, что $U_{(\gamma)}$ и $\widetilde{U}_{(\gamma)}$ являются классами однолистных функций. Между тем однолистность функций класса $U_{(\gamma)}$ была доказана, например, Носиро (Noshiro K., J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Univ., 1934, ser. 1, 2, № 3, 129—155), а класса $\widetilde{U}_{(\gamma)}$ — Шпачеком (Špaček Lad., Časop. pestov. mat. a fys., 1932, 62, № 2, 12—18), указавшим и геометрическую характеристику функций этого класса.

Неясно, почему автор считает класс $U_{(\gamma)}$ «существенным продолжением» класса U^*, показывая, что, например, класс $U_{(0)}$ содержит функции, не принадлежащие классу U^*, но не содержит некоторых функций из U^*. Ю. Е. Аленицын

351. Критическая оценка целесообразности обычных способов конформного отображения. Р о з е н т а л (Critical appraisal of the validity of standard techniques of conformal mapping. R o s e n t h a l J e n n y E.), J. Wash. Acad. Sci., 1954, 44, № 9, 276—280 (англ.)

Известно, что задача об определении потенциала V электрического поля плоского конденсатора, состоящего из двух полубесконечных линий

$$\operatorname{Im} z=\pm 1,\quad -\infty<\operatorname{Re} z\leqslant 0 \qquad (1)$$

с потенциалами $V=\pm 1$, решается при помощи конформного отображения плоскости z с разрезами по полупрямым (1) на полосу $|\operatorname{Im} W|<1$, $W=U+iV$), что приводит к формуле:

$$z=W+\pi^{-1}(e^{\pi W}+1). \qquad (2)$$

Автор утверждает, что существует бесконечно много решений данной задачи, и устанавливает существование других функций вида $z=W+\sum_0^\infty C_n e^{n\pi W}$, $\operatorname{Im} C_n=0$, которые так же, как и функция (2), отображают линии $\operatorname{Im} W=\pm 1$ на полупрямые (1) и ось $\operatorname{Im} W=0$ на ось $\operatorname{Im} z=0$. Отметим, что (за исключением (2)) эти функции осуществляют отображение полосы $|\operatorname{Im} W|<1$ не на однолистную плоскость с разрезами (1), а на конечнолистную или бесконечнолистную риманову поверхность с разрезами (1) на одном из листов.

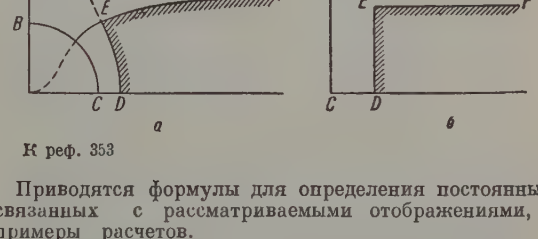
Далее в статье обсуждается тот факт, что для рассматриваемых решений при $\operatorname{Im} z\to\pm\infty$ потенциал V не стремится к нулю (не стремится к определенному пределу). По мнению автора, по этой причине данные решения нельзя рассматривать как имеющие физический смысл. П. П. Куфарев

352. К конформному отображению потоков, обтекающих решетки. Б е ц (Zur konformen Abbildung von Strömungsgittern. B e t z A l b e r t), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, 2, № 3, 333—336 (нем.)

Даются некоторые формулы для потоков, обтекающих решетки, составленные из дуг логарифмических спиралей.

353. Применение конформных отображений к исследованию магнитного поля между полюсами гальванометра. С н о у д о н, Д е й в и (An application of conformal transformation to the investigation of the magnetic field between galvanometer pole-pieces. S n o w d o n W., D a v y N.), Brit. J. Appl. Phys., 1954, 5, № 4, 146—151 (англ.)

Изучается магнитное поле в области, изображенной на фиг. а. Функция $\zeta=z-1/z$ преобразует эту область в многоугольную область фиг. б, а последняя отображается на полуполосу с помощью эллиптических функций Якоби.



К реф. 353

Приводятся формулы для определения постоянных, связанных с рассматриваемыми отображениями, и примеры расчетов.

354. Обобщение интегральной формулы Пуассона на многосвязные области. М е ш к о в с к и й (Verallgemeinerung der Poissonschen Integralformel auf mehrfach zusammenhängende Bereiche. M e s c h k o w s k i H e r b e r t), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1954, sar. A1, № 166, 1—12 (нем.).

Пусть $A(z, u)$ и $B(z, u)$ отображают многосвязную область $\mathfrak{B}$ с границей $\mathfrak{C}$, состоящей из конечного числа аналитических кривых $\{\mathfrak{C}_k\}$, на плоскость с разрезами, параллельными соответственно оси x и y (u переходит в ∞, вычет равен 1), а $E(z, u)$ отображает $\mathfrak{B}$ на круг с разрезами по концентрическим

круговым дугам (u переходит в 0, $E'(u,u)=1$, $\mathfrak{C}_1$ переходит в окружность). Тогда обобщение формулы Шварца для круга дает формула

$$f(u)-f(u_0)=-\frac{1}{\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\operatorname{Re} f(z)\left[N_0'(z,u)-N_0'(z,u_0)\right]dz,$$

где $N_0'=\int^u N'(z,\xi)\,d\xi$, $N(z,u)=(A+B)^2, N'=dN'dz$, а обобщение формулы Пуассона (менее общее, чем представление с помощью гармонической меры) — формула

$$\operatorname{Re} f(u)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathfrak{C}}\operatorname{Re} f(z)\frac{E'}{E}\,dz=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}}\operatorname{Re} f(z)\,d\arg E(z,u).$$

Для $f(z)$ с нулями $\{n_\mu\}$ и полюсами $\{p_\lambda\}$ в $\mathfrak{B}$ получается следующее обобщение формулы Иенсена:

$$\ln|f(u)|=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{C}}\ln|f(z)|\,d\arg E(z,u)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{\mu}\ln\times|\varepsilon(u,n_\mu)|-\frac{1}{2\pi}\sum_{\lambda}\ln|\varepsilon(u,p_\lambda)|,$$

где $\varepsilon(z,u)=\alpha E$ (α — такая постоянная, что $|\varepsilon|=1$ на $\mathfrak{C}_1$). Л. И. Волковыский

355. **Относительно моей заметки «О теоремах существования теории потенциала и теории конформных отображений». Фикера** (A proposito delle mie note «Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme». Fichera Gaetano), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, ser. 3, № 2, 109—114 (итал.)

Высказываются соображения в связи с рефератом Нехари (Math. Revs, 1952, 13, № 10, 931) на статью, указанную в заглавии. Они относятся к взаимоотношению методов доказательств существования, развитых автором, Пиконе и другими представителями итальянской школы, с одной стороны, и методов, развитых Бергманом, Гарабедяном, Шиффером и другими представителями американской школы, с другой. Отмечается приоритет итальянской школы в рассматриваемых вопросах и делается несколько замечаний о преимуществах первых методов, основанных на широком применении современной теории функций действительного переменного, перед вторыми, более формальными. Б. В. Шабат

356. **Исследование специальных функций теории потенциала с помощью конформного отображения. Штальман** (Untersuchung spezieller Funktionen der Potentialtheorie mit Hilfe der konformen Abbildung. Stallmann Friedemann), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 302—303 (нем.)

Краткое сообщение о геометрической интерпретации с помощью конформного отображения полуплоскости на круговые многоугольники решений дифференциальных уравнений, возникающих при решении уравнений $\Delta u=0$ и $\Delta u+k^2u=0$ методом разделения переменных. И. Е. Базилевич

357. **Об интегрировании уравнения Пуассона в круге. Мюрберг** (Über die Integration der Poissonschen Gleichung in einem Kreis. Myrberg Lauri), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1954, sar. A1, № 167, 1—20 (нем.)

Развивая прежние исследования (РЖМат, 1955, 5760) для случая круга $|z|<R\leqslant\infty$, автор доказывает следующую теорему.

Пусть $\rho(z)$ — действительная функция, непрерывная вместе со своими первыми частными производными для $z\neq\infty$, и пусть $m(r)=\int\int_{|z|<r}|\rho(z)|\,dxdy$. Тогда, если для некоторого натурального числа n интеграл $\int_a^\infty r^{-(n+2)}\,m(r)\,dr$ сходится, то функция

$$u_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\ln\left|\frac{\zeta-z}{\zeta}\right|\rho(te^{i\psi})\,tdtd\psi+$$

$$+\int_1^\infty\int_0^{2\pi}\left[\ln\left|\frac{\zeta-z}{\zeta}\right|+\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos k\theta}{k}\left(\frac{r}{t}\right)^k\right]\rho(te^{i\psi})\,tdtd\psi \tag{1}$$

$$(z=re^{i\varphi},\ \zeta=te^{i\psi},\ \theta=\varphi-\psi)$$

представляет решение уравнения $\Delta u=\rho(z)$ для $z\neq\infty$. Если же не налагать указанного ограничения на $\rho(z)$, то формула для решения получается из формулы (1) заменой 2-го слагаемого на

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\int_0^{2\pi}\left[\ln\left|\frac{\zeta-z}{\zeta}\right|+\sum_{k=1}^{p_n}\frac{\cos k\theta}{k}\left(\frac{r}{t}\right)^k\right]\times$$

$$\times\,\rho(te^{i\psi})\,tdtd\psi,$$

где p_n — достаточно большие числа, например, такие, что

$$[m(n+1)-m(n)]\,2^{p_n}\leqslant q_n,\qquad\sum_1^\infty q_n<\infty.$$

Аналогичная теорема доказывается для круга $|z|<1$. Л. И. Волковыский

358. **Задача Римана с эрмитовой матрицей. Мусхелишвили Ю. Л.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 243—248

Пусть $A(t)$ — неособенная матрица-функция n-го порядка, заданная на окружности $|t|=1$ и удовлетворяющая условию Гёльдера.

Рассматриваются две задачи Римана для нескольких неизвестных функций

$$\varphi^+(t)=A\ (t)\,\varphi^-(t), \tag{1}$$

$$\psi^+(t)=A^*(t)\,\psi^-(t), \tag{2}$$

где $A^*=\overline{A}'$. Доказывается следующая теорема:

Если $X(z)$ — каноническая матрица задачи (1), а $\varkappa_1\geqslant\varkappa_2\geqslant\ldots\geqslant\varkappa_n$ — ее частные индексы, то матрица $Y(z)=X^{*-1}(z^{-1})\,\Lambda(z)$, где $\Lambda(z)=\|\lambda_{ij}\|_1^n$, $\lambda_{ij}=\delta_{ij}\,z^{\varkappa_i}$, будет канонической матрицей задачи (2), а числа $-\varkappa_1, -\varkappa_2,\ldots,-\varkappa_n$ — частными индексами этой задачи.

Далее рассматривается случай, когда $A(t)$ — эрмитова матрица при любом t, и выводятся оценки для числа нулевых, положительных и отрицательных индексов задачи (1).

Пусть $A(t)$ — эрмитова невырожденная матрица n-го порядка. Если квадратичная форма с матрицей A имеет в канонической форме p положительных и q отрицательных квадратов ($p+q=n$), то говорят, что A имеет тип (p,q). В работе рассматривается следующая задача (задача D): Найти голоморфную при $|z|<1$ и непрерывную при $|z|\leqslant1$ матрицу-функцию $F(z)$ с $\det F(z)\neq0$ при $|z|\leqslant1$ и удовлетворяющую условию

$$F(t)\,JF^*(t)=A(t),\quad|t|=1,\quad\text{где}\quad J=J_{p,q}=\left\|\begin{matrix}I_p & 0\\ 0 & -I_q\end{matrix}\right\|.$$

Совпадение типов J и $A(t)$ является необходимым условием разрешимости задачи. Доказывается теорема: Для того чтобы задача D имела решение, необходимо и достаточно, чтобы все частные индексы задачи Римана с матрицей $A(t)$ равнялись нулю. В случае выполнения указанного условия решение задачи определяется с точностью до произвольного постоянного правого J-унитарного множителя. Н. П. Векуа

359. **Функции с положительной действительной частью и полиномы Гурвица в теории линейных цепей переменного тока и систем регулирования. Эфферц** (Funktionen mit positivem Realteil und Hurwitz—Polynome in der Theorie der linearen Wechselstrom-

schaltungen und Regelungssysteme. Effertz Heinz-Friedrich), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 336 (нем.)

Устанавливается связь между полиномами Гурвица и некоторыми классами рациональных функций, имеющих в правой полуплоскости положительную действительную часть; таким образом обобщается теорема Кауэра из теории цепей.

Выделяется область изменения коэффициентов указанных функций, причем в качестве параметра рассматриваются функции Рауса. Это позволяет выразить в функции от начальных значений и от функций Рауса интеграл, который использовался ранее Бюкнером, Хазебруком и Ван-дер-Варденом для обоснования некоторых оценок качества процесса в линейных системах автоматического регулирования. А. М. Айзерман

360. **Соотношение симметрии для S-матрицы в комплексной плоскости.** Ван-Кампен (The symmetry relation of the S matrix in the complex plane. Van Kampen N. G.), Physica, 1954, 20, № 2, 115—123 (англ.)

Рассматривается задача о сферическом рассеянии нерелятивистской частицы фиксированным рассеивающим центром, имеющим форму шара. В предыдущей статье автора (РЖМат, 1955, 3302) было показано, что при соблюдении «условия причинности» соответствующая S-матрица $S(p)$ есть мероморфная функция от p в правой p-полуплоскости.

В реферируемой статье к этому условию добавляется условие ограниченности снизу полной энергии и доказывается, что в этом случае $S(p)$ аналитически продолжаема в левую полуплоскость, причем на вещественной оси удовлетворяется условие симметрии $S(-p)=S(p)^*$. М. А. Наймарк

361. **Некоторые проблемы минимума в теории функций.** Шолз (Some minimum problems in the theory of functions. Scholz D. R.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 2, 275—299 (англ.)

Исследуется экстремальная проблема:

$$J_D(f)=\int\int_D|f'(z)|^2\,dxdy=\min \tag{1}$$

при условиях:

$$\int\int_D\sigma(z)\,|f(z)|^2\,dxdy=1, \tag{2}$$

$$f(a)=0\ (a\in D) \tag{3}$$

или же при условии (2) и

$$\int\int_D\sigma(z)f(z)\,dxdy=0. \tag{3'}$$

Класс функций, удовлетворяющих условиям (2) и (3), обозначим $L^2(a,D)$, а условиям (2) и (3') — $L^2(D)$.

Автор исследует в основном проблему для $L^2(a,D)$, указывая, что для $L^2(D)$ исследование аналогично. Пусть $\lambda_1=\min J_D(f)$, $f\in L^2(a,D)$ и $f_1(z)$ — экстремальная функция. Положим $\lambda_2=\min J_D(f)$, $f\in L^2(a,D)$ и $\int\int_D\sigma f\bar{f}_1\,dxdy=0$. Пусть $f_2(z)$ — новая экстремальная функция. Положим $\lambda_3=\min J_D(f)$, $f\in L^2(a,D)$ и $\int\int_D\sigma f\bar{f}_i\,dxdy=0$, $i=1,2$ и т. д. Доказывается, что функции $f_1(z)$, $f_2(z)$,... образуют полную ортонормальную систему, причем их производные образуют ортогональную систему, полную в классе функций с однозначными первообразными. Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$,... и числа λ_1, λ_2,... оказываются соответственно собственными функциями и собственными значениями для интегрального уравнения

$$f(w)=\lambda\int\int_D\sigma(z)\,\overline{K(z,w,a)}\,f(z)\,dxdy, \tag{4}$$

где эрмитово ядро $K(z,w,a)$ является экстремальной функцией для задачи: $\min J_D(g)$, $g\in L^2(a,D)$, $g(w)=1$. Это ядро просто выражается через ядро Бергмана. Далее рассматриваются неоднородное уравнение, соответствующее уравнению (4), и его резольвента. Устанавливается также следующее неравенство: $\mu_{n-1}\leqslant\lambda_n\leqslant\mu_n$, где $\mu_1,\ldots,\mu_n,\ldots$ — собственные значения проблемы (1) в классе $L^2(D)$, а $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\ldots$ — в классе $L^2(a,D)$ (при любом $a\in D$). Изучаются некоторые соотношения, которым удовлетворяют на границе D экстремальные функции. Указываются формулы для вариаций собственных функций и собственных значений при вариации области D. С. Я. Хавинсон

362. **Заметка о рядах Дирихле. VI. О целых функциях, определенных рядами Дирихле. II.** Танака (Note on Dirichlet series. VI. On the integral functions defined by Dirichlet series. II. Tanaka Chuji), Mem. Fac. Sci and Engng Waseda Univ., 1953, 17, 85—94 (англ.)

Продолжение заметки V о рядах Дирихле (РЖМат, 1955, 2169. *Ред.*)

Предполагается, что ряд Дирихле $\Sigma_1^\infty a_n e^{-\lambda_n s}\equiv F(s)$ равномерно сходится к целой функции, и рассматривается вопрос о ее порядке ρ и типе λ. Необходимо заметить, что терминология автора отличается от общепринятой; так, в выражении $\exp[\lambda e^{-\rho s}]$ он называет ρ порядком и λ типом. Автор определяет

$$\rho=\overline{\lim}_{\sigma\to-\infty}(-\sigma)^{-1}\ln\ln^+M(\sigma),$$

$$M(\sigma)=\sup_t|F(\sigma+it)|,\ \lambda=\overline{\lim}_{\sigma\to-\infty}e^{\rho\sigma}\ln^+M(\sigma)$$

и доказывает, что

$$-\rho^{-1}=\overline{\lim}_{\omega\to\infty}(\omega\ln\omega)^{-1}\ln T_\omega^k,$$

$$\rho^{-1}\ln(e\rho\lambda)=\overline{\lim}_{\omega\to\infty}(\omega^{-1}\ln T_\omega^k+\rho^{-1}\ln\omega),$$

где k, $0<k<1$, фиксировано, но произвольно и

$$T_\omega^k=\sup_t\Big|\sum_{\lambda_n<\omega}a_n(\omega-\lambda_n)^k\exp(\lambda_n^2/-\omega^2-i\lambda_n t)\Big|.$$

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 612. E. Hille

363. **Асимптотическое значение функции Бореля.** Лотоцкий А. В., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 71—72

Доказывается теорема:

Пусть $f(z)=\Sigma_0^\infty a_n z^n$ — целая функция. Если функция $\varphi(z)=\Sigma_0^\infty a_n z^n/n!$ имеет конечный предел s при $z\to\infty$ вдоль какого-нибудь луча, выходящего из точки $z=0$, то вдоль этого луча и $f(z)$ стремится к тому же пределу s. Н. А. Давыдов

364. **Спиральные и другие асимптотические пути и пути полной неопределенности аналитических и мероморфных функций.** Багемил, Зейдель (Spiral and other asymptotic paths, and paths of complete indetermination, of analytic and meromorphic functions. Bagemihl F., Seidel W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, 39, № 12, 1251—1258 (англ.)

Пусть граница области G, не содержащей ∞, состоит из $\nu\geqslant1$ непересекающихся окружностей $K_1,\ldots,K_\nu$, которые могут вырождаться в точки. Кривая $z=z(t)\in G$, $0\leqslant t<1$, которая стремится к некоторой

K_j, называется b-путем; если при этом расстояние между $z(t)$ и K_j при $t \to 1$ убывает монотонно, то b-путь называется монотонным b-путем. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция в G. Если существует $w = \lim_{t \to 1} f[z(t)]$, то b-путь называется асимптотическим путем, а w — асимптотическим значением $f(z)$ по этому пути. Если предельные точки $f[z(t)]$ при $t \to 1$ заполняют всю комплексную плоскость, то b-путь называется путем полной неопределенности. Основной результат статьи:

Теорема 1. Пусть $\nu = \lambda + \mu$, $\{S_n\}$ — произвольное счетное множество монотонных b-путей, сходящихся к $K_1, \ldots, K_\lambda$; $\{w_n\}$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Тогда существует функция $f(z)$, мероморфная в G, такая, что на пути S_n $f(z) \to w_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, если $(\lambda > 0)$ и каждый b-путь, ведущий к $K_{\lambda+1}, \ldots, K_{\lambda+\mu}$ является путем полной неопределенности (если $\mu > 0$). Если $\lambda = \nu = 1$ или $\mu = 0$ и ни одна из окружностей K_j $(j = 1, \ldots, \nu)$ не вырождается в точку, то существует регулярная в G функция $f(z)$ с указанными свойствами.

Доказательство основано на использовании результатов теории приближения функций комплексного переменного многочленами и рациональными функциями.

Для остальных теорем, доказанных в статье, типичной является

Теорема 2. Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$ и A — дуга: $|z| = 1$, $\lambda < \arg z < \mu$, $0 < \mu - \lambda \leqslant 2\pi$. Для любой пары чисел α и β, $\lambda < \alpha < \beta < \mu$, обозначим через $S_{\alpha\beta}$ сектор $\alpha < \arg z < \beta$, $0 < |z| < 1$. Пусть z_n — нули $f(z)$ и $\sum_{z_n \in S_{\alpha\beta}} (1 - |z_n|) = \infty$ для каждого $S_{\alpha\beta}$. Тогда существует подмножество второй категории на A такое, что каждый радиус, ведущий к точке этого подмножества, является путем полной неопределенности $f(z)$.

А. А. Гольдберг

365. О распределении значений мероморфных функций ограниченной характеристики. Лехто (On the distribution of values of meromorphic functions of bounded characteristic. Lehto Olli), Acta math., 1954, 91, № 1—2, 87—112 (англ.)

Доказывается, что если $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция с ограниченной характеристикой, граничные значения которой $f(e^{i\varphi})$ для почти всех φ принадлежат замкнутому множеству Γ с непустым связным дополнением (причем $f(0) \notin \Gamma$) то имеет место оценка $N(1, a) \geqslant g(a, f(0), C(\Gamma))$ для всех $a \in C(\Gamma)$, за исключением, быть может, множества емкости нуль (Такое исключительное множество может существовать).

Здесь, как обычно, $N(r, a) = N(r, (f-a)^{-1}) = \int_0^r n(r, a)\, dr$, где $n(r, a)$ — число a-точек $f(z)$ в круге радиуса $r \leqslant 1$; $g(a, f(0), C(\Gamma))$ — функция Грина для дополнения $C(\Gamma)$ к Γ с полюсом в точке $f(0)$, вычисленная в точке a.

Устанавливается еще ряд соотношений, связанных с приведенным. Доказывается также теорема: Если в условиях предыдущей теоремы не требовать, чтобы $f(0) \in C(\Gamma)$, то имеет место альтернатива: либо $f(z)$ не принимает значений, принадлежащих $C(\Gamma)$, либо $f(z)$ принимает каждое значение из $C(\Gamma)$, за исключением, быть может, значений, образующих множество меры нуль. Такое исключительное множество может на самом деле существовать. Приводится ряд следствий из этой теоремы. Доказывается еще такая теорема: Пусть $f(z)$ мероморфна в $|z| < 1$ и значения ее лежат в области G с границей Γ, имеющей положительную емкость.

Пусть граничные значения $f(e^{i\varphi}) \in \Gamma$ для почти всех φ. Введем функцию

$$\Phi((f-a^{-1}) = (2\pi)^{-1} \lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} g(f(re^{i\varphi}), a, G)\, d\varphi$$

(ср. РЖМат, 1955, 181). Тогда $N(1, (f-a)^{-1}) + \Phi((f-a)^{-1}) = g(a, f(0), G)$. Здесь главным членом является $N(1, (f-a)^{-1})$, так как $\Phi((f-a)^{-1}) = 0$, за исключением множества точек $\{a\}$ емкости нуль. Из следствий этой теоремы отметим такой результат: Пусть $f(z)$ аналитична в единичном круге и $|f(z)| \leqslant 1$, $f(0) = 0$ и пусть $z_1, z_2, \ldots$ — все a-точки $f(z)$ (для данного $a \neq 0$). Тогда $|a| \leqslant \Pi_\nu |z_\nu|$, $|z_\nu| < 1$.

Равенство возможно только, если $|f(e^{i\varphi})| = 1$ почти всюду. Если $|f(e^{i\varphi})| = 1$ почти всюду, то равенство $|a| = \Pi_\nu |z_\nu|$ верно для всех a, кроме, быть может, множества емкости нуль.

С. Я. Хавинсон

366. Обобщения фундаментальной теоремы Неванлинна — Мию. Сюн Цзин-лай (Généralisations du théorème fondamental de Nevanlinna — Milloux. Hiong King-Lai), Bull. sci. math., 1954, 78, septembre-octobre, 181—198 (франц.)

Пусть $f(z)$ — функция, мероморфная при $z \neq \infty$. Неравенство Неванлинна

$$T(r, f) < \sum_1^3 N\left(r, \frac{1}{f - a_\nu}\right) + S(r),$$

где $S(r) = O(\ln T(r, f))$, за исключением, быть может, множества интервалов с конечной длиной (можно считать $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = \infty$), дает оценку сверху для $T(r, f)$ через сумму трех функций N. Мию (Milloux H., Les fonctions méromorphes et leurs dérivées. Extensions d'un théorème de R. Nevanlinna. Applications, Paris, 1940) дал оценку, учитывающую распределение значений как f, так и f':

$$T(r, f) < 2N(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f' - 1}\right) + S(r).$$

Автор показывает, что здесь множитель 2 можно заменить на 1, так что и в этом случае T мажорируется суммой трех функций N.

Этот результат автор обобщает в различных направлениях, давая обобщения и уточнения соответствующих неравенств Мию (см. ссылку). Следующая теорема является типичной.

Теорема. Пусть $f(z)$ — мероморфна при $z \neq \infty$; $\alpha_i(z)$ $(i = 0, 1, \ldots, l)$ — целые функции, не имеющие нулей, такие, что $T(r, \alpha_i) = o(T(r, f^{(l)}))$, или же постоянные; $f_l(z) = \sum_0^l \alpha_i(z) f^{(i)}(z)$; $\psi(z)$ $(\not\equiv 0, \infty)$ мероморфна при $z \neq \infty$, $T(r, \psi) = o(T(r, f_l))$. Тогда

$$[1 - o(1)]\, T(r, f) < lN(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f_l - \psi}\right) - (l-1)\overline{N}(r, f) + S(r).$$

А. А. Гольдберг

367. К одной задаче Н. Н. Лузина. Куфарёв П. П., Семухина Н. В., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 183—185

Строится пример голоморфной ограниченной в $|z| < 1$ функции, обладающей (по крайней мере) счетным всюду плотным на окружности $\Gamma: |z| = 1$ множеством точек таких, что всякий круг κ, касающийся в такой точке Γ изнутри, отображается этой функцией на область бесконечной площади.

Подобные примеры были построены и ранее (Голубев В. В., Уч. зап. Саратовск. ун-та, 1926, 5, № 2, 106—107). Г. П. Боев

368. О линейных и угловых граничных множествах мероморфных в единичном круге функций. Коллингвуд (On the linear and angular cluster sets of functions meromorphic in the unit circle. Collingwood E. F.), Acta math., 1954, **91**, № 3—4, 165—185 (англ.)

Пусть $w = f(z)$ — функция, мероморфная в $|z| < 1$, $C_\rho(f, e^{i\vartheta})$ ($C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$) — множество w-точек таких, что на радиусе $\arg z = \theta$ (в угле Δ с вершиной в $e^{i\vartheta}$, образованном двумя хордами) существует последовательность $\{z_i\} \to e^{i\vartheta}$ такая, что $f(z_i) \to w$. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. Если существует множество $M(\theta)$ точек $z = e^{i\vartheta}$ второй категории на некоторой дуге α окружности $|z| = 1$ такое, что сумма $\bigcup C_\rho(f, e^{i\vartheta}).(e^{i\vartheta} \in M)$ отлична от всей плоскости, и если существуют число a и множество $N(\theta)$, приведенное (в смысле Лузина—Привалова) на α, такие, что $a \in \bigcap C_\rho(f, e^{i\vartheta}).(e^{i\vartheta} \in N)$, то $f(z) \equiv a$.

Эта теорема является обобщением теоремы Лузина—Привалова (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций. М.—Л., 1950, 319), которая получается отсюда, если положить $N(\theta) \equiv M(\theta)$ и $C_\rho(f, e^{i\vartheta}) = a$ при $e^{i\vartheta} \in M(\theta)$ (Автор ошибочно считает, что теорема Лузина—Привалова была известна только для регулярных в круге $|z| < 1$ функций. *Реф.*).

Точку $e^{i\vartheta}$ отнесем к множеству $S(f)$ ($I(f)$), если $C_\rho(f, e^{i\vartheta})$ ($C_\Delta(f, e^{i\vartheta})$ для каждого угла Δ с вершиной в $e^{i\vartheta}$ есть полная w-плоскость. Автор устанавливает различные соотношения между $S(f)$ и $I(f)$, например, имеет место теорема:

Теорема 5. Множества $S(f)$ и $I(f)$ разнятся на множество первой категории на $|z| = 1$.

Далее выводится ряд теорем о поведении мероморфной в $|z| < 1$ функции в окрестности точки $e^{i\vartheta} \in I(f)$ (точка А. И. Плеснера), а также о поведении мероморфной функции в окрестности изолированной особой точки.

В постскриптуме автор указывает, что большинство результатов его работы было получено другим методом в статьях Багемиля и Зейделя (РЖМат, 1955, 2645; 1956, 364), однако часть результатов, в частности теорема 5, в этих статьях не содержится. А. А. Гольдберг

369. Конформная жесткость некоторых подобластей на римановой поверхности. Ройден (The conformal rigidity of certain subdomains on a Riemann surface. Royden H. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 1, 14—25 (англ.)

Пусть V есть конечная риманова поверхность, т. е. поверхность либо компактная, либо ограниченная конечным числом контуров. Квадратичным дифференциалом на V называется выражение $d\zeta^2$, которое по отношению к локальной униформизующей z имеет вид $d\zeta^2 = h(z)\,dz^2$, где $h(z)$ — аналитическая функция, зависящая от униформизующей так, что $d\zeta^2$ уже не зависит от нее. Известен следующий результат: Если V_1 — подобласть V, обладающая тем свойством, что не существует отображения V_1 в V, произвольно близкого к тождественному отображению V_1 в V, то V_1 является подобластью плотной на V, и относительная граница V_1 по отношению к V состоит из разрезов, вдоль которых некоторый квадратичный дифференциал на V неотрицателен.

Основной результат реферируемой статьи состоит в установлении обратного утверждения, а именно:

Пусть $d\zeta^2$ есть квадратичный дифференциал на конечной римановой поверхности V и пусть V_1 является плотной на V подобластью, содержащей внутри себя все полюсы $d\zeta^2$ и ограниченной конечным числом дуг, вдоль которых $d\zeta^2$ неотрицателен. Тогда тождественное отображение является единственным конформным отображением f V_1 в V, обладающим всеми нижеперечисленными свойствами: 1) имеется внутренняя точка V_1, являющаяся неподвижной точкой f; 2) полюсы $d\zeta^2$, лежащие в V_1, являются неподвижными точками f и в окрестности полюсов порядка $k \geqslant 2$ отображение имеет вид: $f(z) = z + az^k + \ldots$ в терминах униформизующей z в полюсе; 3) существует деформация V_1' внутри V', переводящая отображение f в тождественное отображение V_1' в V', причем штрихи обозначают поверхности с удаленными полюсами $d\zeta^2$. П. П. Белинский

370. Граничные элементы римановых поверхностей. Оцука (Boundary components of Riemann surfaces. Ohtsuka Makoto), Nagoya Math. J., 1954, **7**, June, 65—83 (англ.)

Пусть R — риманова поверхность связности $\geqslant 3$, R^∞ — ее универсальная поверхность наложения. $w = \varphi(z)$ — автоморфная функция с группой линейных преобразований G, отображающая $|z| < 1$ на R_∞. Пусть C_R — множество граничных элементов поверхности R, которое можно рассматривать как топологическое пространство (Stoïlow S., Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris, 1938).

В гл. 1 автор, продолжая свои предыдущие исследования (Nagoya Math. J., 1951, **3**, 91—137; РЖМат, 1954, 3682), изучает соответствие между различными классами граничных элементов R и классами эквивалентных относительно G точек $|z| = 1$. В частности, доказывается, что два пути C_1 и C_2 на R, стремящиеся к одному граничному элементу $P_C \in C_R$, определяют при отображении $R \to R^\infty \to \{|z| < 1\}$ эквивалентные относительно G классы точек на $|z| = 1$ тогда и только тогда, когда C_1 и C_2 гомотопны на R. Для случая плоской области R этот результат был получен Неванлинна и Кайла (Kaila E., Suomalais. tiedeakat. toimituks., A55, 1940, № 9).

В гл. 2 рассматривается задача Дирихле. Пусть $\varphi(P_C)$, $P_C \in C_R$ — действительная функция, $\overline{H}_\varphi(P) = \sup u(P)$, $\underline{H}_\varphi(P_C) = \inf u(P)$, где sup и inf берутся соответственно по всем субгармоническим и супергармоническим функциям $u(P)$ на R таким, что при $P \to P_C$ $\overline{\lim}\, u(P) \leqslant \varphi(P_C)$, $\underline{\lim}\, u(P) \geqslant \varphi(P_C)$. Функция $\varphi(P_C)$ называется разрешимой граничной функцией, если $-\infty < \overline{H}_\varphi(P) \equiv \underline{H}_\varphi(P) < +\infty$. Автор дает необходимое и достаточное условие для того, чтобы $\varphi(P_C)$ была разрешимой функцией. В частности, разрешимы характеристические функции открытых и замкнутых подмножеств C_R. А. А. Гольдберг

371. О роде алгебраической кривой. Галбурэ, (Asupra genului unei curbe algebrice. Galbură G.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 3—4, 105—107 (рум.; резюме русс., франц.)

Основываясь на данном Морсом соотношении между числами S и s седловых точек внутри области и на границе, числом μ точек относительного минимума псевдогармонической функции без логарифмических полюсов и числом ν граничных кривых: $2 - \nu = \mu - S - s$ (Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, М., 1951, 50), автор приводит новое доказательство формулы Римана $p = 2^{-1}\sum_k(\alpha_k - 1) - m + 1$, где p — род, α_k — поряд-

ки точек разветвления и m — степень алгебраической функции. Б. В. Шабат

372. Метрическая теорема об особом множестве линейной группы типа Шоттки. Цудзи (A metrical theorem on the singular set of a linear group of Schottky type. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 2, 115—121 (англ.)

Рассматривается фундаментальная область D_0, ограниченная $p(\geqslant 2)$ парами эквивалентных несмежных аналитических жордановых кривых C_i и C_i'. Пусть E — предельное (совершенное нигде не плотное) множество группы, порождаемой D_0, а E_1 — подмножество E, содержащееся в C_1, каждая точка которого содержится в бесконечно многих кривых, эквивалентных C_1. Тогда имеет место теорема: cap $E_1 > 0$ и E_1 отображается на множество положительной меры на $|w| = 1$, где cap E — логарифмическая емкость E, а $|w| < 1$ конформно отображается на внешность E. При доказательстве используются результаты Мюрберга (Myrberg P. J., Ann. Acad. scient. Fennicae, 1941, ser. A, № 10) и автора (РЖМат, 1955, 2637). Г. П. Боев

373. О распространении теорем Коши на функции многих комплексных переменных. Мартинелли (Sur l'extension des théorèmes de Cauchy aux fonctions de plusieurs variables complexes. Martinelli E.), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et Cie, 1953, 109—124 (франц.)

Дается краткий обзор результатов автора, полученных в 1937—1953 гг. относительно распространения двух основных теорем Коши, выражаемых формулами:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = 0, \qquad (1)$$

$$2\pi i N f(\zeta) = \int_{\Gamma_1} (z-\zeta)^{-1} f(z)\,dz, \qquad (2)$$

на кратные интегралы от аналитических функций r комплексных переменных. В своих работах автор руководствовался двумя идеями: 1) рассматривать самые общие поверхности интеграции, т. е. подчиненные только топологическим условиям; 2) рассматривать в качестве поверхностей интеграции поверхности $r+l$, $0 \leqslant l \leqslant r-1$ измерений. В этих направлениях им получены следующие результаты.

1-я теорема допускает r различных обобщений, согласно которым рассматриваются интегралы по циклам Γ_{r+l} $0 \leqslant l \leqslant r-1$, $r+l$ измерений в пространстве r комплексных переменных, причем цикл Γ_{r+l} гомологичен нулю в области регулярности функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_r)$.

Каждое из этих обобщений обратимо, что дает обобщения теоремы Морера для функций многих переменных.

2-я теорема допускает также r различных обобщений, аналогичных предыдущим. Только в соответствующих общих формулах циклы интеграции Γ_{r+l} $(0 \leqslant l \leqslant r-1)$ подчинены некоторым топологическим условиям, определяющим целые числа, входящие в эти формулы (при $r=1$ число N в формуле (2)). Заметим, что появление этих чисел обусловливается наличием в подинтегральных выражениях полюсных многообразий $2r-2l-2$ измерений.

Автор упоминает о работах Бохнера и Аруффо (РЖМат, 1953, 704, 1171), обобщающих его результат (относительно 1-й теоремы Коши) на функции $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, аналитические относительно l переменных и антианалитические относительно остальных $r-l$ переменных. А. А. Темляков

374. Обобщение теоремы Рунге для многозначных функций комплексных переменных. Бенке (Généralisation du théorème de Runge pour des fonctions multiformes de variables complexes. Behnke H.), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et Cie, 1953, 81—96 (франц.)

Дается обзор результатов, являющихся распространением теоремы Рунге об аппроксимации функций одного комплексного переменного на многозначные функции, однозначные функции n комплексных переменных и голоморфные функции на аналитических комплексных многообразиях в пространстве n комплексных переменных.

Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$ — области на некоторой открытой поверхности Римана, причем $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}'$. Чтобы всякую функцию $f(z)$ голоморфную в $\mathfrak{G}$, можно было равномерно аппроксимировать в $\mathfrak{G}$ функциями, голоморфными в $\mathfrak{G}'$, необходимо и достаточно, чтобы область $\mathfrak{G}$ можно было полунепрерывно распространить на $\mathfrak{G}'$ (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1948, 120, 430—461).

Доказательство основано на применении формулы, аналогичной интегралу Коши:

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{C(\mathfrak{G})} f(\xi, z)\, A(\xi, z)\, d\xi,$$

где $C(\mathfrak{G})$ — граница области $\mathfrak{G}$, $A(\xi, z)$ — мероморфная однозначная функция в полицилиндре $\mathfrak{G}_\xi' \times \mathfrak{G}_z'$ и $\mathfrak{G}'$ находится внутри открытой римановой поверхности. Чтобы функция нескольких комплексных переменных, голоморфная в конечной области, имеющей почти конечное число листов (Stein K., Ann. mat. pura ed appl., 1949, 28, 322), могла быть равномерно внутри $\mathfrak{G}$ аппроксимирована функциями полного семейства $\mathfrak{F}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ была слабо выпукла относительно $\mathfrak{F}$.

Доказательство теоремы основано на теореме Вейля—Ока об аппроксимации и на том факте, что всякая слабо $\mathfrak{F}$-выпуклая область может быть исчерпана аналитическими многогранниками (многогранниками Вейля), определяющие функции которых принадлежат, в частности, полному семейству функций $\mathfrak{F}$.

Для конечных областей $\mathfrak{G}$ без точек ветвления в пространстве C^n вводится понятие о регулярном распространении областей, аналогичное понятию полунепрерывного распространения областей в плоскости комплексного переменного z.

Если область голоморфности $\mathfrak{G}$ может быть регулярно распространена на область голоморфности $\mathfrak{G}'$, то все функции, голоморфные в $\mathfrak{G}$, могут быть равномерно аппроксимированы внутри $\mathfrak{G}$ функциями, голоморфными в $\mathfrak{G}'$. Всякое аналитическое комплексное многообразие $\mathfrak{M}^{2n}$ можно погрузить без особенностей в евклидово пространство R^{4n+1} (Whitney H., Ann. Math., 1936, 37, 645—680). Метрика пространства R^{4n+1} переносится на $\mathfrak{M}^{2n}$ и позволяет ввести понятие регулярного распространения аналитических комплексных многообразий.

Для аналога многогранника Вейля на $\mathfrak{M}^{2n}$ имеет место обобщенная теорема об аппроксимации Ока—Вейля (Stein K., Math. Ann., 1950, 123, 201—222), которая существенно используется для доказательства более общих теорем.

Пусть $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}'$—слабо регулярно-выпуклые области на аналитическом комплексном многообразии $\mathfrak{M}^{2n}$, $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}'$.

Для того чтобы всякую регулярную в $\mathfrak{G}$ функцию можно было равномерно аппроксимировать внутри $\mathfrak{G}$ функциями, регулярными в $\mathfrak{G}'$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{G}$ была регулярно распространяема на $\mathfrak{G}'$.

Регулярная распространяемость $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}'$ является необходимым и достаточным условием для слабой

выпуклости $\mathfrak{G}$ относительно функций из $\mathfrak{G}'$ (РЖМат, 1954, 4798). Е. Н. Аравийская

375. Итерация аналитических преобразований в единичном бицикле. Эрве (Itération des transformations analytiques dans le bicercle-unité. Hervé Michel), Ann. scient. École norm. supér., 1954, **71**, № 1, 1—28 (франц.)

Детально исследуются интерации преобразования

$$x_1 = f(x, y), \quad y_1 = g(x, y) \qquad (t)$$

в бицикле $|x| < 1$, $|y| < 1$, где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — голоморфные функции двух комплексных переменных x и y, по модулю меньше 1 (см. также РЖМат, 1954, 5116).

Если $x_1 = f(x, y)$ не есть тождественное преобразование при всяком y и $y_1 = g(x, y)$ не есть тождественное преобразование при всяком x, то возможны лишь три взаимно исключающих случая:

1. Существует точка $e^{i\alpha}$ такая, что для всякой точки (x, y) бицикла точка $x_1 = f(x, y)$ принадлежит кругу, окружность которого проходит через x и касается окружности $|x| = 1$ в точке $e^{i\alpha}$. Существует голоморфная функция $\eta(x)$, $|\eta(x)| < 1$, такая, что соотношения $g(x, y) = y$ и $y = \eta(x)$ эквивалентны для точек бицикла. В этом случае все предельные преобразования τ имеют вид:

$$x_1 = e^{i\alpha}, \quad y_1 = \psi(x, y), \quad |\psi(x, y)| \leqslant 1; \qquad (1)$$

функция $\psi(x, y)$, вообще, не единственна.

2. Существуют две точки $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ такие, что для всякой точки (x, y) бицикла точка $x_1 = f(x, y)$ принадлежит кругу, описанному в случае 1, а точка $y_1 = g(x, y)$ принадлежит кругу, окружность которого проходит через y и касается окружности $|y| = 1$ в точке $e^{i\beta}$. В этом случае все преобразования τ либо вида (1), либо вида $x_1 = \varphi(x, y)$, $y_1 = e^{i\beta}$, $|\varphi(x, y)| \leqslant 1$. Функции φ и ψ вообще не единственны.

3. Существуют голоморфные функции $\xi(y)$ и $\eta(x)$, $|\xi(y)| < 1$, $|\eta(x)| < 1$, такие, что соотношения $f(x, y) = x$ и $x = \xi(y)$, $g(x, y) = y$ и $y = \eta(x)$ эквивалентны для точек бицикла. В этом случае существуют две точки $e^{i\alpha}$, $e^{i\beta}$ такие, что последовательность всех интераций $\{t_n\}$ сходится к преобразованию $x_1 = e^{i\alpha}$, $y_1 = e^{i\beta}$.

С. П. Пулькин

376. Свойства минимальных областей. Машлер (Properties of minimal domains. Maschler Michael), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 139—140 (англ.)

Рассматриваются минимальные области D относительно нормированных псевдоконформных отображений

$$w_k(0, 0) = 0 \ (k = 1, 2), \quad \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|_{0,0} = 1,$$

т. е. области, которые при отображениях указанного вида не могут перейти в области, имеющие меньший объем (Bergman S., Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudoconformes, Paris, 1948). Известны достаточные условия однолистности минимальной области (Schiffer M., C. r. Acad. sci., 1938, 207, 112). Указываются без доказательств характеристические свойства минимальных областей.

1. Область D будет минимальной тогда и только тогда, когда кернфункция этой области $K_D(z_1, z_2; 0, 0) = 1/V$, $(z_1, z_2) \in D$, V — объем области D. Отсюда следует:

2. Для того чтобы область D была минимальной, необходимо и достаточно, чтобы для всякой функции $f(z_1, z_2) \in L^2(D)$ $f(0, 0) = \frac{1}{V} \iiint\limits_V f(z_1, z_2)\, d\omega$, V—объем области D, $d\omega$ — элемент объема. (Подобные теоремы справедливы и для плоской минимальной области для случая одного комплексного переменного.)

3. Бицилиндрическая область $D = D_1 \times D_2$ будет минимальной областью тогда и только тогда, когда области D_k, $k = 1, 2$, будут минимальными в z_k-плоскостях.

Последняя теорема может быть обобщена на другие классы областей.

Остальные свойства минимальных областей могут быть получены из указанных характеристических свойств. Е. Н. Аравийская

377. О коэффициентах разложения по ортонормальной системе Бергмана. Мешковский (Die Koeffizienten des Bergmanschen Orthonormalsystems. Meschkowski Herbert), Math. Ann., 1954, 128, № 3, 200—203 (нем.)

Пусть D — n-связная однолистная, ограниченная аналитическими кривыми C_ν, область комплексного переменного z. Пусть Ω — класс функций, регулярных и однозначных в D вместе с их интегралами и имеющих конечный интеграл Дирихле. Bergman (Bergman S., The kernel function and conformal mapping, New York, 1950, 161) показал, что для этого класса функций существует полная ортонормальная система функций. Автором (РЖМат, 1955, 1182) было дано следующее представление функций такой системы:

$$\rho_n(z) = G_n(z) / (G_n, G_n)^{1/2} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $G_n(z) = \alpha_1^{(n)} M_1'(z, \bar{u}) + \cdots + \alpha_n^{(n)} M_n'(z, \bar{u})$, $M_n'(z, \bar{u}) = \partial^{n-1} M'(z, \bar{u}) / \partial u^{n-1}$, $M'(z, \bar{u}) = [A'(z, u) - B'(z, u)]/2$.

Полагая $\beta_\nu^{(n)} = \alpha_\nu^{(n)} / (G_n, G_n)^{1/2}$, получим: $\rho_n'(z) = \beta_n^{(n)} M_1'(z, \bar{u}) + \cdots + \beta_n^{(n)} M_1'(z, \bar{u})$.

При определенном выборе точки $u \in D$ числа $\beta_\nu^{(n)}$ являются характеристическими числами области D.

Используя полученное представление функций полной ортонормальной бергмановской системы, автор указывает простой способ вычисления коэффициентов Фурье функции $f(z) \in \Omega$, а именно,

$$c_n = \pi \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\beta_\nu^{(n)}} f^{(\nu-1)}(u).$$

Далее автор распространяет полученный результат на системы функций, указанные им в предыдущей работе. А. В. Лебедев

378. К теории функций многих комплексных переменных. I. Полная ортонормальная система в гиперболическом пространстве матриц. Хуа Ло-гэн (多個複變數函數論. 1. 矩陣的雙曲空間中的一完整正交函數系. 華羅庚), 數學學報(Шусюэ сюэбао), 1953, 2, № 4, 288—323 (кит.; резюме англ.)

Развернутое изложение результатов, опубликованных в другой заметке автора (РЖМат, 1954, 3685).

379. К теории функций многих комплексных переменных. II. Полная ортонормальная система в гиперболическом пространстве гиперсфер. Хуа Ло-гэн (多個複變數函數論. II. 超球雙曲空間中的一完整正交函數系. 華羅庚), 數學學報(Шусюэ сюэбао), 1955, 5, № 1, 1—25 (кит.; резюме англ.)

Развернутое изложение результатов, опубликованных в другой заметке автора (РЖМат, 1954, 3686)

380. Аналитические проекции комплексных многообразий. Штейн (Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten. Stein Karl), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et C-ie, 1953, 97—107 (нем.)

Пусть M^{2n} — n-мерное комплексное многообразие, а f — мероморфная функция на M^{2n}, не являющаяся константой. Каждой такой функции можно поставить в соответствие аналитическое отображение M^{2n} на одномерное комплексное многообразие (т. е. риманову поверхность). Эта риманова поверхность, обозначаемая $R^2(M^{2n}; f)$, и есть аналитическая проекция M^{2n}. Построение ее производится следующим образом.

Точки P_1, P_2, Q_1, Q_2 удовлетворяют соотношению $A(P_1, P_2, Q_1, Q_2)/(M^{2n}; f)$, если: 1) P_1 и Q_1 можно соединить непрерывной кривой $C_1(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, а P_2 и Q_2 — непрерывной кривой $C_2(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$; 2) все точки кривых $C_1(t)$ и $C_2(t)$, за исключением, быть может, точек Q_1 и Q_2, являются обыкновенными точками для f; 3) $f[C_1(t)] = f[C_2(t)]$ для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Разбиение точек M^{2n} на классы называется тонким, если из того, что между точками P_1, P_2, Q_1, Q_2 из M^{2n} имеется соотношение $A(P_1, P_2, Q_1, Q_2)/(M^{2n}; f)$ и точки P_1 и P_2 принадлежат одному классу, следует принадлежность Q_1 и Q_2 к одному классу. Рассмотрим минимальное тонкое разбиение на классы. В множестве K этих классов естественным образом вводятся топология и аналитическая структура. Естественное отображение M^{2n} на K обозначим через Φ. K и является $R^2(M^{2n}; f)$; $R^2(M^{2n}; f)$ обладает следующими свойствами. α) $R^2(M^{2n}; f)$ — риманова поверхность над w-плоскостью (плоскостью значений функции $w = W(z)$). Отображение Φ аналитично и $f = W \cdot \Phi$; β) для любой зависящей от f мероморфной и отличной от константы функции f_1 имеется взаимно однозначное отображение Ψ $R^2(M^{2n}; f)$ на $R^2(M^{2n}; f_1)$ такое, что $\Phi_1 = \Psi \cdot \Phi$ (Φ_1 — естественное отображение M^{2n} на $R^2(M^{2n}; f)$). Полные доказательства свойств α) и β) даны в диссертации Коха (РЖМат, 1955, 4707).

Одним из следствий свойств α) и β) является теорема: Две мероморфные на M^{2n} функции, аналитически зависящие между собой, будут алгебраически зависящими, если M^{2n} компактно или если одна из функций имеет на M^{2n} точки неопределенности.

И. И. Пятецкий-Шапиро

381. Моногенные n-мерные векторные функции. Федоров В. С., Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, 1954, 5, 65—70

Векторная функция $\mathbf{f} = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ называется непрерывно моногенной функцией радиуса-вектора $\mathbf{r} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ в области D, если в этой области: 1) частные производные $u^k_j = \partial u^k / \partial x^j$ являются непрерывными функциями точки и 2) скалярное произведение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_a(M)$ не зависит от орта $\mathbf{a}$ (здесь $\mathbf{f}_a(M) = \lim_{M' \to M} [\mathbf{f}(M') - \mathbf{f}(M)] / |\mathrm{MM'}|$, где вектор $\mathrm{MM'}$ направлен одинаково с ортом $\mathbf{a}$).

Основной результат статьи заключается в следующем:

Если функция $\mathbf{f}$ непрерывно моногенна в D, то все ее компоненты u^j, а также функция $p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{f}_a$ имеют частные производные всех порядков как функции двух переменных x^j и x^k ($j \neq k$), и имеют место равенства

$$p_{jj} + p_{kk} = 0, \qquad u^j_{jj} + u^j_{kk} = 0.$$

При $n = 2$ эти равенства выражают моногенность функции $\mathbf{f}$ комплексного переменного $\mathbf{z} \equiv (x^1, x^2)$ в обычном смысле. При $n \geqslant 3$ функция p является линейной относительно $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

В. Л. Гончаров

382. Теория интегралов в общей теории бикомплексных функций. Йонеда (An integration theory in the general bi-complex function theory. Yoneda Keizo), Yokohama Math. J., 1953, 1, № 2, 225—262 (англ.)

Рассматривается линейная ассоциативная и коммутативная с главной единицей (обозначается: 1) алгебра бикомплексных чисел, т. е. чисел вида

$$\zeta = x + jy + jj'z + j'u \tag{1}$$

при условии

$$j^2 = \nu j + \mu, \quad j'^2 = \nu' j' + \mu', \tag{2}$$

где ν, μ, ν', μ' — определенные действительные постоянные для данной алгебры, x, y, z, u — переменные с любыми действительными значениями.

Множество всех таких чисел ζ образует кольцо с базисом 1, j, jj', j'.

Следуя Такасу (Takasu T., Tôhoku Sci. Repts, ser. 1, 1943, 32, 1—55), автор определяет абсолютное значение $|\zeta|$ числа ζ как модуль того обыкновенного комплексного (в частности, действительного) числа, в которое обращается правая часть равенства (1), если понимать под j и j' корни (обыкновенные комплексные, в частности, действительные) алгебраических уравнений (2) ($|\zeta|$ получает определенное значение при определенном выборе корней этих уравнений), и называет нормой $N(\zeta)$ числа ζ определитель вида

$$N(\zeta) = \begin{vmatrix} x & \mu' u - \nu' x & \mu y - \nu x & \mu'(\mu z - \nu u) - \nu'(\mu y - \nu x) \\ u & x & \mu z - \nu u & \mu y - \nu x \\ y & \mu' z - \nu' u & x & \mu' u - \nu' x \\ z & y & u & x \end{vmatrix}$$

а модулем числа ζ называет $\rho = \sqrt[4]{N(\zeta)}$.

Непрерывная кривая $\zeta = \zeta(t)$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, в четырехмерном пространстве x, y, z, u называется jj'-спрямляемой, если для всевозможных разбиений $\alpha = t_0 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = \beta$, $n = 2, 3, \ldots$, соответствующие суммы $\Sigma_{i=0}^{n-1} |\zeta(t_{i+1}) - \zeta(t_i)|$ ограничены в их совокупности. Строится теория криволинейных интегралов $\int_a^b f(\zeta)\, d\zeta$, взятых по jj'-спрямляемым кривым, где a и b — бикомплексные числа, $f(\zeta) = X + jY + jj'Z + j'U$, X, Y, Z, U — однозначные действительные и непрерывные функции точки x, y, z, u какой-нибудь области, содержащей кривую интегрирования. Вместо $f(\zeta)$ автор, следуя Такасу, пишет также $f(\zeta, \bar\zeta_j, \zeta_{j'}, \bar\zeta_{jj'})$, где $\bar\zeta_j = x + j\bar y + \bar j j' z + j' u$ ($j + \bar j = \nu$), $\zeta_{j'} = x + jy + jj'\bar z + \bar j' u$ ($j' + \bar j' = \nu'$), $\bar\zeta_{jj'} = x + \bar j y + \bar j \bar j' z + \bar j' u$ (единицам j, $\bar j$, j' и $\bar j'$ приписываются «значения», равные корням уравнений (2)). Строится теория двойных и тройных интегралов от таких функций и доказываются одномерные (т. е. для криволинейных интегралов), двумерные и трехмерные аналоги интегральной теоремы Коши в теории функций комплексного переменного, а также доказываются для криволинейных интегралов аналоги интегральных формул Помпейю и Коши. В частности, доказывается теорема: $\oint \zeta^{-1} d\zeta = \pm 6\pi i$, $i = \sqrt{-1}$, если найдется такая бикомплексная постоянная a, что для всех точек ζ замкнутой кривой интегрирования норма $N(\zeta - a)$ сохраняет постоянное значение, и если эта

кривая окружает точку $O(\zeta = 0)$. Последнее означает, что через точку O можно провести 4 прямые, пересекающие указанную кривую и соответственно параллельные гиперплоскостям $\zeta = 0$, $\overline{\zeta}_j = 0$, $\overline{\zeta}_{j'} = 0$, $\overline{\zeta}_{jj'} = 0$ (в последних уравнениях следует дать единицам j, j', j, j' их «значения»). В. С. Федоров

383. **Структурные зависимости в семействе внутренних отображений. Андреян** (Relaţii de structură în familia transformărilor interioare. Andreian Cabiria), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Române, Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 3, 431—441 (рум.; резюме русс., франц.)

На основании теоремы Стоилова о топологической эквивалентности конформных внутренних отображений изучаются соотношения в семействе внутренних отображений римановых поверхностей. Пусть $\mathfrak{B}$ — семейство римановых поверхностей, гомеоморфных V, причем предполагается, что конформно эквивалентные поверхности образуют один класс. Выбирается система представителей V_r этих классов и для каждой V_r — ее внутреннее отображение T_r^* на $V: V_r \to V$. Через $\mathscr{I}$ [обозначается класс внутренних, а через $\mathscr{F} \subset \mathscr{I}$ — класс конформных отображений $V \to V_0$, через $\mathscr{F}$ и $\mathscr{C} \subset \mathscr{F}$ — соответственно классы гомеоморфных и конформных отображений $V \rightleftarrows V$; аналогичные обозначения вводятся для V_r. Если обозначить через $\mathscr{I}_V^V = \mathscr{F}\mathscr{F}$ класс, составленный из суперпозиций отображений классов $\mathscr{F}$ и $\mathscr{I}$, и $\mathscr{I}_V^{V_r} = \mathscr{I}_r T_r^{*-1} \mathscr{F}$, где T_r^* — гомеоморфизм $V_r \to V$, то теорема Стоилова запишется в виде

$$\mathscr{I} = \bigcup_{V_r \in \mathfrak{B}} \mathscr{I}_V^{V_r} \quad (\mathscr{I}_V^{V_r} \cap \mathscr{I}_V^{V_k} = 0 \text{ при } r \neq k).$$

В реферируемой работе устанавливаются следующие изоморфизмы:

$$\frac{\mathscr{I}_V^V}{\mathscr{F}} \rightleftarrows \frac{\mathscr{I}}{\mathscr{C}}, \quad \frac{\mathscr{I}_V^V}{\mathscr{I}} \rightleftarrows \frac{\mathscr{F}}{\mathscr{C}},$$

а также

$$\frac{\mathscr{I}}{\mathscr{F}} \rightleftarrows \bigcup_{V_r \in \mathfrak{B}} \frac{\Phi_r}{\Gamma_r} \rightleftarrows \frac{\Phi\Gamma}{\Gamma} \rightleftarrows \frac{\Phi\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}}, \quad \frac{\mathscr{I}}{\Gamma} \rightleftarrows \frac{\mathscr{I}}{\Phi\Gamma}, \quad \frac{\mathscr{I}}{\mathfrak{N}} \rightleftarrows \frac{\mathscr{I}}{\Phi\mathfrak{N}},$$

где $\Phi_r = \mathscr{I}_r T_r^{*-1}$, $\Gamma_r = T_r^* \mathscr{C}_r T_r^{*-1}$, $\Phi = \bigcup_{V_r \in \mathfrak{B}} \Phi_r$, $\Gamma = \bigcup_{V_r \in \mathfrak{B}} \Gamma_r$, $\mathfrak{N} = \bigcup_{T \in \mathscr{F}} T\Gamma T^{-1}$ (операция $\bigcup$ понимается в групповом смысле). Б. В. Шабат

384. **О проблеме «одного круга» для гармонических функций. Хуккеман** (On the «one-circle» problem for harmonic functions. Huckemann Friedrich), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 491—497 (англ.)

Пусть $u(x)$ непрерывна в $(-1,1)$ и для каждого x, $|x| < 1$, существует такое $\varepsilon = \varepsilon(x)$, что $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (-1,1)$ и $u(x) = (2\varepsilon)^{-1} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u(\xi)\, d\xi$.

Тогда, если существуют пределы

$$l_1 = \lim_{x \to 1} \int_0^x u(\xi)\, d\xi, \quad l_2 = \lim_{x \to -1} \int_0^x u(\xi)\, d\xi,$$

то функция $u(x)$ линейна и, следовательно, l_1 и l_2 конечны.

Условие существования l_1 и l_2 не может быть ослаблено, а условие непрерывности не может быть просто опущено. Интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ может быть заменен любым интервалом $(x_1, x_2) \subset (-1,1)$, содержащим x, при условии, что $x_2 - x_1 < 2 - \delta$, где $\delta > 0$ не зависит от x. Среднее по интервалу не может быть заменено средним по его границе.

Результатов для двумерного случая (достаточных признаков гармоничности) статья не содержит. Н. С. Ландкоф

385. **О классе S_λ. Исикава** (On the class S_λ. Ishikawa Osamu), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 6, 424—427 (англ.)

Неотрицательная в области D функция двух переменных $f(x, y)$ принадлежит, по определению, к классу S_λ ($\lambda > 0$), если она может быть представлена как предел убывающей последовательности дважды непрерывно дифференцируемых в D функций $f_n(x, y)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{r \to 0} \frac{8}{r^2} \left[\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\varphi, y + r\sin\varphi)\, d\varphi \right\}^\lambda - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\xi^2+\eta^2 \leqslant r^2} f^\lambda(x+\xi, y+\eta)\, d\xi\, d\eta \right] \geqslant 0.$$

Легко видеть, что класс S_1 совпадает с классом неотрицательных субгармонических функций, а класс S_2 совпадает с классом логарифмически-субгармонических функций.

Доказывается, что неотрицательная функция $f(x, y)$ будет логарифмически-субгармонической, если одна из нижеследующих двух функций принадлежит классу $S_\lambda (0 < \lambda < 2)$ при любых действительных α и β: $[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2] f(x, y)$, $e^{\alpha x + \beta y} f(x, y)$.

Эта теорема является обобщением для функций класса S_λ теорем Бекенбаха (Beckerbach E. F., Duke Math. J., 1941, 8, 393—400) и Радо (Radó T., C. r. Acad. sci., 1928, 186, 346—348) для неотрицательных субгармонических функций. Доказательство основано на элементарной лемме: Для того чтобы неотрицательная дважды непрерывно дифференцируемая в области D функция $f(x, y)$ принадлежала к классу $S_\lambda (\lambda > 0)$, необходимо и достаточно выполнение в области D неравенства

$$f \Delta f - (\lambda - 1)(f_x^2 + f_y^2) \geqslant 0.$$

В статье имеются опечатки. Например, на стр. 424, строка 15 сверху, напечатано $\lambda = 2$ вместо $\lambda = 1$; на стр. 424 теорема Бекенбаха приписана Радо и наоборот. Е. Д. Соломенцев

386. **Плюрисубгармонические функции и связанные с ними меры Радона. Приложения к аналитическим функциям. Лелон** (Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques. Lelong P.), Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Liège, Georges Thone; Paris, Masson et Cie, 1953, 21—40 (франц.)

Дается в основном обзор результатов автора по теории плюрисубгармонических функций за период с 1942 по 1953 г. Приводятся эквивалентные между собой определения плюрисубгармонических функций от n комплексных переменных, рассматривается понятие области D, выпуклой относительно таких функций (P-выпуклой), и указываются различные необходимые и достаточные условия P-выпуклости.

Если $L(D)$ — класс всех функций, плюрисубгармонических в области D, а $l(D)$ — класс функций вида $\sum_{i=1}^q a_i f(z_1, \ldots, z_n)$ ($a_i > 0$ $f(z_1, \ldots, z_n)$ аналитична в D), определенным образом замкнутый, то тождество $l(D) \equiv L(D)$ для любой P-выпуклой области D эквивалентно теореме Ока об областях аналитичности.

Всякая плюрисубгармоническая функция $V(z_1,\ldots,z_n)\equiv V(z)$ представима в виде $V(z)=H(z)-\int|\xi-z|^{-2n+2}\times d\mu(\xi)$, где $H(z)$ — гармоническая функция, а μ — некоторая положительная мера. Автор вводит связанную с функцией $V(z)$ дифференциальную форму $\omega(V)=i\pi^{-1}\Sigma_{i,j}(\partial^2V/\partial z_i\partial\bar z_j)\,dz_i\wedge d\bar z_j$ и показывает, что $d\mu=(n-2)!\,2\pi^{-1-n+1}\omega(V)\wedge\beta_{n-1}$, где $\beta_k=(i/2)^k\times\Sigma_{j_1<\ldots<j_k}dz_{j_1}\wedge d\bar z_{j_1}\wedge\ldots\wedge dz_{jk}\wedge d\bar z_{jk}$. Если $V(z)=\ln|F(z)|$, то $\omega(V)\wedge\beta_{n-1}$ есть элемент площади аналитического многообразия $F(z_1,\ldots,z_n)=0$. Если имеется q плюрисубгармонических функций $V_1,\ldots,V_q$, то форма $\Omega_{n,q}=\omega(V_1)\wedge\ldots\wedge\omega(V_q)\wedge\beta_{n-q}$ называется формой пересечения этих функций. $\Omega_{n,q}$ представляет собой положительную меру, которая при $q=2$, $V_1=\ln|F_1|$, $V_2=\ln|F_2|$ дает площадь аналитического многообразия $F_1(z)=0$, $F_2(z)=0$.

З. Я. Шапиро

387. Топология субгармонических функций. Одзава (The topology of subharmonic functions. Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Sem. Repts, 1953, № 4, 97—116 (англ.)

Исследование критических множеств для субгармонических функций, определенных в некоторой многосвязной плоской области и непрерывных в ее замыкании, являющееся обобщением и развитием соответствующих исследований Морса (Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, М., 1951).

Даются разнообразные формулы, связывающие, например, число изолированных граничных экстремальных точек, число полюсов, порядок седловых точек, эйлеровы числа критических множеств, порядок связности данной области с другими подобными характеристиками.

Подробно результаты в реферате не приводятся ввиду сложности их формулировок. Л. Д. Кудрявцев

388. О некоторых предположениях относительно псевдовыпуклых областей. Хитоцумацу (On some conjectures concerning pseudo-convex domains. Hitotumatu Sin), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 2, 177—195 (англ.)

Устанавливаются некоторые соотношения между проблемами теории псевдовыпуклых областей и проблемами теории субгармонических функций в пространстве n комплексных переменных.

В гл. I (§§ 1—3) систематизированы основные определения и теоремы теории плюрисубгармонических функций. Действительная функция $V(z_1,\ldots,z_n)$ в области D пространства n комплексных переменных называется плюрисубгармонической, если она удовлетворяет в D следующим условиям: а) $-\infty\leqslant V(z)<\infty$ и $V(z)\not\equiv-\infty$; б) $V(z)$ полунепрерывна сверху; в) функция $V(z_1^0,\ldots,z_{j-1}^0,z_j,z_{j+1}^0,\ldots,z_n^0)$ любого из n переменных z_j при фиксированных значениях остальных переменных является субгармонической функцией z_j, либо тождественно равна $-\infty$. Каждая плюрисубгармоническая функция является субгармонической функцией $2n$ действительных переменных $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_n$, где $z_i=x_i+iy_i$; плюрисубгармоническими функциями являются, например, модифицированные функции Гартогса.

В гл. II (§§ 4—6) приводятся основные факты теории областей, выпуклых по отношению к плюрисубгармоническим функциям. Область D пространства n комплексных переменных называется выпуклой по отношению к плюрисубгармоническим функциям (P-выпуклой), если для каждого компактного подмножества $\Delta\subset D$ существуют два множества Δ' и G такие, что $\Delta\subset\Delta'\subset\overline{\Delta'}\subset D$, а G всюду плотно в $D\setminus\Delta'$ и для каждой точки $p\in G$ существует плюрисубгармоническая функция $V_p(z)$ в D, удовлетворяющая соотношению $V_p(P)>\sup_{z\in\Delta}V_p(z)$. Это определение принадлежит Лелону. Устанавливаются соотношения между этим определением P-выпуклых областей и другими определениями. В частности, приведенное определение P-выпуклых областей эквивалентно определению псевдовыпуклых областей Ока, а каждая сильно псевдовыпуклая область в смысле Леви будет обязательно P-выпуклой.

В § 7 гл. III устанавливаются некоторые связи между гипотезами теории плюрисубгармонических функций. Например, если справедлива гипотеза Бохнера и Мартина: семейство плюрисубгармонических функций совпадает с семейством модифицированных функций Гартогса, то справедлива гипотеза Лелона: если область B является аналитическим завершением области D, то каждая плюрисубгармоническая в D функция продолжаема в B с сохранением плюрисубгармоничности; если справедлива эта гипотеза Лелона, то справедлива и следующая его гипотеза: каждая P-выпуклая область есть область регулярности.

В § 8 гл. III устанавливается эквивалентность различных формулировок гипотезы Леви: каждая сильно псевдовыпуклая в смысле Леви область есть область регулярности. В частности, гипотеза Леви эквивалентна гипотезе Ока (верной для $n=2$): если для двух параллельных гиперплоскостей A и B пересечения области D с двумя полупространствами, ограниченными одной из этих гиперплоскостей и содержащими другую, суть области регулярности, то D есть область регулярности.

В § 9 гл. III доказывается, что гипотеза Леви эквивалентна следующей: область Гартогса $\mathfrak{D}=\{z\in D,\ |w|<V(z)\}$ в пространстве $n+1$ переменных $z_1,\ldots,z_n,w$ тогда и только тогда является областью регулярности, когда D есть область регулярности в пространстве n переменных $z_1,\ldots,z_n$ и $-\ln V(z)$ — плюрисубгармоническая функция в D. Последняя гипотеза эквивалентна следующей: каждая плюрисубгармоническая в области регулярности D функция $V(z)$ представима в форме:

$$V(z)=\overline{\lim_{\zeta\to z}}\{\overline{\lim_{m\to\infty}}\ (a_m\ln|f_m(\zeta)|)\},$$

где $a_m\geqslant0$ — постоянные, а $f_m(z)$ — однозначные голоморфные в D функции.

В заключение приводится простое доказательство справедливости гипотезы Леви для областей Рейнгардта. Библ. 39 назв. Е. Д. Соломенцев

389 К. Теория функций комплексного переменного. Т. 1. Каратеодори (Theory of functions of a complex variable. Vol. 1. Carathéodory C. Translated by F. Steinhardt, New York, N. Y., Chelsea Publishing Co., 1954, XIII+301 pp.) (англ.) Перевод книги автора «Funktionentheorie, Bd. I» (Basel, Birkhäuser, 1950).

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 612.

390 Д. Некоторые задачи теории распределения значений мероморфных функций. Гольдберг А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Львовск. ун-т, Львов, 1955

391 Д. Проблема моментов для целых аналитических функций. Соловьев А. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

См. также: 9, 10, 12, 82, 269, 306, 328, 331К, 333 Д, 414, 433, 436, 558, 587, 624

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

392. Об одном представлении решений аналитической системы линейных дифференциальных уравнений. Антосевич, Абрамовиц (A representation for solutions of analytic systems of linear differential equations. Antosiewicz H. A., Abramowitz Milton), J. Wash. Acad. Sci., 1954, 44, № 12, 382—384 (англ.)

Рассматриваются системы дифференциальных уравнений:

$$dx/dt = A(t, z)\,x, \tag{1}$$

$$dy/dt = B(t)\,y, \tag{2}$$

где x, y — n-мерные векторы, $A(t, z)$ — матрица, аналитическая по скалярной переменной t и непрерывная по k-мерному векторному параметру z при $|t| \leqslant \tau < \infty$, $\|z\| \geqslant \zeta \geqslant 0$, $B(t)$ — матрица, аналитическая по t при $|t| \leqslant \tau < \infty$.

Пусть $y(t) = Y(t)\,C$ — общее решение (2).

Доказывается, что общее решение (1) может быть представлено в виде $x(t, z) = X(t, z)\,Y(t)\,C$, где $X(t, z)$ — матрица, аналитическая по t и непрерывная по z при $|t| < \sigma < \tau$, $\|z\| \geqslant \zeta \geqslant 0$. Рассматриваются два примера, в которых $B(t) = \lim_{\|z\| \to \infty} A(t, z)$.

И. З. Штокало

393. Частные решения линейных дифференциальных уравнений. Феттис (Particular integrals of linear differential equations. Fettis H. E.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 3, 174—176 (англ.)

Излагается известный метод Коши для отыскания частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения в применении к уравнениям с постоянными коэффициентами: $(D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n)y = f(x)$. (Гурса. Курс математического анализа, т. II ч. 2, М.—Л., Гостехиздат, 1933, 112—113). Указывается, что этот метод может быть применен при отыскании частных решений систем линейных уравнений.

Ф. В. Широков

394. Полиномы Эрмита и дифференциальные уравнения. Поли (Polynomes d'Hermite et équations différentielles. Poli L.), Mathesis, 1954, 63, № 9—10, 319—325 (франц.)

Ряд обобщений результата, полученного Годо Godeaux, Mathesis, 1951, 60, 232), заключающегося в том, что $(Ae^{x\sqrt{3}} + Be^{-x\sqrt{3}} + C)\,e^{-1/2x^2}$ есть общее решение уравнения $y''' + 3xy' + 3x^2y' + x^3y = 0$. Например, используя полиномы Аппеля, записанные в символическом обозначении: $P_n = (x + a)^n$ (степени a заменены индексами), автор показывает, что для уравнения

$$y^{(n)} + C_n^1 xy^{(n-1)} + C_n^2 x^2 y^{(n-2)} + \ldots + x^n y = 0$$

системой линейно независимых частных решений будет $\exp(-1/2x^2 + xr_i)$, где r_i — корни уравнения $H_n(r) = 0$.

Даются обобщения, связанные с полиномами Цехино и полиномами Эмбера.

Выводятся разложения произведений полиномов Эрмита в конечные суммы (обозначения несколько изменены референтом):

$$H_n(x)\,H_m(x) = \sum_{\nu=0}^{k} C_n^\nu C_m^\nu \nu!\, H_{m+n-2\nu}(x), \quad k = \min(m, n),$$

$$C_n^{(\nu)} C_m^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{k} \nu!\,(m + n - 2\nu)^{[\nu]} C_{n+m-3\nu}(x),$$

$$k = \min[m, n, (m + n)/3],$$

$$a^{[\nu]} = a(a - 1)(a - 2)\ldots[a - (\nu - 1)].$$

И. Н. Денисюк

395. Об асимптотических решениях нелинейных разностных уравнений первого порядка. I. Танака (On asymptotic solutions of non-linear difference equations of the first order. I. Tanaka Senichiro), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1953, A7, № 2, 107—128 (англ.)

Рассматривается разностное уравнение

$$[y(x + h) - y(x)]/h = f(x, y(x)), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ регулярна при $|x| \geqslant R$, $|y| \leqslant r$. Устанавливается, что при условии $|1 + f'_y(\infty, g_0)| > 1$ (g_0 такое, что $f(\infty, g_0) = 0$, $f'(\infty, g_0) \neq 0$) уравнение (1) имеет единственное аналитическое решение (формальное) $y = g_0 + g_1 x^{-1} + g_2 x^{-2} + \ldots + g_n x^{-n} + u_n(x)\,x^{-n}$, где $|u_n(x)| \leqslant M$, $M = \text{const}$, в области Γ: $|x| = |\sigma + i\tau| \geqslant \rho$ для $\sigma \geqslant 0$, $|\tau| \geqslant \rho$ для $\sigma \leqslant 0$, $\rho \geqslant R$. Если $|1 + f'_y(\infty, g_0)| = 1$, то уравнение (1) обладает единственным аналитическим решением вида $y = g_0 + g_1 x^{-1} + \ldots + g_{n+1} x^{-(n+1)} + U_{n+1}(x)\,x^{-n}$, ограниченным по модулю в области Γ^*: $|x| > \rho$, $|\arg x| \leqslant \pi/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Показывается справедливость аналогичного утверждения и относительно области Γ^{**}: $|x| \geqslant \rho$, $|\arg x - \pi| < \pi/2 - \varepsilon$. В областях Γ^* и Γ^{**} у уравнения (1) есть два решения y^* и y^{**}, асимптотические разложения которых в соответствующих областях имеют вид $\sum_{n=0}^{\infty} g_n x^{-n}$.

В работе существенным образом используется метод неподвижных точек.

А. А. Миролюбов

396. О нелинейном дифференциальном уравнении Йосидзава (On the non-linear differential equation. Yoshizawa Taro), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1954, A28, № 2, 133—141 (англ.)

Рассматривается нелинейная система

$$dx/dt = f(t, x, y),\ dy/dt = g(t, x, y), \tag{1}$$

где $f = f(t, x, y)$, $g = g(t, x, y)$ — непрерывные функции в области $\Delta_1 \{0 \leqslant t < \infty,\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty\}$. Обозначим через $C\mathfrak{N}$ дополнение области $\mathfrak{N} = \{|x| < A_1,\ |y| < B_1\}$ (A_1 и B_1 — некоторые положительные постоянные и пусть в области $\Delta_2 = \{0 \leqslant t < \infty,\ (x, y) \in C\mathfrak{N}\}$ определена функция $\Phi(x, y)$ такая, что: 1) $\Phi(x, y) > 0$; 2) $\Phi(x, y)$ равномерно стремится к 0, если $|x| \to \infty$ или $|y| \to \infty$; 3) $\Phi(x, y)$ локально удовлетворяет условиям Липшица относительно (x, y) и, кроме того, для внутренних точек Δ_2

$$\overline{\lim_{h \to 0}} (\Phi(x + hf, y + hg) - \Phi(x, y))h^{-1} \geqslant \varepsilon > 0,$$

где ε — фиксированное число при ограниченных x и y. Функция $\Phi(x, y)$ играет роль обобщенной функции Ляпунова в окрестности бесконечно удаленной точки. В таком случае решения $x = x(t)$, $y = y(t)$ системы (1) равномерно ограничены при $t \to \infty$ (ultimately bounded) (т. е. существуют положительные постоянные A и B, не зависящие от рассматриваемого решения, такие, что $|x(t)| < A$, $|y(t)| < B$ при $t > T_0$, где T_0, вообще говоря, зависит от выбора частного решения). Если, сверх того, выполнены условия единственности задачи Коши (например, имеют место необходимые и достаточные условия Окамура (Okamura, Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1942, A24, 22)) и функции f

и g периодические по t с общим периодом ω, то система (1) имеет хотя бы одно периодическое решение периода ω. При доказательстве последнего утверждения используется теорема Массера (Massera, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, 54, № 7, 636). Как частный случай общей теоремы получается теорема ограниченности Рейтера (Reuter, J. London Math. Soc., 1952, 27, № 105, 45—58). Б. П. Демидович

397. О сходимости решений нелинейного дифференциального уравнения. Йосидзава (On the convergence of solutions of the non-linear differential equation. Yoshizawa Taro), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1954, A23, № 2, 143—151 (англ.)

Решается вопрос об асимптотической устойчивости решений уравнений (1) (реф. 396).

Теорема. Пусть решения $x(t)$, $y(t)$ системы (1) равномерно ограничены при $t \to \infty$ и пусть в области $\Delta_2 = \{t_0 \leqslant t < \infty, |x| \leqslant A, |u| \leqslant A, |y| \leqslant B, |v| \leqslant B\}$ существует непрерывная функция $\Phi = \Phi(x, u, y, v)$ такая, что: 1) $\Phi > 0$ при $|x-u|+|y-v| > 0$; 2) $\Phi = 0$ при $|x-u|+|y-v| = 0$; 3) Φ удовлетворяет условиям Липшица относительно переменных (x, u, y, v) и в каждой внутренней точке области Δ_2

$$\Phi_1 = \overline{\lim}_{h \to 0} \frac{1}{h} [\Phi(x + hf, u + hf, y + hg, v + hg) - \Phi(x, u, y, v)] \leqslant 0,$$

причем для каждого достаточно малого $\lambda > 0$ при $|x-u|+|y-v| \geqslant \lambda$ выполнено неравенство: $\Phi_1 \leqslant \varkappa(\lambda) < 0$, где $\varkappa(\lambda)$ — некоторая постоянная. Тогда для любых решений $\{x(t), y(t)\}$ и $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}$ системы (1)

$$\lim_{t \to \infty} [x(t) - \bar{x}(t)] = 0, \quad \lim_{t \to \infty} [y(t) - \bar{y}(t)] = 0.$$

В частности, если (1) имеет периодическое решение, то это решение единственно и все остальные решения сходятся к нему при $t \to +\infty$.

Условия, наложенные на функцию Φ, могут быть несколько видоизменены. Полученные результаты допускают обобщение на n-мерный случай. Как пример доказывается, что теорема сходимости Рейтера (Reuter, London. Math. Soc., 1951, 26, № 103, 215—221) получается из теоремы автора при некотором конкретном выборе Φ. Б. П. Демидович

398. Необходимые и достаточные условия полуустойчивости предельного цикла. Чечик В. А., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 183—187

Используются критерии полуустойчивости предельного цикла уравнения $dy/dx = f(x; y)$, полученные референтом (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 165—168). Исследуя поведение функции $\psi(u_0) = \int_0^l F(s, n)\, ds$ вдоль интегральной кривой L, автор доказывает, что необходимым условием полуустойчивости цикла L является равенство

$$\int_0^1 (ff'_x - f'_y)(1 + f^2)^{-1}\, ds = 0.$$

Приводится также достаточное условие. Уравнения цикла предполагаются известными. Разобраны примеры. П. Н. Панюш

399. О некоторых свойствах нелинейных дифференциальных уравнений «параметрического возбуждения». Ямагути (On some properties of the nonlinear differential equations of the «parametric excitation». Yamaguti Masaya), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1954, A23, № 2, 87—96 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x, t) = p(t), \qquad (1)$$

где функции $f(x)$, $g(x, t)$ удовлетворяют условию Липшица по x и $g(x, t)$ имеет непрерывную частную производную $g_t(x, t)$, $g(x, t)$ и $p(t)$ обладают периодом ω и $\int_0^\omega p(t)\, dt = 0$. Пусть $F(x) = \int_0^x f(u)\, du$, $G(x, t) = \int_0^x g(u, t)\, du$.

При помощи метода неподвижных точек доказываются следующие теоремы:

I. Пусть $F(x) \operatorname{sgn} x \to +\infty$ при $|x| \to \infty$; $g(x, t) \times \operatorname{sgn} x \geqslant k_0$ при $|x| > \xi_0$; $|F(x)| \geqslant 1/k_1 |G_t(x, t)/g(x, t)|$ при $|x| > \xi_1$, где k, ξ_0, k_1, ξ_1 — положительные постоянные, $0 < k_1 < 1$.

Тогда для каждых $\dot{x}_0$, x_0 решение $x(t)$ уравнения (1), для которого $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$, удовлетворяет неравенствам $|x(t)| < B$, $|\dot{x}(t)| < B$ при $t > t_0(\dot{x}_0, x_0)$, где $B = \text{const}$, не зависит от x_0 и $\dot{x}_0$, и среди решений уравнения (1) имеется по крайней мере одно, обладающее периодом ω.

II. Если условия теоремы 1 дополнить условиями $f(x) = f(-x)$, $-g(x, t) = g(-x, t)$, $g(x, t) = g(x, t + \omega/2)$, $p(t) = -p(t + \omega/2)$, то уравнение (1) имеет по крайней мере одно решение с периодом ω такое, что $x(t) = -x(t + \omega/2)$.

Приведены примеры. А. В. Драгилев

400. К вопросу о прохождении через резонанс второго рода. Митропольский Ю. А., Укр. матем. ж., 1955, 7, № 1, 121—123

Для исследования режима прохождения через резонанс первого рода изучается уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(\tau) f(x, \dot{x}, \xi(\tau)) + E \sin nt; \quad \tau = \varepsilon t. \qquad (1)$$

Заменой переменных (1) сводится к уравнению

$$\ddot{z} + z = \varepsilon(\tau) f(z + (1 - n^2)^{-1} E \sin nt, \dot{z} + (1 - n^2)^{-1} nE \cos nt, \xi(\tau)).$$

Рассматривается случай, когда $f(u, v, \xi) = (k + 2u + \gamma u^2) v + u\xi / 0{,}016$; $k = k_0 - 2\vartheta\xi/\beta$; $\varepsilon(\tau) = 0{,}016/(1 + \xi(\tau))$; $n = 2$; β, γ, ϑ, k_0 — заданные числа. Для уравнения такого вида при помощи метода, развитого автором (Прикл. матем. и механика, 1950, 14, № 2), построены резонансные кривые и приведен ряд выводов, полученных в результате анализа этих кривых. И. В. Адамов

401. О дифференциальном уравнении Т. Уно и Р. Иокоми. Сансоне, Конти (Sull'equazione di T. Uno ed R. Yokomi. Sansone G., Conti R.), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 37, 37—50 (итал.)

Решается задача о существовании и рождении предельных циклов у дифференциального уравнения

$$dy/dx = -xy[y^2 + (x+1)((x-1)^2 + \lambda)]^{-1} \qquad (1)$$

на проективной плоскости при всех действительных значениях параметра λ. Доказывается, что: 1) Не существует циклов при $\lambda \leqslant 0$ и при $\lambda \geqslant 1$. 2) Если $0 < \lambda < 1$, то существует ровно два цикла, которые расположены один вне другого симметрично относительно оси x. 3) Когда параметр λ, возрастая, проходит через значение $\lambda = 0$, циклы рождаются из двух особых предельных циклов, образованных каждый двумя сепаратрисами и двумя особыми точками типа седло. 4) При $\lambda \to 1 - 0$ оба цикла стягиваются в особые точки типа кратный фокус.

При $5 - 4\sqrt{2} < \lambda < 5 + 4\sqrt{2}$ на проективной плоскости x, y имеется 4 типа топологически различных семейств решений (1), соответствующих случаям

$5+4\sqrt{2}<\lambda<0$, $\lambda=0$, $0<\lambda<1$, $1\leqslant\lambda<5+4\sqrt{2}$.

Полученные результаты применяются к уравнению Льенара

$$\ddot{u}+\dot{u}[3u^2-(1-\lambda)]+2u(u+1)[(u-1)^2+\lambda]=0, \quad (2)$$

которое в координатах $u=x$, $\dot{u}\equiv v=y^2-(x+1)\times[(x-1)^2+\lambda]$ переходит в уравнение (1) и имеет единственное периодическое устойчивое решение только в случае $0<\lambda<1$. Н. Ф. Отроков

402. Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений. Альмухамедов М. И., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1954, 114, № 8, 9—20

Исследуется поведение двух взаимно ортогональных семейств кривых, определяемых уравнениями

$$dx/dt=\partial P/\partial x,\ dy/dt=\partial P/\partial y, \quad (1)$$

$$P\equiv{}^1/_2\ln\prod_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{\lambda_i}=c. \quad (2)$$

$M_i=(x_i, y_i)$ — различные точки плоскости, λ_i — действительные числа, отличные от нуля.

Определяется число и тип особых точек системы (1) и семейства (2). Показывается, что: 1) система (1) имеет на всей плоскости особые точки типа седло и узел; причем число узлов N и число седел C связаны уравнением $N-C=2$; 2) если $L\equiv\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\neq 0$, то M_i и бесконечно удаленная точка являются для системы (1) особыми точками типа узел, а для семейства (2) особыми точками типа центр; остальные особые точки их $n-1$ — седла для (1) и (2) (в том числе и m-кратные, где $m+1$ — число кривых, проходящих через такую точку). 3) При $L=0$ система (1) (семейство (2)) имеет n узлов (центров) в точках M_i и $n-2$ седла (в том числе и бесконечно удаленная точка).

Для некоторых случаев симметричного расположения узловых точек на плоскости даны примеры полного построения траектории системы (1). Н. Ф. Отроков

403. Об асимптотическом поведении решений одного класса нелинейных уравнений. Виллари (Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari. Villari Gaetano), Riv. mat. Univ. Parma, 1954, 5, № 1—3, 83—98 (итал.)

Рассматривается уравнение

$$x^n(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i(t)f_i[x^{n-1}(t)]$$

и при различных предположениях относительно коэффициентов $A_i(t)$ и нелинейных функций $f_i(z)$ выясняется асимптотическое поведение решений. Например:

Теорема 1. Если функции $A_i(t)$, $f_i(z)$ удовлетворяют условиям: $f_i(z)$ непрерывна при $z\geqslant z_0$; $|f_i(z)|\leqslant h|z|^{p_i}$ $(i=2, 3, \ldots, n)$; $A_i(t)$ непрерывна при $t\geqslant t_0$; $|A_i(t)|\leqslant h/t^{n+p_i(i-1)+\lambda_i}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, где h, p_i, λ_i — действительные положительные константы, то константе $c_1>q+\max[0, z_0]$, где $q>0$, и произвольным константам $c_2, c_3, \ldots, c_n$ соответствует некоторый интеграл

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}t^{n-i}u_i(t)/(n-i)!, \quad (1)$$

определенный для всех достаточно больших значений t, причем $\lim_{t\to\infty}u_i(t)=c_i$.

Если к указанным условиям добавить предположение, что $|f_i(z)-f_i(\bar{z})|\leqslant R_i|z^{r_i}-\bar{z}^{r_i}|$, где $0\leqslant r_i\leqslant p_i$, $z, \bar{z}>z_0$ и R_i, r_i — положительные константы, то решение типа (1) единственно. В. В. Немыцкий

404. Асимптотическое решение дифференциальных уравнений второго порядка. Аткинсон (The asymptotic solution of second-order differential equations. Atkinson F. V.), Ann. mat. pura ed appl., 1954, 37, 347—378 (англ.)

Получены асимптотические формулы для решений уравнения

$$y''+F(x)y^{2n-1}=0,$$

где $n>0$ — целое, а $F(x)>0$ определена и непрерывна для всех $x>0$.

В линейном ($n=1$) случае (гл. 1—4) основную роль играет преобразование $y=r\cos\theta$; $y'=-fr\sin\theta$; $r>0$, где f — гладкая функция с ограниченным изменением на $(0, \infty)$ и $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(\infty)>0$. В отличие от обычных применений такого преобразования к аналогичным исследованиям (Курант Гильберт Д., Методы математической физики, Москва, Гостехиздат, 1931, 1, гл. 5, § 11) автор полагает $F(x)=f^2+fg$. Для фазы θ и амплитуды r получаются обыкновенные уравнения.

Метод применяется к ряду уравнений (при этом не требуется, например, существования таких констант A и B, что $y-A\cos\left(\int_0^x f\,dx+B\right)\to 0$ и $y'+Af\sin\left(\int_0^x f\,dx+B\right)\to 0$).

В нелинейном случае (гл. 5) автор рассматривает уравнение

$$y''+nf^2y^{2n-1}=0,\ n>1,$$

где $f>0$ при $x>0$ — достаточно гладкая функция, $\lim_{x\to\infty}f(x)=f(\infty)>0$.

Рассматривается преобразование $y=r\psi(\theta)$; $y'=r^n\psi'(\theta)$; $r>0$, где $\psi(\theta)$ — периодическая функция, определяемая уравнением $d^2\psi/d\theta^2+n\psi^{2n-1}=0$ при начальных условиях $\psi(0)=1$ и $\psi'(0)=0$.

Доказано, что если $f\in C^1$ и $\int_0^\infty x|f'|\,dx<\infty$, то всякому нетривиальному решению y соответствуют такие константы A и B, что при $x\to\infty$

$$y=A\psi(xA^{-1}f(\infty)+B)+o(1).$$

Каждому нетривиальному решению уравнения

$$y''+nf^{n+1}y^{2n-1}=0,$$

где $f\in C^2$ и $\int_0^\infty x|f''|\,dx<\infty$ $\int_0^\infty x|f'^2|\,dx<\infty$, соответствуют такие константы A и B, что при $x\to\infty$

$$y=Af^{-1/2}\psi\left(A^{n-1}\int_0^x f\,dx+B\right)+o(1) \quad (1)$$

М. И. Ельшин

405. О линейных возмущениях нелинейных дифференциальных уравнений. Аткинсон (On linear perturbation of non-linear differential equations. Atkinson F. V.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 4, 561—571 (англ.)

Изучается уравнение

$$y''+y^{2n-1}+g(x)y=0, \quad (1)$$

которое рассматривается как нелинейное уравнение $y''+y^{2n-1}=0$ с линейной добавкой $g(x)y$.

Назовем амплитудой решения величину r, определяемую равенством $r^{2n} = y^{2n} + n(y')^2$, и «фазой» функцию $\psi(\theta)$ — решение уравнения $d^2\psi/d\theta^2 + n\psi^{n-1} = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $\psi(0) = 1$, $d\psi(\theta)/d\theta|_{\theta=0} = 0$. Устанавливается поведение амплитуды при различных предположениях относительно $g(x)$. Например:

Если $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, где $g_1(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$ и $\int_0^\infty |g_1|\,dx < \infty$, а $g_2(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant 0$ и $\int_0^\infty |g_2'|\,dx < \infty$, $g_2(\infty) = 0$, то для всех решений уравнения (1) либо I) $r(x) \to C > 0$, либо II) $r(x) \to 0$, причем решения типа I обязательно существуют. Если $g(x) > 0$ непрерывно дифференцируемо и стремится к нулю при $x \to \infty$ или $g(x)$ непрерывно при $x \geqslant 0$ $\int_0^\infty x\,|g(x)|\,dx < \infty$. то все решения будут типа I. Если $g(x)$ непрерывна, то все решения типа I колеблющиеся, причем число нулей $N(x)$ асимптотически определяется формулой $N(x) \sim$ $\sim A^{n-1}\,x^{n-1/2}\,(2K)^{-1}$, где $A = r(\infty)$, $K = \int_0^1 (1-\psi^{2n})^{-\frac{1}{2}}\,d\psi$.

Если $g(x)$ абсолютно интегрируемо по $(0, \infty)$, то решения типа II удовлетворяют неравенству

$$r^{n-1} \leqslant (n-1)(n+1)^{-(n+1)/2n} \int_x^\infty |g(x)|\,dx.$$

Если $g(x)$ отрицательна и непрерывно дифференцируема при $x \geqslant 0$ и монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, то решения типа II неколеблющиеся.

Имеются и другие результаты. В. В. Немыцкий

406. О колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-го порядка. Борувка Отакар, Чехосл. матем. ж., 1953, 3, № 3, 199—255 (резюме франц.)

Изучается уравнение

$$y'' = Q(x)\,y \qquad (1)$$

в предположениях, что $Q(x) < 0$ определена и непрерывна в интервале $(-\infty, +\infty)$ и что все решения (1) колеблющиеся. Ссылаясь на Хэмеля (Hamel G., Math. Ann., 1913, 73, 381), автор представляет решение (1) в форме Боля $y = c\rho\cos\left[\int_\xi^x \omega\,d\xi + \gamma(\xi)\right]$, где $\rho = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$; $\omega = w/\rho^2$; $w = y_1y_2' - y_2y_1' = \text{const}$ (y_1 и y_2 — фундаментальная система решений (1)), и изучает функцию $\zeta_n(x)$, определяемую соотношением $\int_x^{\zeta_n(x)} \omega\,dt = n\pi$, где n—целое положительное (отрицательное) число, $\xi_n(x)$ называется n-й прямой (непрямой) центральной дисперсией первого рода. Аналогично вводятся дисперсии еще трех родов. Если x — корень решения уравнения (1), то абсцисса n-го из экстремумов этой функции, расположенных правее (левее) x, рассматриваемая как функция x, есть прямая (непрямая) дисперсия второго рода. Если x — корень производной решения уравнения (1), то абсцисса n-го из корней этой функции, расположенных правее (левее) x, рассматриваемая как функция x, есть прямая (непрямая) дисперсия третьего рода и, наконец, абсцисса n-го из экстремумов производной, расположенных правее (левее) ее корня x — дисперсия четвертого рода. Определения этих функций используются при изучении дисперсий первого рода. Важность изучения зависимости поведения дисперсий первого рода от поведения $Q(x)$ известна давно. Доказательства основных свойств дисперсий первого рода, касающихся области определения этих функций, их непрерывности, степени гладкости и т. п., неоднократно встречались в литературе (см., например, Адамов Н. В., Матем. сб., 1935, 42, 651—668). Новой является дальнейшая классификация дисперсий на собственные и несобственные и рассмотрение проективных преобразований, связывающих эти дисперсии. В результате автор выводит уравнение

$$\sqrt{|\zeta'|}\,(|\zeta'|^{-1/2})'' + \zeta'^2\,Q(\zeta) = Q(x) \qquad (2)$$

и приходит к непонятному выводу, что «каждое решение дифференциального уравнения (2), определенное на интервале $(-\infty, +\infty)$, является собственной дисперсией». На самом деле общий интеграл уравнения (2) (Ельшин М. И., Докл. АН, 1949, 68, № 3, 221—224) имеет вид

$$\int_x^{\zeta(x)} [(Au + Bv)^2 + v^2]^{-1}\,A\,d\xi = C\pi,$$

где u и v — фундаментальная система решений уравнения (1) с начальными условиями $u_0 = 1$; $u_0' = 0$; $v_0 = 0$; $v_0' = 1$, $A = w \neq 0$, B и C — произвольные постоянные. Каждое частное решение уравнения (2) определено на интервале $(-\infty; +\infty)$ и выражает одну из функций постоянного смещения фазы на $C\pi$. Зависимость такой функции не от одного, а от трех параметров определяется допустимым произволом в выборе $\omega(x)$ в фазовом представлении решения уравнения (1). Связь дисперсий первого рода с функцией $Q(x)$ устанавливает теорема: существуют x_1 и x_2 ($x_1 < x < x_2$) такие, что $\zeta'(x) = Q(x_1)/Q(x_2)$. Отсюда автор делает вывод, что при монотонном $Q(x)$, $\zeta(t) - t$ возрастает или убывает одновременно с $Q(x)$ (Часть результата Жуковского, Матем. сб. 1892, 16). М. И. Ельшин

407. О некоторых новых свойствах (осцилляционных) решений линейных однородных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Шверц (Über einige neue Eigenschaften der (oscillatorischen) Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung. Švec Marko), Чехосл. мат. ж., 1954, 4, № 1, 75—94 (нем.; резюме русс.)

Исследуются свойства линейного однородного дифференциального уравнения четвертого порядка. Даны достаточные условия (выраженные через коэффициенты уравнения) того, чтобы решения не имели более одной кратной (двойной или тройной) точки. Доказывается, что при этих условиях корни частных решений, имеющих общую кратную точку, и корни их производных разделяются. Автор не ссылается на литературу по вопросам колебаний уравнений высших порядков (см., например, Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1950, 126), имеется лишь ссылка на статью О. Борувка (реф. 406).

М. И. Ельшин

408. Об оценке производных решений уравнения $y'' = f(x, y, y')$. Йосидзава (On the evaluation of the derivatives of solutions of $y'' = f(x, y, y')$. Yoshizawa Taro), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1953, A28, № 1, 28—32 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (1)$$

в цилиндрической области L^* переменных x, y, y', где x, y принадлежат замкнутой ограниченной области L плоскости x, y, $-\infty < y' < +\infty$, $f(x, y, y')$ непрерывна в области L^*. Определяются области $\Delta_1: (x, y) \in L$, $\alpha \leqslant y' \leqslant \beta$; $\Delta_2: (x, y) \in L$, $-\beta \leqslant y' \leqslant -\alpha$; $L': (x, y) \in L$, $|y'| \leqslant \beta$; $L'': (x, y) \in L$, $|y'| \leqslant \alpha$.

Для непрерывных функций $\Phi_i(x, y, y')$, удовлетворяющих в подобласти L^* условию Липшица по y и y', вводятся величины $D_F^{\pm}\Phi_i(x, y, y')$, которые являются обобщением производной, взятой в силу уравнения (1), и обращаются в производные, когда $\Phi_i(x, y, y')$ дифференцируемы.

Доказывается теорема: Для того чтобы решение уравнения (1), начинающееся в точке из L'', при возрастании x не выходило из L', необходимо и достаточно существование функций $\Phi_1(x, y, y')$ и $\Phi_2(x, y, y')$, непрерывных, неотрицательных, определенных соответственно в областях Δ_1 и Δ_2, удовлетворяющих в этих областях условиям Липшица по y и y' и таких, что $D_F^{+}\Phi_1(x, y, y') \geqslant 0$, $D_F^{+}\Phi_2(x, y, y') \geqslant 0$.

Функции Φ_i являются обобщением (применительно к данной задаче) функций Ляпунова. Доказательство достаточности условия ведется способом, обычно применяемым во втором методе Ляпунова. При доказательстве необходимости дано выражение $\Phi_i(x, y, y')$ через функции некоторого специального вида.

И. В. Адамов

409. Интегральные преобразования и теория собственных функций. Серс (Integral transforms and eigenfunction theory. Sears D. B.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 17, 47—58 (англ.)

Изучается задача

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty), \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \tag{2}$$

где $q(x)$ — непрерывная действительная функция, α — действительное число. Доказывается, что теорема разложения по собственным функциям задачи (1)—(2) как в случае предельной точки, так и в случае предельного круга может быть получена при помощи предельного перехода, исходя из классической задачи Штурма—Лиувилля. Этот результат содержится в монографии референта «Разложение по собственным функциям...» (Гостехиздат, М.—Л., 1950 г.).

В конце работы доказывается теорема Винтнера и Хартмана (Hartman P., Wintner A., Amer. J. Math., 1948, 70, 809—816) о том, что спектральная функция задачи (1)—(2) имеет точки роста для сколь угодно больших положительных λ. Эта теорема непосредственно следует из асимптотической формулы В. А. Марченко (Тр. Моск. матем. о-ва, 1951, 1). Б. М. Левитан

410. Об одном методе решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными при заданных начальных условиях. Грунский (Eine Methode zur Lösung von Anfangswertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Grunsky Helmut), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 291—292 (нем.)

Решаются три краевые задачи:

а) $y' + a_1(x)y = 0;\ y(x_0) = y_0,$

б) $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0;\ y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_1;$

в) $u_{xy} + a_1(x, y)u_x + b_1(x, y)u_y + c_1(x, y)u = 0,$

$$u(x, y_0) = \alpha(x);\ u(x_0, y) = \beta(y).$$

Случай а) приведен, чтобы пояснить метод автора на простом примере.

Если $l_1(s)$ — первообразная функции $a_1(s)$, то

$$[y]_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} y'(s)\,ds = -\int_{x_0}^{x} a_1(s)y(s)\,ds =$$

$$= -[l_1 y]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} l_1(s)y'(s)\,ds = -[l_1 y]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} l_1(s)\,a_1(s)y(s)ds,$$

интегрируя n раз по частям, получаем

$$[y]_{x_0}^{x} = -\left[\left(\sum_{k=1}^{n} l_k\right)y\right]_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} a_{n+1}\,y\,ds,$$

$$l_k' = a_k = l_{k-1}\,a_1 \quad (k = 1, 2\ldots).$$

Если $l_k(x_0) = 0$ $(k = 1, 2\ldots)$, то при $n \to \infty$ получается обычное решение: $y = y_0 \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,ds\right\}$.

Аналогичным путем получаются формулы для решения в случаях б) и в). П. Д. Калафати

411. О существовании решений краевых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эфезер (Über die Existenz der Lösungen von Randwertaufgaben mit gewöhnlichen, nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Epheser Helmut), Math. Z., 1955, 61, № 4, 435—454 (нем.)

Рассматривается уравнение

$$y'' = f(x, y, y') \tag{1}$$

с краевыми условиями трех видов: $y(a) = y(b) = 0$ (задача I); $y(a) = y'(b) = 0$ (задача II); $y'(a) = y'(b) = 0$ (задача III). $f(x, y, y')$ определена в некоторой области D переменных x, y, y', непрерывна по совокупности y, y' для всякого фиксированного x и измерима по x при фиксированных y и y'; для любой ограниченной подобласти D существует интегрируемая функция x, мажорирующая $f(x, y, y')$.

Доказываются теоремы существования для задач I, II, III, позволяющие применить к ним метод сравнения уравнения (1) с линейными уравнениями

$$w_1'' + p(x)w_1' + q(x)w_1 = 0, \tag{2}$$

$$w_2'' - p(x)w_2' + q(x)w_2 = 0, \tag{3}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — неотрицательные, интегрируемые на $[a, b]$ функции. Пусть $r(x) \geqslant 0$ тоже интегрируема.

Доказывается теорема: Если $f(x, y, y')$ удовлетворяет в области $a \leqslant x \leqslant b$; $-\infty < y < +\infty$; $-\infty < y' < +\infty$ неравенству

$$f(x, y, y')\ \operatorname{sgn} y \geqslant -\{p(x)|y'| + q(x)|y| + r(x)\},$$

то: α) Краевые задачи I, II разрешимы, если у уравнения (2) есть решение, не имеющее нулей в (a, b) такое, что $w_1'(b) = 0$. β) Задачи I и III разрешимы, если у уравнения (3) есть решение такое, что $w_2'(a) = 0$, не имеющее нулей в (a, b). γ) Задача I разрешима также, если в (a, b) есть такая точка c, что в (a, c) существует не обращающееся в нуль решение (2), а в интервале (c, b) — такое же решение (3) и $w_1'(c) = w_2'(c) = 0$.

Если $p(x)$, $q(x) = \text{const}$, то α), β), γ) заменяются оценками для разности $b - a$. Показано, что требования α), β), γ) не могут быть заменены более слабыми условиями, наложенными на $p(x)$ и $q(x)$.

И. В. Адамов

412. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$. Вольпато (Sopra un problema di valori al contorno per l'equazione differenziale $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$.

Volpato Mario), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 184—185 (итал.)

Сформулированы результаты, опубликованные в одноименной статье (РЖМат, 1955, 3758). А. Д. Мышкис

413. О граничных задачах в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Харазов Д. Ф., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 2, 217—220

Изучается граничная задача для уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n}[p_\nu(x)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{m}[q_\nu(x,\lambda)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)} - f(x),$$

$$q_\nu(x,\lambda) = \sum_{l=0}^{r_\nu} g_{l\nu}(x)\,\lambda^l, \qquad \nu = 0, \ldots, m \leqslant n-1,$$

на конечном интервале (a, b) с однородными краевыми условиями. Функции p_ν, $g_{l\nu}$, f непрерывны на $[a, b]$; коэффициенты p_ν, q_ν и краевые условия должны удовлетворять некоторым требованиям, которые выполнены, например, в случае $(-1)^\nu p_\nu(x) \geqslant 0$ (или $\leqslant 0$) $\nu = 0, 1, \ldots, n$, $y^{(k)}(a) = y^{(k)}(b)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Пусть $H(x, t)$ — функция Грина оператора $F(y) = \Sigma_{\nu 0}^{n}[p_\nu(x)\,y^{(\nu)}]^{(\nu)}$ с заданными краевыми условиями;

$$h_{l\nu} = \begin{cases} g_{l\nu}, & l \leqslant r_\nu, \\ 0, & l > r_\nu; \end{cases}$$

$$A_i(t, x) = \sum_{\nu=0}^{m}\left[h_{l\nu}(x)\frac{\partial^\nu H(t, x)}{\partial x^\nu}\right]_x^{(\nu)}.$$

Обращая оператор $F(y)$, автор получает равносильное рассматриваемой граничной задаче интегральное уравнение вида

$$w(x) = \sum_{k=0}^{r}\int_a^b A_k(t, x)\,w(t)\,dt - f(x).$$

Применяя результаты, полученные ранее (РЖМат, 1954, 2229, 2232), автор получает теорему:

Пусть ядро $A_0(t, x)$ не имеет положительных собственных значений $\leqslant 1$. Тогда: а) если ядра $A_k(t, x)$ $(k = 2, 3, \ldots, r)$ имеют только положительные собственные значения, то в области: $\{0 < \arg\lambda \leqslant \pi/(r-1), 2\pi - \pi/(r-1) \leqslant \arg\lambda < 2\pi\}$ нет собственных значений граничной задачи; б) если ядра $(-1)^k A_k(t, x)$ $(k = 2, 3, \ldots, r)$ имеют только положительные собственные значения, то в области $\{\pi - \pi/(r-1) \leqslant \arg\lambda < \pi, \pi < \arg\lambda \leqslant \pi + \pi/(r-1)\}$ нет собственных значений граничной задачи. Утверждается, что указанные области несуществования невещественных собственных значений расширить нельзя.

Для случая $r = 2$ и положительно определенного ядра $A_2(t, x)$ граничная задача имеет лишь вещественные собственные значения λ_k, $\lim|\lambda_k| = \infty$, которым отвечают собственные функции $u_k(x)$, удовлетворяющие условиям:

$$\int_a^b F(u_i)\,u_j\,dx + \lambda_i\lambda_j\int_a^b\int_a^b A_2(x,y)\,F[u_i(x)]\,u_j(y)\,dx\,dy = \delta_{ij}.$$

Если $\lambda \neq \lambda_k$ $(k = 1, 2, \ldots,)$, то единственное решение граничной задачи почти всюду в $[a, b]$ представимо в виде

$$u(x) = -\int_a^b H(x, t)\,f(t)\,dt + \lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)}{\lambda_k - \lambda}\int_a^b f(t)\,u_k(t)\,dt.$$

Сформулированы также другие результаты.

В. А. Якубович

414. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений Эльсгольц Л. Э., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, 95—112

Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-\tau(t))) \quad (\tau(t) \geqslant 0) \qquad (1)$$

а также для уравнений высшего порядка и систем уравнений аналогичного вида вводится понятие устойчивости по Ляпунову. В применении к уравнению (1) это понятие аналогично обычному, но ограничение накладывается не на начальное значение x_0, а на начальную функцию $x(t) = \varphi(t)$ $(t \leqslant t_0)$, определяющую решение; кроме того, произвольность выбора начального значения $t = t_0$ оговаривается в определении. Дан обзор и оценка результатов в области теории устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений, полученных к настоящему времени; сформулированы основные нерешенные проблемы в этом направлении. Сначала приводятся результаты Беллмана и Райта, дающие необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости решений линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями, связанное с расположением корней характеристического уравнения; формулируется также неопубликованный результат И. А. Фрида, в котором допускается равенство нулю вещественных частей некоторых корней характеристического уравнения при отрицательности вещественных частей прочих корней. Если в уравнениях добавлены члены высшего порядка малости, то об устойчивости или неустойчивости по первому приближению говорят результаты Беллмана, Райта и Е. М. Есиповича, которые также приводятся (некоторые результаты даются со схемой доказательств). Далее описывается амплитудно-фазовый метод исследования расположения корней характеристического уравнения; критически оценивается метод разложения в ряд по степеням отставания.

Переносятся основные теоремы второго метода Ляпунова; однако автор указывает, что для дифференциально-разностных уравнений этот метод оказывается применимым лишь в исключительных случаях. В заключение формулируется определение устойчивости решения по отношению к возмущениям отклонений аргумента (например, для уравнения (1) — по отношению к возмущению $\tau(t)$) и приводятся некоторые простые результаты, связанные с этим понятием.

Для уравнений нейтрального типа следовало привести точное определение понятия решения. Опечатка: на стр. 109, строка 9 снизу, должно быть > 0 вместо $= 0$.

Разобрано несколько примеров. Библ. 23 назв.

А. Д. Мышкис

415. Устойчивость в целом приближенно-периодических колебаний. Массера (Estabilidad total y vibraciones aproximadamente periódicas. Massera José L.), Publs Inst. mat. y estadist Fac. ingr., 1954, 2, № 7, 135—145 (исп.; резюме англ.)

Вводится определение: тривиальное решение системы $\dot{x} = X(x, t)$ называется устойчивым в целом (в смысле Массера), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что любое решение $x(t)$; $\|x(0)\| < \delta$ системы $\dot{x} = X(x, t)$, где $|X_1(x, t) - X(x, t)| \leqslant \delta$, удовлетворяет неравенству $\|x(t)\| \leqslant \varepsilon$ для $t \geqslant 0$. Это определение аналогично вводившемуся ранее Малкиным и Дубошиным определению устойчивости при постоянно действующих возмущениях. В теореме 1, совпадающей с теоремой 6 Малкина (Прикл. матем. и механика, 1954, № 3, 241—245), устанавливаются достаточные условия устойчивости в целом. Как следствие из теоремы 1 и из обращения теорем Ляпунова получается: Если система $\dot{x} = X(x, t)$ автономна или имеет периодическую правую часть и тривиальное решение асимптотически устойчиво, то оно устойчиво в целом.

Ссылаясь на свою предыдущую работу (Publ. Inst. mat. estad. Montevideo, 1950, 2, 43—53), автор утверждает, что при некоторых условиях у системы

$x = X(x, t)$ существует периодическое решение, период которого несоизмерим с периодом $X(t)$. Устанавливаются условия устойчивости в целом подобных периодических решений.

Вывод этих условий опирается на следующую алгебраическую лемму:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы симметрическая форма $\Sigma a_{ij}u_i \cdot u_j$ была определенно отрицательна для всех u_i, для которых $\Sigma_{i=1}^{n} b_i u_i = 0$, является отрицательность всех корней уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\mu & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\mu & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Функция $x(t)$ называется ε^+-периодической периода T, если существует последовательность t_n: $0 < T - \varepsilon < t_{n+1} - t_n < T + \varepsilon$, $t_0 = 0$; такая, что $|x(t_n + \tau) - x(\tau)| < \varepsilon$, когда $0 \leqslant \tau \leqslant t_{n+1} - t_n$; функция называется ε^+-периодической в строгом смысле, если в качестве t_n можно взять nT. Класс ε^+-периодических функций пересекается с классом почти периодических.

Теорема 5 устанавливает существование ε^+-периодического решения у системы $\dot{x} = X_1(x, t)$ при условии, что у близкой к ней системы $\dot{x} = X(x, t)$ имеется периодическое решение, период которого может быть несоизмерим с периодом $X(t)$. Далее устанавливается, что орбитальная устойчивость исходного периодического решения недостаточна для того, чтобы у близкой системы существовало ε-периодическое решение.

В. В. Немыцкий

416. Замкнутые аналитические многообразия, преобразуемые в себя системой дифференциальных уравнений с периодическими правыми частями. Америо (Varietà analitiche chiuse trasformate in sé dai sistemi differenziali periodici. Americo Luigi), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **37**, 219—248 (итал.)

Рассматривается система уравнений

$$x_k' = X_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad (1)$$

с периодическими правыми частями периода T; X_k голоморфны при каждом t в некоторой области $A(t)$ пространства $S_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; кроме того, для каждого t X_k голоморфны в области $A'(t)$ комплексного пространства S_n' ($2n$-измерений), проекция которой в S_n совпадает с $A(t)$. Ввиду периодичности правых частей система (1) определяет в пространстве S_n или S_n' взаимно однозначное и непрерывное преобразование Ф.

Ищутся условия существования аналитических замкнутых многообразий, инвариантных при преобразовании Ф.

Некоторое аналитическое многообразие λ называется замкнутым, если оно представляется как $\{x_k\}$, $x_k = w_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m)$, где w_k — голоморфные функции в некоторой области R, причем все многообразие λ получается при изменении параметров в области R ($-\tau_1 + a_k \leqslant \tau_k \leqslant b_k + \sigma_1$). w_k голоморфны для всех значений $-\infty < \tau_k < \infty$ и периодичны по параметрам с периодами $l_1, l_2, \dots l_m$.

Теорема. Пусть в $A(\bar{t})$ содержится некоторое замкнутое аналитическое многообразие λ_0, представляющее собой границу FD_0 некоторой ограниченной области $D_0 \subset S_n$, и пусть выполнены следующие условия:

α) Интегральные кривые, определенные в пространстве $\Sigma_{n+1} = \{t, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и проходящие через точки λ_0 в момент $t = \bar{t}$, определены для всех $t \geqslant \bar{t}$. Совокупность интегральных кривых, выходящих из λ_0, при $t \geqslant \bar{t}$ образует в Σ_{n+1} поверхность Λ_0, содержащуюся в области голоморфизма правых частей уравнений (1); сечения $\gamma(t)$ этой поверхности равномерно ограничены в S_n и периодичны. Кроме того, $\Lambda_0 + D_0$ представляет собой границу $F\Delta$ некоторой области Δ пространства Σ_{n+1}, причем сечения D_k этой области гиперповерхностями $t = \bar{t} + kT$ таковы, что $D_{k+1} \subset D_k$.

β) Интегральные кривые системы (1), выходящие в пространстве Σ_{n+1} из точек λ_0', соответствующих как действительным, так и комплексным τ_k ($|\operatorname{Im} \tau_k|$ можно считать малым), для всех $t \geqslant \bar{t}$ находятся в области голоморфизма правых частей (1), причем сечения $\gamma'(t)$, равномерно ограничены в S_n' и периодичны.

В этих предположениях существует замкнутое аналитическое многообразие λ $p \leqslant n-1$ измерений, инвариантное при преобразованиях Ф. Траектории, выходящие из точек этого многообразия в момент $\bar{t}$, будут почти периодическими, т. е. $x_k = g_k(t, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ ($g_k(\bar{t}, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}) = w_k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1})$ являются почти периодическими функциями t.

Далее рассматривается ряд приложений этой теоремы к изучению системы двух уравнений.

В. В. Немыцкий

417. О почти периодических колебаниях нелинейных неавтономных систем. Малкин И. Г., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 6, 681—704

Доказывается существование почти периодического решения системы

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \dots, x_n) + \mu X_s'(t, x_1, \dots, x_n, \mu) \quad (s = 1, \dots, n), \qquad (1)$$

обращающегося при $\mu = 0$ в периодическое решение системы

$$\dot{x}_s^0 = X_s(t, x_1^0, \dots, x_n^0). \qquad (2)$$

Здесь X_s — периодические относительно t, а X_s' — почти периодические функции. Рассматривается и случай, когда система (2) имеет k параметрическое семейство периодических решений. Исследуется устойчивость найденных почти периодических решений системы (1).

Примечание референта. Ранее эти же вопросы решал Г. И. Бирюк (РЖМат, 1955, 729; 3196) для системы $\dot{X} = AX + \mu F(t, X)$, где X и $F(t, x)$ — векторы, A — постоянная матрица.

Система (1), рассмотренная автором, приводится к системе, рассмотренной Г. И. Бирюк, так как система (2.5) реферируемой работы, в которой, не уменьшая общности, можно считать $p_{s\alpha}$ постоянными, переходит при замене $y_s = \mu(z_s + y_s^{(1)})$, где $y_s^{(1)}$ ($s = 1, \dots, n$) — почти периодическое решение системы (2.10) при $\mu = 1$, в систему Г. И. Бирюк. Следует отметить, что Г. И. Бирюк не изучает устойчивости почти периодических решений системы (1), когда система (2) имеет k-параметрическое семейство периодических решений,

и не отмечает существования почти периодического решения в случае, на котором останавливается в § 6 автор. Относительно $F(t, x)$ и матрицы A предположения автора и Г. И. Бирюк в некоторых случаях несколько различны, хотя методы исследования весьма сходны и основаны на одной общей идее, высказанной Н. Н. Боголюбовым. (О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945). Н. П. Еругин

418. **Замечание об одной эргодической теореме.** Цуруми (Note on an ergodic theorem. Tsurumi Shigeru), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 6, 419—423 (англ.)

Пусть X — множество, $\mathfrak{B}$ — борелевское тело его подмножеств. Отображение T множества X на X (предполагаемое однозначным, но не предполагаемое взаимно однозначным) называется измеримым, если из $E \in \mathfrak{B}$ следует $TE \in \mathfrak{B}$, $T^{-1}E \in \mathfrak{B}$.

Измеримое отображение T называется несингулярным по отношению к σ-конечной мере m, определенной на $\mathfrak{B}$, если из $E \in \mathfrak{B}$, $mE = 0$ следует $m(TE) = m(T^{-1}E) = 0$. В этом случае, согласно теореме Радона-Никодима, существует такая измеримая функция $w(x)$, что для всякого множества $E \in T^{-1}\mathfrak{B}$

$$m(TE) = \int_E w(x)\, dm.$$

Положим $w_0(x) = 1$, $w_n(x) = w(x) \ldots w(T^{n-1}x)$ $(x \in X;\ n = 1, 2, \ldots)$. Имея в виду возможные обобщения эргодической теоремы Халмоша (Halmos P. R., Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1946, 32, 156—161) на отображения, не являющиеся взаимно однозначными, Даукер (Dowker Y. N., Acta Szeged., 1952, 12, 162—166) поставил следующий вопрос: будет ли ряд $\Sigma_{k=0}^{\infty} g(T^k x)\, w_k(x)$ почти всюду расходящимся для всякой положительной измеримой функции $g(x)$, если T, помимо перечисленных условий, удовлетворяет, например, условию несжимаемости: из $E \in \mathfrak{B}$, $T^{-1}E \supset E$ следует $m(T^{-1}E - E) = 0$? В реферируемой работе этот вопрос решается отрицательно. Как показывает автор, ответ будет отрицательным даже в том случае, если заменить условие несжимаемости более сильным условием: на $\mathfrak{B}$ существует конечная мера, инвариантная относительно T и эквивалентная m (мера μ, определенная на $\mathfrak{B}$, называется инвариантной относительно T, если $\mu(T^{-1}E) = \mu E$, эквивалентной m, если m и μ обращаются в нуль на одном и том же классе множеств). В. А. Рохлин

419 К. **Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 2-е. Эльсгольц Л. Э.**, М., Гостехиздат, 1954, 240 стр., 7 р. 40 к.

Книга состоит из 4 глав и содержит расширенный и значительно дополненный, по сравнению с программой втузов, курс дифференциальных уравнений.

Гл. I посвящена дифференциальным уравнениям 1-го порядка. Наряду с традиционным материалом излагаются методы Эйлера, Штёрмера и Чаплыгина приближенного интегрирования уравнений 1-го порядка. В гл. II рассматриваются дифференциальные уравнения порядка выше 1-го. Приводятся основы операторного метода решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и дается понятие об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи рядов; в частности, изучается уравнение Бесселя. Гл. III содержит общие сведения о системах дифференциальных уравнений; решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; приближенные и численные методы интегрирования систем уравнений. В гл. IV в основном без строгих доказательств излагаются: основы теории устойчивости, зависимость решений от параметра, некоторые методы нахождения периодических решений, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом: дается понятие об интегрирующих машинах. Разобрано много задач и примеров; кроме того, ко всем главам приведены задачи для упражнений (с ответами и указаниями). Имеются ссылки на дополнительную литературу и указана рекомендуемая литература, сообщаются некоторые исторические факты. Б. П. Демидович

420 Д. **О счетных системах дифференциальных уравнений в линейных нормированных пространствах и устойчивости их решений. Хаймульдин Омар.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казахск. ун-т, Алма-Ата, 1955

421 Д. **Отыскание периодических решений дифференциальных уравнений. Перетягин Б. М.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1955.

422 Д. **О монотонности решений систем дифференциальных и разностных уравнений. Лушникова З. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

423 Д. **О решении операционным методом некоторых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Рябцев И. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Куйбышев, 1955

424 Д. **Некоторые вопросы устойчивости в теории автоматического регулирования. Березкин Е. Н.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

425. **Фундаментальная теорема теории характеристик для нелинейного уравнения n-го порядка гиперболического типа. Чинкуини-Чибрарио** (Un teorema fondamentale per la teoria delle caratteristiche di equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico. Cinquini-Cibrario Maria), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 52—56 (итал.)

Сообщается, что доказана основная теорема теории характеристик в вещественной области при более общих условиях для гиперболического уравнения

$$F\left(x, y, z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0,$$

чем ранее доказанная Гурса теорема для аналитических функций (Goursat E., Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, Paris, 1896, 2, 10, 308—309). Доказательство не приводится. З. И. Халилов

426. **Существование аналитических решений общих линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Хорних** (Die Existenz von regulären Lösungen bei allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichungen. Hornich Hans), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 46—52 (нем.)

Рассматриваются условия, при которых уравнение

$$\sum_{i_1 \ldots i_n} g_{i_1 \ldots i_n} \partial^{i_1 + \cdots + i_n} u / \partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n} = f \qquad (1)$$

имеет аналитическое решение, где f, $g_{i_1 \ldots i_n}$ — аналитические функции, причем лишь конечное число $g_{i_1 \ldots i_n} \neq 0$.

Пусть

$$g_{i_1 \ldots i_n} = \sum_{h_1 \ldots h_n} g_{i_1 \ldots i_n}^{h_1 \ldots h_n} x_1^{h_1} \ldots x_n^{h_n}$$

сходятся при $|x_i|<\delta$ и $g^{h_1\dots h_n}_{i_1\dots i_n}=0$, если $h_j<i_j$, $j=1,\dots,n$;

$$A^{l_1\dots l_n}_{j_1\dots j_n}=\sum_{i_1\dots i_n} g^{h_1\dots h_n}_{i_1\dots i_n}\binom{l_1}{i_1} i_1!\dots\binom{l_n}{i_n} i_n!$$

Для того чтобы (1) имело аналитическое решение для всякой аналитической f, необходимо чтобы все $A^{j_1\dots j_n}_{j_1\dots j_n}\neq 0$.

Если

$$\varlimsup \left|A^{j_1\dots j_n}_{j_1\dots j_n}\right|^{1/(j_1+\dots+j_n)}=0, \qquad (2)$$

то всегда можно найти такую f, что уравнение (1) не будет иметь аналитического решения.

При $n=1$ (2) не выполняется, при $n=2$ (2) выполняется, например, для уравнения $x\,\partial u/\partial x - -\alpha y\,\partial u/\partial y = f(x,y)$, $\alpha = p/q + q_1^{-q_1} + q_2^{-q_2} + \dots$, где p, q, q_1, q_2, ... — положительные целые, q_{n+1} — кратное $q_n^{q_n}$.

З. И. Халилов

427. **Системы дифференциальных неравенств с частными производными первого порядка и их приложения.** Ш а р с к и й (Systèmes d'inégalités différentielles aux derivées partielles du premier ordre, et leurs applications. S z a r s k i J.), Ann. polon. math., 1954, 1, № 1, 149—165 (франц.)

Функции $f^\mu_\nu(P,U,Q)$ ($\mu=1,\dots,m$; $\nu=1,\dots,k$; $P=(x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_n)$; $U=(u_1,\dots,u_m)$, $Q=(q_1,\dots,q_n)$) определены соответственно в областях D_μ и удовлетворяют условиям:

$$|f^\mu_\nu(P,U,Q)-f^\mu_\nu(P,U,\overline{Q})|\leqslant N\sum_{i=1}^n|q_i-\overline{q}_i|,$$

если $u_i\geqslant\overline{u}_i$ ($i=1,\dots,\mu-1,\mu+1,\dots,m$), $u_\mu=\overline{u}_\mu$, то $f^\mu_\nu(P,U,Q)\geqslant f^\mu_\nu(P,\overline{U},Q)$.

Рассматриваются непрерывные функции $u_\mu(P)$, $v_\mu(P)$, определенные на множестве Z:

$$\overset{0}{x}_\nu\leqslant x_\nu<\overset{0}{x}_\nu+a,$$

$$a_i+N\sum_{\nu=1}^k(x_\nu-\overset{0}{x}_\nu)\leqslant y_i\leqslant b_i-N\sum_{\nu=1}^k(x_\nu-\overset{0}{x}_\nu)$$
$$(i=1,\dots,n),$$

где $a_i<b_i$, $0<a<(b_i-a_i)/2N$. Если $x_\nu=\overset{0}{x}_\nu$, то

$$u_\mu(P)>v_\mu(P). \qquad (1)$$

Пусть в каждой P, где $u_\mu(P)=v_\mu(P)$ для некоторого μ, u_μ и v_μ имеют полный дифференциал и

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}\geqslant f^\mu_\nu\left(P,U,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial u_\mu}{\partial y_n}\right),$$

$$\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\nu}<f^\mu_\nu\left(P,V,\frac{\partial v_\mu}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial v_\mu}{\partial y_n}\right).$$

Тогда (1) справедливо на всем Z.

В случае $k=1$ эта теорема при более слабых ограничениях была доказана автором ранее (Ann. Soc. math. Pologne, 1948, 21, 1—25).

Результаты применяются для исследования единственности и оценки разности двух решений системы

$$\partial u_\mu/\partial x_\nu=f^\mu_\nu(P,U,\partial u_\mu/\partial y_1,\dots,\partial u_\mu/\partial y_n). \qquad (2)$$

Приводится теорема о монотонной зависимости решений (2) от начальных значений.

A. Pliś

428. **О связях между решениями обобщенного волнового уравнения и обобщенного уравнения теплопроводности. О л е в с к и й М. Н.**, Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 1, 21—24

Пусть

$$L(x,t,u,a,b)\equiv Au-\partial^2u/\partial t^2-at^{-1}\,\partial u/\partial t-bu,$$

где A — произвольный линейный дифференциально-разностный оператор с коэффициентами, зависящими от координат точки $x=(x_1,\dots,x_n)$, но не зависящими от t, $a\geqslant 0$ и b — постоянные. Установлена формула, выражающая решение задачи

$$L(x,t,u,a,b)=0;\quad u|_{t=0}=f(x),\ \partial u/\partial t|_{t=0}=0$$

через решение уравнения $L(x,t,u,a_1,b_1)=0$ при $a\geqslant a_1>0$, удовлетворяющее тем же начальным данным. Аналогичный результат получен также и для несколько более общего уравнения

$$Av-v_t-a\alpha\operatorname{cth}\alpha t\,v_t-bv=0,\ a\geqslant 0$$

с начальными данными указанного выше вида. Кроме того, через решение u задачи $L(x,t,u,a,0)=0$, $u|_{t=0}=f(x)$, $u_t|_{t=0}=0$, выражается решение уравнения $Aw=w_t$, удовлетворяющее условию $w|_{t=0}=f(x)$. Указаны некоторые применения полученных общих результатов к конкретным задачам.

Повидимому, автору не было известно, что аналогичные формулы, связывающие между собой решения уравнений $Au-u_{tt}-bu=0$ и $Au-u_{tt}=0$, были установлены референтом (Сообщ. АН Груз. ССР, 1943, 4, № 9, 843—852; № 10, 941—950) и были указаны их применения к задаче Коши и краевым задачам.

И. Н. Векуа

429. **Формулы решения задачи Коши для некоторых дифференциально-разностных уравнений. Б а с с Г. И.**, Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 4, 613—616

Методом Фурье найдено явное решение задачи Коши для дифференциально-разностного уравнения

$$\partial u(x,t)/\partial t=\alpha(t)\,\Delta^l u(x,t)/h^l,\ u(x,0)=u_0(x) \quad (1)$$

($-\infty<x<\infty$, $|t|\leqslant T<\infty$, $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+h/2)-\varphi(x-h/2)$, $\alpha(t)$ — непрерывная функция). Для $l=2r$ решение имеет вид

$$u=\frac{1}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_0(x+kh)\int_0^\pi\exp\left[\left(-4\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^r\beta\right]\cos k\varphi\,d\varphi,$$

где $\beta=h^{-2r}\int_0^t\alpha(\tau)\,d\tau$. Для $l=2r+1$

$$u=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}u_0(x+kh)\int_0^{2\pi}\exp\{\beta_1(2i\sin\varphi)^{2r+1}-ik\varphi\}\,d\varphi,$$

где $\beta_1=(2h)^{-2r-1}\int_0^t\alpha(\tau)\,d\tau$. Вопрос о единственности полученного решения изложен автором неточно. Сославшись на результат Б. Л. Гуревича (РЖМат, 1955, 5806), автор утверждает, что задача Коши для (1) имеет единственное решение, если начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x)|\leqslant Ce^{\varepsilon|x|\ln(1+|x|)}. \qquad (2)$$

У Б. Л. Гуревича неравенство (2) должно выполняться при всех достаточно малых ε, т. е. ε нельзя фиксировать, что не оговорено автором. При выполнении (2)

результат Б. Л. Гуревича устанавливает единственность решения задачи только в классе функций, удовлетворяющих неравенству

$$|u(x,t)| \leqslant Ae^{\varepsilon|x|\ln(1+|x|)}, \quad |t| \leqslant T,$$

для любых как угодно малых ε. Отметим, что в действительности, как это следует из работы референта (РЖМат, 1954, 3457), найденное автором решение задачи (1) будет единственно в классе функций

$$|u(x,t)| \leqslant A\exp\{(1-\varepsilon)|x|h^{-r}\ln(1+|x|)\}, \quad r=[l/2] \qquad (3)$$

($\varepsilon > 0$ — любая фиксированная постоянная). Если же в условии (3) ε заменено на $-\varepsilon$, то решение задачи уже не будет единственно (РЖМат, 1954 5258). Наконец, заметим, что явное решение задачи Коши для разностного аналога уравнения Шредингера $\partial u/\partial t = i\Delta^2 u/h^2$, приводимое автором, содержится в явном решении задачи Коши для системы $\partial u(x,t)/\partial t = \sum_{\alpha=-k}^{k} C_\alpha u(x+\alpha h, t)$, $u(x,0)=\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, полученном референтом (РЖМат, 1954, 3999).

Л. И. Камынин

430. Тождества, приводящие к решениям линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Дюран (Identités conduisant aux solutions des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants. Durand Émile), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 4, 361—411 (франц.)

Установлены некоторые интегральные тождества, которые имеют применения к теории уравнений в частных производных.

В первой части доказывается тождество

$$\varepsilon\Phi(x_j) = \left[\sum_{j=1}^{n}\partial j^2 - \lambda^2\right]\underbrace{\int\cdots\int}_{n}\Phi(x'_j)\,G_n(x_j, x'_j)\,dV'_n, \qquad (1)$$

где $G_n(x_j, x'_j) = -(2\pi)^{-1}(\lambda/2\pi r)^{(n-2)/2}K_{(n-2)/2}(\lambda r)$, множитель $\varepsilon = 1, 1/2, 0$ соответственно для внутренней, граничной и внешней точки области интегрирования, $\partial_j = \partial/\partial x_j$, через x_j обозначена точка $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Из (1) получается соответствующее тождество для оператора $\Sigma\,\partial_j^2 + \lambda^2$ заменой λ на $\pm i\lambda$.

При помощи (1) получается вид решений уравнений $[\Sigma\,\partial_j^2 \pm \lambda^2]\,\psi(x_j) = f(x_j)$, принимающих вместе с нормальной производной заданные значения на границе S_n области V_n.

Рассматривается система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\partial_k\psi(x_j) = f(x_j),$$

где α_k — матрицы n-го порядка, удовлетворяющие условию: $\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\alpha_0$, α_0 — единичная матрица, ψ и f — вектор-функции n измерений. Для нее имеет место тождество

$$\varepsilon\psi(x_j) = \left[\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\partial_l\right]\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\partial_k\right]\int_{V_n}G_n\psi\,dV'_n =$$

$$= \left[\sum_{l=1}^{n}\alpha_l\partial_l\right]\left\{\int_{V_n}fG_n\,dV'_n - \int_{S_n}\psi(x'_j)\,G_n\left[\sum n_k\alpha_k\right]dS'_n\right\},$$

где n_k — направляющие косинусы.

Во второй части доказываются некоторые другие тождества для гиперболических операторов, которые применяются к решению задачи Коши и к выводу обобщенной формулы Кирхгофа. Эти формулы имеют то преимущество, что они не нуждаются во введении символических множителей, как это делается, например, в формуле Адамара.

В третьей части устанавливается тождество для параболического оператора $\lambda\partial_t - \Sigma_{j=1}^{n}\partial_j^2$, при помощи которого изучается уравнение

$$L\varphi \equiv \left(\mu^2 + \lambda\partial_t - \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\right)\varphi = f.$$

Строится решение, когда на поверхности задана φ и ее частные производные. З. И. Халилов

431. Задача с начальными условиями на характеристической поверхности для волнового уравнения и метод Римана. Протер (The characteristic initial value problem for the wave equation and Riemann's method. Protter M. H.), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 10, 702—705 (англ.)

В области D, ограниченной конусом $x^2+y^2=(z-1)^2$ и плоскостью $z=0$, ищется интеграл волнового уравнения $Lu \equiv u_{xx}+u_{yy}-u_{zz}=0$, принимающий заданное значение $\psi(x,y)$ на ограничивающей эту область части поверхности конуса. Вводится оператор $Mv \equiv v_{\alpha\beta} + (v_\alpha - v_\beta)/2(\alpha-\beta)$, где криволинейные координаты α, β, φ задаются уравнениями $x = {}^1/_2(\alpha-\beta)\cos\varphi$, $y = {}^1/_2(\alpha-\beta)\sin\varphi$, $z = {}^1/_2(\alpha+\beta)$. Устанавливается тождество

$$\int\int_D[(v_\beta - v_\alpha)\,Lu - (u_\beta - u_\alpha)\,Mv]\,d\alpha\,d\beta\,d\varphi =$$

$$= \int\int_B[u_\beta v_\beta d\beta\,d\varphi - u_\alpha v_\alpha d\alpha\,d\varphi + u_\varphi(\alpha-\beta)^{-2}(v_\alpha - v_\beta)d\alpha\,d\beta] \qquad (1)$$

(B — граница D). Область, заключенная между нижней полостью конуса $x^2+y^2=(z-1)^2$ и верхней полостью конуса $x^2+y^2=(z-z_0)^2$ ($z_0<1$), переходит в бесконечную трехгранную призму в пространстве α, β, φ; часть этой призмы, ограниченная плоскостями $\varphi=0$ и $\varphi=2\pi$, принимается за D. (1) применяется к искомой функции u и к функции $v = -(\alpha+\beta) + 2(\alpha-z_0)^{1/2}(\beta-z_0)^{1/2}$, которая удовлетворяет уравнению $Mv=0$ и краевым условиям $v_\alpha|_{\beta=z_0}=1$, $v_\alpha|_{\alpha=\beta} = v_\beta|_{\alpha=\beta} = 0$. Это приводит к формуле

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\psi]_{\alpha=1,\,\beta=z_0}\,d\varphi -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{z_0}^{1}[\psi_\beta]_{\alpha=1}\left[\left(\frac{1-z_0}{\beta-z_0}\right)^{1/2}-1\right]d\beta\,d\psi,$$

определяющей решение задачи. С. Г. Михлин

432. О задаче Коши для уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными. Бертолини (Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti. Bertolini Fernando), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, 15, № 6, 368—375; 1954, 16, № 1, 10—17 (итал.)

В первой работе рассматривается ограниченная односвязная область D плоскости xy; ее граница FD — спрямляемая кривая, почти каждая точка которой принадлежит дуге, имеющей непрерывную кривизну, и является центром отрезка нормали, одна часть которой находится внутри, а другая — вне D; n_P — внутренняя нормаль к FD в точке P. FD состоит из C' и C''; C'' имеет ν составляющих с начальными и конечными точками P'_i, P''_i, соответственно. На C' заданы абсолютно непрерывная функция $F(P)$ с производной из L_2 и функция $G(P) \in L_2$. $[f]_D$ — класс непрерывных в D гармонических в D — FD функций таких, что на FD функция $f(P) \in L_2$ абсолютно непрерывна и для почти

всех $P \in FD$ существует конечный $\lim_{n_P \ni Q \to P} \partial f(Q)/\partial n_P \in L_2(FD)$.

Пусть $\{u_k(P)\} \subset [f]_D$, где $u_k(P)$, $k = 1,2,\ldots,$ — гармонические в D; $v_k(P)$, $k = 1,2,\ldots,$ — соответствующие сопряженные гармонические. $U_k(P)$, $P \in C''$, определяется из условий: $\partial U_k(P)/\partial s = u_k(P)$, $U_k(P_i') = 0$, $i = 1,\ldots,\nu$. $w_k(P)$ — вектор-функции с нормальной и касательной составляющими $u_k(P)$ и $v_k(P)$.

Чтобы существовала функция $f \in [f]_D$, удовлетворяющая условиям $f = F$ на C', $\lim_{n_P \ni Q \to P} \partial f(Q)/\partial n_P = G(P)$ почти всюду на C', необходимо и достаточно, чтобы ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k w_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$ сходились в среднем на C'' и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k U_k$ сходился в точках P_i'' к величине $F(P_i'') - F(P_i')$. Здесь $a_k = \int_{C'} [(\partial v_k/\partial n) - v_k G]\, ds + \sum_{i=1}^{\nu} [F(P_i'')\, u_k(P_i'') - F(P_i')\, u_k(P_i')]$.

Приведена формула для решения.

Во второй работе рассматривается связная область A, замыкание которой $D = A + FD$ состоит из μ составляющих $D_1,\ldots,D_\mu$, не имеющих общих внутренних точек и удовлетворяющих вместе с D приведенным выше условиям. $n_Q^{(j)}$ — внутренняя нормаль к FD_j, $[f]_D$ — множество функций f, непрерывных в D и гармонических в A. Функции $G_j(P)$ почти всюду непрерывны и суммируемы на FD_j. Пусть почти всюду существует $\lim_{n_Q^{(j)} \ni Q \to P} \partial f(Q)/\partial n_P^{(j)}$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{2\pi} \int_{FD_j} \left[f(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q^{(j)}} \ln \overline{PQ} - \ln \overline{PQ}\, G_j(Q) \right] ds(Q) = \begin{cases} f(P) & (1) \\ 0 & (2) \end{cases}$$

где $P \in A - \sum_{j=1}^{\mu} FD_j$ в случае (1) и $P \in FD$ в случае (2).

Пусть $[f]_{D,\varphi}$ — класс функций, удовлетворяющих в A уравнению $\Delta f = \varphi$ ($\varphi(P)$ непрерывна в смысле Гельдера) и подчиненных тем же условиям гладкости, что и функции из $[f]_D$. Для функций из $[f]_{D,\varphi}$ рассматривается задача, аналогичная рассмотренной выше, и доказываются соответствующие теоремы.

Рассматривается также случай бесконечной области. Приведено два примера. З. И. Халилов

433. О проблеме типа римановой поверхности с приложением к дифференциальным уравнениям в частных производных эллиптического типа. Финн (On a problem of type, with application to elliptic partial differential equations. Finn Robert), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 6, 789—799 (англ.)

Пусть $\varphi(x,y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная на всей плоскости xy. Известно, что поверхность $z = \varphi(x,y)$ допускает конформное отображение на односвязную область T плоскости. Для некоторых частных случаев установлено, что T покрывает всю плоскость, но неизвестно, существует ли поверхность $z = \varphi(x,y)$, для которой T содержит конечные граничные точки.

Автор рассматривает поверхности $z = \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y)$ — решение вариационной задачи

$$\delta \iint [F(p^2+q^2)\, dx\, dy = 0, \quad p = \varphi_x, \quad q = \varphi_y, \qquad (1)$$

здесь а) $F_{pp} F_{qq} - F_{qp}^2 > 0$, б) $1/K \leqslant FM \leqslant K$, $M = F - 2(p^2+q^2)F'$.

Доказывается, что поверхность $z = \varphi$ параболического типа, т. е. при конформном отображении на плоскость T является всей плоскостью.

Доказывается теорема: Если $\varphi(x,y)$ — решение уравнения

$$a_1(p,q)\varphi_{xx} + 2b(p,q)\varphi_{xy} + c(p,q)\varphi_{yy} = 0, \quad ac - b^2 = 1,$$

причем для этого решения выражение

$$R = [(1+p^2)a + 2pqb + (1+q^2)c](1+p^2+q^2)^{-1/2} \qquad (2)$$

равномерно ограничено на всей плоскости и $z = \varphi(x,y)$ параболического типа, то φ — линейная функция. Как следствие получается, что всякое решение $\varphi(x,y)$ вариационной задачи (1) есть линейная функция, если F удовлетворяет условию а) для всех p, q, условию б) для данного решения и условию ограниченности выражения (2) (соответствующего уравнению Эйлера — Лагранжа вариационной задачи (1)). А. В. Погорелов

434. Логарифмическая производная ψ-функции. Суонн (The logarithmic derivative of the ψ function. Swann W. F. G.), J. Franklin Inst., 1954, 258, № 6, 518—520 (англ.)

Доказывается, что в сферических координатах r, ϑ, φ решения вида $\psi = R(r)\,\Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$ уравнения

$$\nabla^2\psi + \tfrac{8\pi^2 m}{h^2}\{E - V(r)\}\,\Psi = 0$$

определяются с точностью до произвольной постоянной заданием логарифмической производной R'/R при $r = r_0$. В. И. Левин

435. О функциях Грина для цилиндра и шара. Франц (Über die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel. Franz Walter), Z. Naturforsch., 1954, 9a, № 9, 705—716 (нем.)

Функция Грина для неограниченного цилиндра радиуса a представляется в виде

$$G(\rho_1,\rho_2,\varphi) = \frac{i}{4} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} H_m^{(1)}(k\rho_2)\,(J_m(k\rho_1) - H_1) \qquad (1)$$

Здесь $H_1 = \Omega(J_m(ka)\,H_m^{(1)}(k\rho_1))/\Omega H_m^{(1)}(ka)$, Ω — дифференциальный оператор, выражающий однородные линейные граничные условия; например, $\Omega = 1$ для граничного условия 1-го рода и $\Omega(x)F(x) = dF/dx$ для граничного условия 2-го рода. Правая часть разложения (1) представляется контурным интегралом, взятым по переменной ν

$$G = -\frac{1}{4}\int_D d\nu \cos\nu(\varphi - \pi)\, H_\nu^{(1)}(k\rho_2) H_2 [\sin\nu\pi\Omega H_\nu^{(1)}(ka)]^{-1},$$

где

$$H_2' = \Omega H_\nu^{(1)}(ka)\, J_\nu(k\rho_1) - \Omega J_\nu(ka)\, H_\nu^{(1)}(k\rho_1);$$

подобрав соответствующим образом контур интегрирования D, автор представляет G в виде суммы вычетов

$$G = \frac{\overrightarrow{i\pi}}{4} \sum_l \frac{\cos\nu_l(\varphi-\pi)\, H_{\nu_l}^{(1)}(k\rho_1)\, H_{\nu_l}^{(1)}(k\rho_2)}{\sin\nu_l\pi \dfrac{\partial}{\partial\nu}\Omega H_\nu^{(1)}(ka)\Big|_{\nu_l}} \Omega H_{\nu_l}^{(2)}(ka).$$

Суммирование производится по корням ганкелевской функции $H_\nu^{(1)}$. Аналогичным путем представляется функция Грина для шара:

$$\frac{ik}{8} \sum_l \frac{(2\mu_l+1)\, P_{\mu_l}(-\cos\vartheta)\, \zeta_{\mu_l}^{(1)}(kr_1)\, \zeta_{\mu_l}^{(1)}(kr_2)}{\sin\mu_l\pi \cdot \dfrac{\partial}{\partial\mu}\Omega\zeta_\mu^{(1)}(ka)\Big|_{\mu_l}} \Omega\zeta_{\mu_l}^{(2)}(ka).$$

где $\zeta_n^{(1)}(x) = \sqrt{\pi/2x}\, H_{n+1/2}^{(1)}(x)$. Н. С. Кошляков

436. Об одном случае гармонического продолжения в большом. Штейнер (Über einen Fall harmonischer Fortsetzung im Grossen. Steiner Antonio), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 2, 198—213 (нем.)

В полуплоскости $y>0$ задана гармоническая функция $u(x,y)$, удовлетворяющая граничному условию $u(x,0)=g(x)$, $g(x)$ ограничена, непрерывна и существует конечный предел $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^{-1}[g(x)-g(0)]$. Ищутся условия для $g(x)$, при которых $u(x,y)$ продолжима как гармоническая функция в полосу $0>y>-D$, где $D>0$ — заданное число. Пусть

$$\gamma_1(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)\,\frac{\sin\alpha t}{t}\,dt;$$

$$\gamma_2(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{g}(t)\,\frac{1-\cos\alpha t}{t}\,dt.$$

Доказывается, что для возможности вышеуказанного продолжения необходимо и достаточно, чтобы для каждого положительного $d<D$ выполнялись условия: 1) функции $e^{\alpha d}\gamma_1(\alpha)$ и $e^{\alpha d}\gamma_2(\alpha)$ принадлежат $L_2(0,\infty)$; 2) функция $v(x,-d)=\sqrt{2/\pi}\int_0^{\infty} e^{\alpha d}[\gamma_1(\alpha)\cos\alpha x+\gamma_2(\alpha)\sin\alpha x]\,d\alpha$ имеет порядок $O(|x|^{-1})$. Доказательство основывается на применении преобразования Фурье—Планшереля к формуле, дающей решение задачи Дирихле для полуплоскости $y>-d$. В формулировке основного результата (условие F_2 на стр. 208) опечатка: интегрирование надо вести по α, а не по x.

В. К. Иванов

437. О смешанных краевых задачах для линейных уравнений второго порядка эллиптического типа. Маджинес (Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico. Magenes Enrico), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1954, 8, № 1—2, 93—120 (итал.)

Рассматривается эллиптическое уравнение

$$\sum_{h,k=1}^{2} a_{hk}\frac{\partial^2 u}{\partial x_h\partial x_k}+\sum_{h=1}^{2} b_h\frac{\partial u}{\partial x_h}+cu=0\quad(c\leqslant 0)\quad(1)$$

в замкнутой области D, ограниченной замкнутой дважды гладкой линией F. Коэффициенты уравнения считаются достаточно правильными (например, можно требовать наличия всех производных вида $\partial^2 a_{hk}/\partial x_m\partial x_n$ и $\partial b_h/\partial x_m$, удовлетворяющих вместе с c условию Гёльдера в D). Линия F двумя точками разбита на дуги (к которым концы не причисляются) F_1 и F_2. «Смешанная краевая задача» состоит в задании для искомого решения значения u на F_1 и $du/d\nu$ (производной по конормали) на F_2; если применить решение обычной задачи Неймана, то можно ограничиться случаем (как и принято автором) $du/d\nu=0$ на F_2. Значения u на F_1 достигаются в среднем, для уточнения чего осуществляется следующая конструкция. В некоторой окрестности $\overline{F}_1$ в D вводятся криволинейные координаты r,t ($0\leqslant r\leqslant r_0$, $t_1\leqslant t\leqslant t_2$), причем производные $\partial x_i/\partial r$, $\partial x_i/\partial t$ непрерывны и $\partial(x_1,x_2)/\partial(r,t)\neq 0$, отрезок координатной линии $r=\text{const}$ ($t_1\leqslant t\leqslant t_2$) при $r=0$ совпадает с $\overline{F}_1$, а при $0<r\leqslant r_0$ опирается концами на F_2 и направлен там по конормали к F. Кроме того, постулируется существование в указанном криволинейном координатном четырехугольнике некоторой «весовой» функции $P(x_1,x_2)$, удовлетворяющей ряду условий; это существование гарантируется в достаточно широком классе случаев, что, впрочем, автор подробно не исследует. Решение поставленной краевой задачи ищется в классе функций, непрерывно дифференцируемых в $D-\overline{F}_1$ и дважды непрерывно дифференцируемых в $D-F$, для которых $du/d\nu=0$ на F_2 и существует предел (в смысле среднего квадратичного уклонения) $u(x_1(r,t),x_2(r,t))$ ($t_1\leqslant t\leqslant t_2$) при $r\to+0$; этот предел $\mu(t)$ и полагается по определению равным краевому значению u на F_1. Доказывается существование и единственность решения поставленной краевой задачи для случая произвольной квадратично-суммируемой $\mu(t)$. Доказательство единственности опирается на основное интегральное тождество, а доказательство существования — на следующую теорему полноты, аналогичную одной теореме Фикера: существует последовательность $\{w_k(P)\}$ ($k=1,2\ldots$) решений уравнения (1), гладких в D и дважды гладких в $D-F$, для которых последовательность функций $\{\omega_k(P)\}$ ($\omega_k=w_k$ ($P\in F_1$), $\omega_k=-dw_k/d\nu$ ($P\in F_2$)) полна в $L_2(F)$. Доказывается, что если $\mu(t)$ непрерывна при $t_1<t<t_2$, то и построенное решение $u(x_1,x_2)$ непрерывно на F_1, а потому принимает заданные на F_1 значения в обычном смысле. Автор указывает, что метод исследования задачи полностью переносится на случай уравнений аналогичного вида с любым числом аргументов, а также на случаи, когда область D многосвязна, множества F_1 и F_2 состоят из любого конечного числа компонент связности и $du/d\nu$ заменено на $du/d\nu+hu$ ($h\leqslant 0$). Имеется обзор современного состояния вопроса и подробная библиография (см., в частности, РЖМат, 1954, 5577).

А. Д. Мышкис

438. Одна теорема о напряженности потенциальных полей. Эртель (Ein Theorem über die Feldstärke in Potentialfeldern. Ertel Hans), Sitzungsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. Kl. Math. und allgem. Naturwiss., 1954, № 2, 1—10 (нем.)

Пусть лапласиан функции $\Phi(x)$ ($x=(x_1,x_2,x_3)$) постоянен в некоторой области; $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — главные радиусы кривизны поверхности уровня $\Phi(x)$, $R_3(x)$ — радиус кривизны векторной линии $\operatorname{grad}\Phi(x)$; $F(x)=|\operatorname{grad}\Phi(x)|$. Доказывается, что $F^{-1}\Delta F=R_1^{-1}+R_2^{-1}+R_3^{-1}$.

Х. Л. Смолицкий

439. Об одной задаче на собственные значения. Манарези (Un problema di autovalori. Manaresi Fabio), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 2, 343—351 (итал.)

Задача о собственных значениях ставится для уравнения

$$(\vartheta u_{xy}-\lambda\sigma u)_{xy}-(ru_x+su_y-\lambda\alpha u)_x-(tu_y+su_x-\lambda\beta u)_y-$$
$$-\lambda(\sigma u_{xy}+\alpha u_x+\beta u_y+qu)+pu=0.$$

Искомая функция должна обращаться в нуль на контуре прямоугольника R ($a_1\leqslant x\leqslant a_2$; $b_1\leqslant y\leqslant b_2$); коэффициенты уравнения удовлетворяют определенным условиям регулярности, $\vartheta>0$, $p\geqslant 0$, $q\geqslant 0$, $r\geqslant 0$, $t\geqslant 0$, $rt-s^2\geqslant 0$. Основные результаты: 1. Собственные числа задачи вещественны и не равны нулю. 2. Если на множестве Γ функций, дважды непрерывно дифференцируемых в прямоугольнике R и равных нулю на его границе,

$$\iint_R(2\sigma u_{xy}+2\alpha u_x+2\beta u_y+qu)\,u\,dx\,dy\geqslant 0\ (\leqslant 0),\quad(1)$$

то существует последовательность возрастающих положительных (убывающих отрицательных) собственных чисел задачи; отрицательных (положительных) собственных чисел в этом случае не существует. Если (1) принимает на множестве Г значения разных знаков, то существуют последовательности как положительных, так и отрицательных собственных чисел. 3. Построено интегральное уравнение, которому удовлетворяют собственные функции задачи. С. Г. Михлин

440. О разложении по собственным функциям оператора Лапласа. Левитан Б. М., Матем. сб., 1954, 35, № 2, 267—316

Подробные доказательства результатов автора, опубликованных ранее (РЖМат, 1953, 753).

Р. А. Александрян

441. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, x_3)\} u = 0$. Левитан Б. М., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 2, 179—182

Рассматривается задача на собственные значения

$$\Delta u = [q - \lambda] u, \quad \partial u / \partial n |_\Gamma = 0$$

в односвязной ограниченной области D трехмерного пространства с границей Г, $q(x_1, x_2, x_3)$ вещественна и непрерывна в $D + \Gamma$.

Пусть $\omega_k(P)$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda_k = \mu_k^2$. Утверждается, что для любой подобласти D_ε существует $C_\varepsilon = \text{const}$ такая, что для всех $a > 0$ $\sum_{a < \mu_k < a+1} \omega_k^2(P) < C_\varepsilon a^2$, $P \in D_\varepsilon$. Пусть $\theta(P, Q; \mu) = \sum_{\mu_k < \mu} \omega_k(P)\, \omega_k(Q)$ — спектральная функция задачи, а $\theta^*(P, Q; \mu) = \mu^{3/2} r^{-3/2} (J_{3/2}\mu r)$, где $r = |PQ|$, $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка p. Тогда для $P, Q \in D_\varepsilon$ существует $C_\varepsilon = \text{const}$ такое, что $|\theta(P, P; \mu) - \theta^*(P, Q; \mu)| < C_\varepsilon \mu^2$. Пусть

$$\theta_s(P, Q; \mu) = \Gamma^{-1}(s+1) \sum_{\mu_k < \mu} (1 - \mu_k^2 / \mu^2)^s\, \omega_k(P) \omega_k(Q),$$

$s = 2 + \alpha$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Существует $C_\varepsilon = \text{const}$ такое, что для $P \in D_\varepsilon$ выполняется

$$\left| \theta_s(P, P; \mu) - \mu^3 / 2^3 \Pi^{3/2} \Gamma\left(s + \frac{5}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - \mu q(P) / 2^2 \Pi \Gamma\left(s + \frac{3}{2}\right) \right| < \frac{C_\varepsilon}{\mu^\alpha}.$$

При помощи этих асимптотических формул автор сравнивает средние по Риссу разложения $f(a) \in L_2(D)$ по собственным функциям, с соответствующими средними по Риссу разложения $f(Q)$ в обычный интеграл Фурье ($f(Q) \equiv 0$ вне D). Утверждается, что при $\mu \to \infty$ разность между указанными средними по Риссу порядка единица (а в случае двух переменных — порядка половина) стремится к нулю во всяком случае в любой внутренней точке, в окрестности которой $f(Q)$ ограничена. В асимптотических формулах автора константы C_ε не зависят от размеров D, поэтому все результаты распространимы на случай бесконечного пространства при любом характере спектра. Отсюда, в частности, вытекает усиление одного результата Титчмарша (Titchmarsh, Proc. London Math. Soc., 1951, (3), 1, 1—27). Кроме того, утверждается, что существует $C_\varepsilon = \text{const}$ такое, что для $P \in D_\varepsilon$ и $\alpha > 0$

$$\left| \int_D [\theta_{1+\alpha}(P, Q; \mu) - \theta^*_{1+\alpha}(P, Q; \mu)] f(Q)\, dQ \right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} C_\varepsilon \mu^{-\alpha}, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1/2 \\ C_\varepsilon \mu^{-1/2}, & \alpha \geqslant 1/2 . \end{cases}$$

Утверждается, что результаты распространимы также на случай общего эллиптического самосопряженного уравнения второго порядка с тремя переменными.

Р. А. Александрян

442. О разложении по собственным функциям уравнения $\Delta u + \{\lambda - q(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} u = 0$. Левитан Б. М., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 6, 961—964

Для случая пространства произвольного числа измерений формулируются результаты, аналогичные ранее полученным (реф. 441). Приведены асимптотические формулы для спектральной функции как в случае ограниченной области D (при более общем граничном условии), так и для бесконечного пространства при любой природе спектра, без ограничения на поведение функции $q(x_1, \ldots, x_n)$ на бесконечности.

Исследовано также поведение средних по Риссу разложения в ряд Фурье по собственным функциям изучаемого оператора. Утверждается, например, что если для $f(x)$ операторы $L^k f$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ $(L^0 f = f$; $L^1 f = \Delta f - qf$, $L^{r+1} f = L^1(L^r f))$ имеют смысл и удовлетворяют граничному условию (реф. 441), а $L^p f \in L_2(D)$, где $p \leqslant [(n-1)/2] \leqslant (n-1)/2 = r$, $\delta > 0$, то $\lim_{\mu \to \infty} R_{r-2p+\delta}(x; \mu) = f(x)$, где $R_s(x; \mu) = \Gamma^{-1}(s+1) \sum_{\mu_k < \mu} (1 - \mu_k^2 / \mu^2)^s\, c_k \omega_k(x)$, а $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — внутренняя точка непрерывности $f(x)$.

Сформулированы также результаты в случае бесконечного пространства и наличия отрицательной части спектра. Указана возможность перенесения результатов на случай общего самосопряженного эллиптического оператора.

Доказательства отсутствуют. Р. А. Александрян

443. О собственных значениях и собственных функциях колебаний цилиндрической оболочки. Терсенов С. А., Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 9, 575—581

В двумерной ограниченной области D с кусочно-гладкой границей L рассматривается задача о собственных значениях системы уравнений

$$AU + \lambda U = 0. \qquad (1)$$

где $U = U(u, v, w)$ — вектор-функция в D, A — матрица с элементами:

$$a_{11} = b\Delta + c \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad a_{22} = b\Delta + c \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$a_{33} = -\frac{h^2(b+c)}{3} \Delta^2 - \frac{b+c}{a^2} - y \frac{h^2}{3} \Delta;$$

$$a_{12} = a_{21} = c \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \quad a_{13} = -a_{31} = \frac{c-b}{a} \frac{\partial}{\partial x};$$

$$a_{23} = -a_{32} = \frac{c+b}{a} \frac{\partial}{\partial y},$$

a, b, c, h — постоянные. Граничные условия — либо $U|_L = \partial w / \partial x|_L = \partial w / \partial y|_L = 0$, либо условия, соответствующие свободной границе. Автор сводит задачу к вариационной проблеме и, применяя метод С. Л. Соболева (Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950, гл. 2, § 16), устанавливает положительность и дискретность спектра, а также теорему о разложении по собственным функциям. Построено мат-

ричное фундаментальное решение системы (1), при помощи которого показано, что собственные функции имеют внутри D производные всех порядков.

М. Ш. Бирман

444. Об обобщенном в смысле Винера решении первой краевой задачи в параболическом случае. Пини (Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico. Pini Bruno), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 2, 422—434 (итал.)

Метод Винера, известный в теории задачи Дирихле для уравнения Лапласа (см., например, М. В. Келдыш, Успехи матем. наук, 1940, 8, 171—178), распространяется на решение указанной в заглавии задачи для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} - u_y = 0. \qquad (1)$$

Рассматривается область D, ограниченная характеристиками $y = a$, $y = b\,(a < b)$ и непрерывными кривыми $x = \chi_1(y)$, $x = \chi_2(y)$, $\chi_1(y) < \chi_2(y)$. Часть границы этой области, состоящей из отрезка характеристики $y = a$ и кривых $\chi_1(y)$ и $\chi_2(y)$, $a \leqslant y \leqslant b$, обозначается через S. В $D \setminus S$ ищется решение $u(P)$ уравнения (1), принимающее на S непрерывные значения $f(P)$. D называется нормальной, если $\chi_1(y)$ и $\chi_2(y)$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $> 1/2$. Известно, что для таких областей задача однозначно разрешима.

Используя явное выражение решения задачи в случае прямоугольного контура S, автор устанавливает для решений (1) вторую теорему Гарнака: Если монотонная последовательность $\{u_n(P)\}$ решений (1) в области D сходится в точке $(x_0, y_0) \in D \setminus S$, тогда она сходится в любой нормальной области $D' \subset D \cap \{y \leqslant y_0\}$.

Для последовательности нормальных областей D_n ($\overline{D}_n \subset \overline{D}_{n+1} \setminus \overline{S}_{n+1}$, $\sum D_n = D$) строятся соответствующие им функции $u_n(P)$, предел которых $u(P)$ называется обобщенным решением задачи. Устанавливается независимость этого предела от выбора D_n и характера продолжения граничной функции $f(P)$ внутрь D. Доказывается, что $u(P) \to f(P)$ в каждой регулярной точке S. В заключение приводится новый критерий регулярности.

Заметим, что автору, как видно, неизвестны простые критерии регулярности, приведенные И. Г. Петровским во втором издании книги «Лекции об уравнениях с частными производными». Дополнение, стр. 335—349.

С. Д. Эйдельман

445. Некоторые теоремы аппроксимации, единственности и существования для уравнений в частных производных. Мейман Н. Н., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 207

446 К. Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики. Гюнтер Н. М., М., Гостехиздат, 1953, 416 стр., 13 р. 15 к.

Перевод книги Н. М. Гюнтера «La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique» Par s, Gauthier — Villars, (1934, 303 pp., avec 49 fig.). Цель ее состояла в уточнении и более детальном изучении свойств различных потенциалов и связанных с ними трех основных краевых задач (внешних и внутренних) для уравнений Лапласа и Пуассона в случае односвязных и многосвязных областей. В гл. 1,2 исследованы свойства потенциалов простого и двойного слоя и ньютонова потенциала. Гл. 3 посвящена разысканию решений задач Неймана и Робэна в виде потенциалов простого слоя. В гл. 4, используя свойства потенциалов двойного слоя, автор решает задачу Дирихле. В гл. 5 строятся функции Грина для всех трех краевых задач (задачи Дирихле, Неймана и краевого условия $\partial u / \partial n + hu|_s = 0$), при помощи них эти задачи решаются для уравнений Лапласа и Пуассона. Исследуется задача о собственных значениях оператора Лапласа при перечисленных только что краевых условиях. В добавлении приводятся доказательства двух теорем Ляпунова о потенциалах простого и двойного слоев и некоторые предложения о существовании вторых и более высоких производных у этих потенциалов и ньютонова потенциала. Все рассмотрения ведутся в трехмерном евклидовом пространстве. Вводятся классы функций $H(l, A, \lambda)$ в области D. Функции $f \in H$ непрерывны вместе со своими производными до порядка l в D и удовлетворяют условиям $|D^p f| \leqslant A$, $0 \leqslant p \leqslant l$, $|D^l f(P) - D^l f(Q)| \leqslant A|PQ|^\lambda$, $0 < \lambda \leqslant 1$. Аналогично вводятся классы функций $H(l, A, \lambda)$ на поверхности S. Кроме того, через $Л_1$ обозначается класс поверхностей Ляпунова (замкнутых и ограниченных), а через $Л_k(B, \lambda)$ $(k \geqslant 1)$ — класс поверхностей Ляпунова, для которых функции $F(\xi, \eta) = \zeta$, определяющие уравнение поверхностей в местных координатах, принадлежат $H(k, B, \lambda)$. Так, для области, ограниченной лишь одной поверхностью Ляпунова S, получены следующие результаты. Область, лежащую внутри S, обозначим через D_i, а внешнюю через D_e, внешнюю нормаль к S — через n, $V[\mu]$ — потенциал простого слоя, $W[\mu]$ — двойного слоя и $P[\mu]$ — ньютонов потенциал с плотностью μ. 1) Если μ — непрерывна на S и $S \in Л_1$, то существуют на S предельные значения $W_i, W_\partial, dV_i/dn, dV_\partial/dn$ и прямые значения $\overline{W}$ и dV/dn, и между ними имеют место известные соотношения (формулы скачков). 2) Если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)$ $(k \geqslant 0)$ и $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на S $(0 \leqslant l \leqslant k+1)$, то $W[\mu] \in H(l, cA, \lambda')$ в D_i и в D_e, где λ' здесь и далее означает любое положительное число, меньшее λ, а c зависит лишь от B и λ'. 3) Если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)$ $(k \geqslant 0)$ и $\mu \in H(l, A, \lambda)$ на S $(0 \leqslant l \leqslant k)$, то $V[\mu] \in H(l+1, cA, \lambda')$ в D_i и D_e. Аналогичные теоремы установлены для прямых значений потенциала двойного слоя и значений dV/dn на S. Доказан ряд теорем о потенциалах с ограниченной суммируемой плотностью μ и с неограниченной суммируемой плотностью μ. Для ньютонова потенциала доказано, что 4) Если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)$, $\mu \in H(l, A, \lambda)$, где $0 \leqslant l \leqslant k$, то $P[\mu] \in H(l+2, cA, \lambda')$ в D_i и D_e. Проведены также исследования $P[\mu]$ для μ, не принадлежащих $H(l, A, \lambda)$; 5) Если D_i ограничена поверхностью Ляпунова S и если f есть непрерывная на S функция, удовлетворяющая условию $\int_S f dS = 0$, то существует гармоническая внутри D_i и непрерывная в D_i функция V, удовлетворяющая на S условию $dV_i/dn = f$. Эта функция представима потенциалом простого слоя $V[\mu]$ с непрерывной плотностью μ, которую можно вычислить из интегрального уравнения методом последовательных приближений. Функция V вычисляется с точностью до произвольного постоянного слагаемого, которое выбирается из условия $\int_{D_i} V d\omega = 0$; 6) Если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)$, а $f \in H(l, A, \lambda)$, $(k \geqslant 0, 0 \leqslant l \leqslant k)$, то решение внутренней задачи Неймана принадлежит $H(l+1, cA, \lambda')$ в D_i. Аналогичные свойства установлены для внешней задачи Неймана и для многосвязных областей. 7) Задача Дирихле однозначно разрешима для любой непрерывной функции f, причем решение внутренней задачи представимо потенциалом двойного слоя с непрерывной плотностью. 8) Если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)$ $(k \geqslant 0)$, $f \in H(l, A, \lambda)$ $(0 \leqslant l \leqslant k+1)$, то решение внутренней (внешней) задачи Дирихле $\in H(l, cA, \lambda')$ в D_i (в D_e). Строятся функции Грина для трех краевых задач, при помощи них даются

решения этих задач для уравнений Лапласа и Пуассона. Так, например, показано, что 9) решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа при любой непрерывной функции f на $S \in Л$ может быть представлено в виде $u = -(4\pi)^{-1}\int_S f\,(\partial G_i/\partial n)\,ds$, где G — функция Грина, удовлетворяющая граничному условию $G|_s = 0$. Проведено исследование дифференциальных свойств решений краевых задач для уравнения Пуассона в замкнутой области $\overline{D}$. Например. 10) если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)\,(k \geqslant 0)$ и $\varphi \in H(l, A, \lambda)$ в $D_i\,(0 \leqslant l \leqslant k)$, то решение уравнения Пуассона при условиях $u|_s = 0$ или $du/dn|_s = 0$ принадлежит к $H(l+2, cA, \lambda')$, если $l < k$, и к $H(k+1, cA, \lambda')$, если $l = k$. Рассмотрены однородные краевые задачи для уравнения $\Delta u - L(x)\,u = k(x)$ и задачи о собственных значениях для уравнения $\Delta u + \lambda L(x)\,u = 0$, где $L(x)$ — заданная положительная функция. Для последней задачи доказывается наличие полной ортогональной с весом L системы фундаментальных функций и теорема разложения по ним (теорема Гильберта — Шмидта). Кроме того, доказано, что 11) Если $S \in Л_{k+1}(B, \lambda)\,(k \geqslant 0)$ и $L \in H(k, A, \lambda)$, то фундаментальные функции $V_m \in H(k+1, cA, \lambda')$. В качестве приложений теоремы разложения по фундаментальным функциям рассмотрен вопрос о представимости решений смешанных задач для волнового уравнения и уравнения теплопроводности абсолютно и равномерно сходящимися рядами Фурье. Переводчик Х. Л. Смолицкий упростил доказательства некоторых теорем автора и добавил ряд более поздних исследований. Перечень этих изменений и дополнений дан в предисловии, написанном В. И. Смирновым и Х. Л. Смолицким. В конце дан биографический очерк об авторе, написанный В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым, и список его трудов.

О. А. Ладыженская

447 К. **Уравнения математической физики. Соболев** (Ecuatiile fizicii matematice. Sobolev S. L., Bucureşti, Ed. tehnica, 1955, 494 p., 19, 80 lei), Bul. bibliogr., 1955, A4, № 4, 10 (рум.)

448 Д. **Некоторые вопросы спектральной теории уравнений в частных разностях и частных производных. Березанский Ю. М.** Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

449. **К вопросу выбора параметров системы регулирования, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Крыжановский** (До питання вибору параметрів системи регулювання, що описується лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Крижановський О. М.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 1, 26—31 (укр.; резюме русс.)

Пусть

$$y_{\text{зад}}(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} A_{ij} t^j e^{-\beta_i t|},$$

где A_{ij}, β_i — в общем случае комплексные числа и $\lim_{t\to\infty} y_{\text{зад}}(t) = 0$. Описывается способ определения коэффициентов линейного дифференциального уравнения n-го порядка так, чтобы при заданных начальных условиях $y^{(k)}(0) = y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ его решение $y(t)$ наилучшим образом в метрике L_2 приближало $y_{\text{зад}}(t)$. Иные подходы к решению подобной задачи, играющей важную роль в теории автоматического регулирования, даны в работах А. А. Фельдбаума (Электричество, 1951, № 7) и А. А. Красовского (Основы автоматического регулирования. Теория, М., 1954).

Я. З. Цыпкин

450. **Математический метод анализа линейных систем. Рагаццини, Берген** (A mathematical technique for the analysis of linear systems. Ragazzini J. R., Bergen A. R.), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 11, 1645—1651 (англ.)

Описывается приближенный прием построения процесса, вызванного заданным внешним воздействием в системе автоматического регулирования, описываемой обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Путем включения в систему условного импульсного элемента и генератора треугольных импульсов рассматриваемая система непрерывного регулирования заменяется импульсной системой. При помощи преобразования Лапласа ступенчатой функции вычисляется «дискретное преобразование» $C^*(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + \ldots + c_n z^{-n}$ такой условной импульсной системы и показывается, как коэффициенты $c_k\,(k = 0, \ldots, n)$ могут быть подсчитаны по преобразованию Лапласа искомого решения исходной системы. Доказывается, что c_k приближенно равны значениям искомого решения в дискретные моменты времени. Приводится пример расчета системы второго порядка и высказываются некоторые соображения о точности предлагаемого метода.

Примечание референта: По рассматриваемому вопросу см. Красовский А. А., Поспелов Г. С., РЖМат, 1955, 968.

М. А. Айзерман

451. **Приближенное решение уравнений типа Гопфа—Винера с приложениями. Койтер** (Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. I. General theory. II A, B. Some plate bending problems and an example from hydrodynamics. Koiter W. T.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, B57, № 5, 558— 564; 565—574, 575—579 (англ.).

I. Рассматривается уравнение

$$\int_0^\infty m(\xi)\,h(x-\xi)\,d\xi = \varphi(x), \qquad (1)$$

где $h(x-\xi)$ — ядро, удовлетворяющее условию $e^{\lambda|x|}\,h(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ при всех $\lambda < b$; $\varphi(x)$ — заданная, $m(\xi)$ — искомая функции, причем $e^{-\lambda x} m(x)$, $e^{-\lambda x}\varphi(x) \in L(0, \infty)$ для всех $\lambda > c$, $0 < c < b$. Уравнения типа (1) могут быть решены в квадратурах (Рапопорт И. М., Сб. тр. Ин-та матем. АН УССР, 1949, № 12, 102—118). Автор предлагает метод приближенного решения (1). Вместо (1) рассматривается уравнение

$$\int_0^\infty m^*(\xi)\,h^*(x-\xi)\,d\xi = \varphi(x), \qquad (2)$$

где $h^*(x)$ — приближение ядра $h(x)$. Предполагается, что точное решение (2) может быть найдено. Доказывается, что если между преобразованиями Фурье $H(w)$ и $H^*(\omega)$ ядер $h(x)$ и $h^*(x)$ имеется зависимость $H(w) = H^*(w)\,e^{\varepsilon f^*(w)}$, где $f^*(w)$ — некоторая функция, аналитическая вместе с $H^*(w)$ в полосе, лежащей внутри полосы аналитичности функции $H(w)$, то при некоторых дополнительных условиях разность $m(x) - m^*(x)$ — малая величина порядка ε.

Рассматривается только случай, когда решение уравнения (1) единственно, условия, обеспечивающие его существование, не оговариваются. Автор, повидимому, не знаком с упомянутой работой И. М. Рапопорта, использование которой позволило бы, в частности, исключить § 2.

IIA. Рассматривается задача об изгибании полосы $0<y<1$ (в плоскости x, y), у которой край $y=1$, а также часть $x<0$ края $y=0$ оперты; часть $x>0$ края $y=0$ закреплена, причем на этой части задается угол наклона полосы к плоскости x, y. Задача приводится к решению уравнения

$$\Delta\Delta\zeta = 0, \qquad (3)$$

$$\zeta|_{y=1} = 0, \quad \zeta|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big|_{y=1} = 0, \quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\Big|_{\substack{y=0\\x<0}} = 0,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}\Big|_{\substack{y=0\\x>0}} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — заданная функция. Задача сведена к уравнению (1), где $m(x) = -\partial^2\zeta/\partial y^2|_{y=0}$, а ядро $h(x)$ имеет преобразование Фурье вида $H_1(w) = (\operatorname{sh} w \operatorname{ch} w - w)/\sqrt{2\pi}\, 2w \operatorname{sh}^2 w$. В уравнении (2) берется ядро $h^*(x)$, которое имеет преобразование Фурье

$$H_1^*(w) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi\,(w^2 + (3/2)^2)}$$

(первое приближение) или

$$H_1^{**}(w) = (w^4 + 6{,}9w^2 + 20)/2\sqrt{2\pi\,(w^2 + (3/2)^2)} \times \\ \times (w^4 + 5{,}4w^2 + 20)$$

(второе приближение).

Решена задача, отличающаяся от рассмотренной тем, что край $y=1$ закреплен, а также задача о течении вязкой жидкости между бесконечными стенками $y=\pm 1$ и полубесконечной стенкой $y=0$, $x>0$.

II B. Проверяется точность приведенного приближенного метода решения уравнения (1), сопоставляется точное и приближенное решения в случае, когда преобразование Фурье ядра $h(x)$ имеет вид $H_3(w) = \operatorname{th} w/\sqrt{2\pi}\, w$, а $\varphi(x)\equiv 1$ при $x>0$. В качестве первого и второго приближений функции $H_3(w)$ берутся функции

$$H_3^*(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{w^2+1}},$$

$$H_3^{**}(w) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{w^2+1}}\frac{w^4 + 3{,}6w^2 + 4}{w^4 + 3w^2 + 4}$$

Установлено, что погрешности приближенных решений $m^*(x)$ и $m^{**}(x)$ не превышают 3 и 0,7% соответственно, причем наибольшая точность достигается при значениях x, близких к нулю. Ю. И. Черский

452. **Периодические решения нелинейного уравнения третьего порядка.** Тадэнума (三階非線型微分方程式の週期解.蔘沼良一),電氣試驗所彙報 (Дэнки сикэнсё ихо, Bull. Electrotechn. Lab.), 1954, 18, № 11, 52—55 (япон.; резюме англ.)

Работа касается условий существования периодического решения системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается из рассмотрения цепи лампового генератора с нелинейной характеристикой общего вида; сеточный и анодный токи считаются функциями только сеточного напряжения. Система отличается от ранее рассмотренных (Friedrichs K. O., On nonlinear vibrations of third order, Studies in nonlinear vibration theory, Institute for Mathematics and Mechanics; New York Univ., 1946; Ranch L. L., Ann. Math. Studies, № 20, Princeton Univ. Press, 1950) Резюме автора

453. **О задаче Коши для счетной системы уравнений в частных производных первого порядка. Жаутыков О. А.,** Изв. АН КазахССР, сер. астроном., физ., матем. и механ., 1953, № 3, 41—50 (резюме казах.)

Приводится теорема, которая в общем случае неверна, в чем можно убедиться на примере. [Если

$$u_1(x, 0) = f_1(x) \text{ и } u_2(x, 0) = f_2(x), \qquad (1)$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывно дифференцируемые, но не аналитические функции x, то система Коши—Римана $\partial u_1/\partial t = \partial u_2/\partial x$, $\partial u_2/\partial t = -\partial u_1/\partial x$, являясь частным случаем системы (1), рассмотренной в реферируемой работе, не имеет непрерывных решений, удовлетворяющих начальным условиям (1). Далее для уравнения $\partial u/\partial t = \partial u/\partial x$, также являющегося частным случаем системы (1), нет единственности задачи Коши в прямоугольнике $0\leqslant x\leqslant h$; $0\leqslant t\leqslant T$]. Отметим, что «доказательство» автора опирается на ошибочное неравенство (14) на стр. 47. Л. И. Камынин

454. **Пример течения с переходом через скорость звука. Трикоми** (Beispiel einer Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit. Tricomi F. G.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 3, 160—171 (нем.)

Рассматривается пример течения, потенциал и функция тока которого с точностью до постоянных множителей задаются уравнениями

$$\varphi_1 = (1/2)(3/2)^{2/3}[(\rho+\theta)^{2/3} + (\rho-\theta)^{2/3}],$$

$$\psi_1 = (3/2)^{1/3}[(\rho+\theta)^{1/3} - (\rho-\theta)^{1/3}].$$

Этот пример был дан впервые референтом (Изв. АНСССР, 1945, 9, № 5, 387—422), а в данной компактной форме—С. В. Фальковичем (Прикл. матем. и механика, 1946, 10, № 4, 503—512). См. также работу референта (Докл. АН СССР, 1947, 56, 683—686), на которую автор ссылается. Ф. И. Франкль

455. **О решении уравнений, описывающих движение несжимаемой жидкости. Киселев А. А.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, 251—254

Краткое изложение доклада на заседании Ленинградского общегородского математического семинара 11 марта 1954 г. Рассматривается функция тока ψ плоского нестационарного движения вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области при условиях, что на граничной поверхности ψ обращается в нуль со своей нормальной производной, а в начальный момент принимает заданное значение внутри области. Для решения применяется метод конечных разностей. Устанавливается единственность и существование обобщенного решения при малости некоторого выражения, зависящего от начального значения ψ_0 и ее производных, а также от области движения, и называемого автором обобщенным числом Рейнольдса. Д. Е. Долидзе

456. **Распространение начальных уплотнений в вязком газе. Войт С. С.,** Уч. зап. МГУ, Механика, 1954, 5, № 172, 125—142

Задача о распространении в вязком газе начальных уплотнений, произведенных в некоторой ограниченной области G, сводится к решению уравнения для коэффициента уплотнения s

$$\partial^2 s/\partial t^2 = c^2\Delta s + (\tfrac{4}{3})\nu\,\partial\,\Delta s/\partial t$$

при начальных условиях:

$$s(x, y, z, 0) = \omega_1(x, y, z); \quad \frac{\partial s(x, y, z, 0)}{\partial t} = \\ = \omega_2(x, y, z) \text{ внутри } G;$$

$$s(x, y, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial s(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0 \text{ вне } G.$$

Обычным методом составлено выражение общего решения при помощи объемного интеграла Фурье. В случаях сферической и цилиндрической области G решение приводится к более простому виду. Подробно исследовано выражение коэффициента уплотнения газа $s = (\rho - \rho_0)/\rho$ в случае плоской задачи. Автор делает вывод, что в вязком газе уплотнения распространяются как и в идеальном — со скоростью звука, но с затуханием во времени. В отличие от идеального газа отмечается затухание плоских волн возмущения плотности. Волновой характер распространения начальных возмущений плотности вязкого газа осложняется диффузионным процессом, вследствие чего происходит размыв переднего и заднего фронтов волны.

В. П. Пилатовский

457. Асимптотическое поведение решения одной граничной задачи магнитогидродинамики. Нардини (Comportamento asintotico della soluzione di un problema al contorno della magneto-idrodinamica. Nardini R.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 365—366 (итал.)

См. РЖМат, 1955, 5820.

458. Об одной динамической задаче теории упругости. Мусалов А. Х., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 107—114

Изучаются колебания упругой среды, занимающей область $x > 0$, $y > 0$ плоскости $x0y$; массовые силы отсутствуют, граница $y = 0$ свободна от напряжений, границе $x = 0$ при $t = 0$ сообщается постоянная перпендикулярная ей скорость v_0. Ищутся ускорения w_x и w_y, для чего вводятся скалярный и векторный потенциалы φ и ψ: $w_x = \partial\varphi/\partial x + \partial\psi/\partial y$, $w_y = \partial\varphi/\partial y - \partial\psi/\partial x$. φ и ψ ищутся лишь в областях $a^2(x^2+y^2) \leqslant t^2$ и $b^2(x^2+y^2) \leqslant t^2$ соответственно ($a = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $b = \sqrt{\mu/\rho}$, λ, μ — постоянные Ламе, ρ — плотность вещества).

При помощи метода функционально-инвариантных решений задача сводится к задаче о нахождении двух функций $\Phi_1(\theta)$ и $\Psi_1(\theta)$, аналитических в области $\mathrm{Re}\,\theta > 0$, $\mathrm{Im}\,\theta > 0$. Выписаны условия, которым должны удовлетворять Φ_1 и Ψ_1 на границе области. Однако граничных условий, приведенных в работе, недостаточно для нахождения Φ_1 и Ψ_1: известно лишь $\mathrm{Re}\,\Phi_1'$, $\mathrm{Re}\,\Psi_1'$ при $\mathrm{Re}\,\theta$, $\mathrm{Im}\,\theta > 0$ и при $\mathrm{Im}\,\theta = 0$, $\mathrm{Re}\,\theta > av_0$, нехватает граничных условий при $\mathrm{Im}\,\theta = 0$, $0 < \mathrm{Re}\,\theta < av_0$. Решение сформулированной динамической задачи до конца таким образом не доведено.

Использование более совершенного варианта метода функционально-инвариантных решений (Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 3) позволило бы значительно сократить и упростить рассуждения автора.

В. М. Бабич

459. Некоторые новые вопросы интегрирования дифференциальных уравнений гидродинамики. Аржаных И. С., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 75—97

Рассматриваются вопросы интегрирования дифференциальных уравнений гидродинамики — построение общих решений и приведение граничных задач к функциональным уравнениям.

Строятся общие выражения для компонент тензора напряжения, вектора скорости и плотности, содержащие 21 неизвестную функцию, удолетворяющие шести уравнениям. В частных случаях число функций сокращается и уравнения упрощаются. В качестве примера даются формулы для установившегося движения идеальной жидкости на плоскости, определяемого двумя функциями.

Рассматривая вопрос интегрирования дифференциальных уравнений идеальной несжимаемой жидкости в подвижной системе координат в переменных Лагранжа, автор приходит к формулам, из которых получаются формулы Вебера для аналогичного случая при отсутствии переносного движения, а также частный интеграл, полученный Громеко в 1881 г. для случая установившегося движения.

Доказывается возможность введения комплексного потенциала для характеристики трехмерного относительного течения идеальной несжимаемой жидкости, когда вектор вихря является двумерным, и дается пример, когда проекция трехмерного течения на плоскости дает картину течения вблизи источника.

В разделах, посвященных интегрированию уравнений с учетом граничных условий, приведение задачи к интегральным уравнениям иллюстрируется на примерах движения идеальной и вязкой несжимаемых жидкостей внутри подвижного замкнутого сосуда и вне твердого тела, перемещающегося поступательно в безграничной жидкости. В случае движения идеальной баротропной жидкости в бесконечной области, создаваемого равномерным поступательным перемещением твердого тела, задача приводится к интегро-дифференциальному уравнению.

Д. Е. Долидзе

460. Законы физики и дифференциальные уравнения. Лере (The physical facts and the differential equations. Leray Jean), Amer. Math. Monthly, 1954, 61, № 7, part 2, 5—7 (англ.)

Указывается на некоторые некорректные в классическом смысле постановки задач математической физики, играющие роль в исследовании конкретных физических процессов (поток вязкой жидкости). Приводятся соображения о методах доказательства корректности задач и построения противоречащих примеров (для задачи Дирихле в случае нелинейного эллиптического уравнения).

Библ. по уравнениям Навье-Стокса и нелинейной задаче Дирихле, 20 назв.

В. И. Левин

461. Заметка к статье Дэвиса и Уолтерса «Влияние конечной величины площади на скорость испарения в турбулентную атмосферу». Пейн (A note on a paper by Davies and Walters on «The effect of finite width of area on the rate of evaporation into a turbulent atmosphere». Payne L. E.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 283—286 (англ.)

В названной статье (Quart. J. Mech. Appl. Math., 1951, 4, № 4, 466—480) при $0 < m < 1$ дается решение уравнения:

$$\partial^2\chi/\partial\eta^2 + \partial^2\chi/\partial z^2 + (1-m)\,z^{-1}\,\partial\chi/\partial z = 0,\quad z \geqslant 0, \qquad (1)$$

исчезающее на бесконечности и удовлетворяющее на оси η условиям $\chi = \chi_0$ при $|\eta| < c$, $\partial\chi/\partial z = 0$ при $|\eta| > c$:

$$\chi = \left(1 - \int_0^\beta (\mathrm{sh}\,\varphi)^{m-1}\,d\varphi\right) \Big/ \int_0^\infty (\mathrm{sh}\,\varphi)^{m-1}\,d\varphi, \qquad (2)$$

где β определяется из формул связи η и z с вырожденными эллипсоидальными координатами β и θ: $\eta + iz = c\,\mathrm{ch}\,(\beta + i\theta)$.

Автор указывает что это решение представимо и в форме

$$\chi = \frac{\sqrt{\pi}\chi_0\,(\mathrm{ch}\,\beta)^{m-1}}{\Gamma[(3-m)/2]\,\Gamma(m/2)} \times$$

$$\times\, F\left(\frac{2-m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{3-m}{2}; \mathrm{ch}^{-2}\beta\right),$$

которая может оказаться более удобной для численных расчетов, чем (2). Устанавливается, что при $m \leqslant 0$ уравнение (1) не имеет решения, удовлетворяющего указанным граничным условиям. В явной форме записывается соответствующее решение для $2 < m < 3$ и указывается, что решение может быть

получено и для $2n < m < 2n+1$; $n = 2, 3, \ldots$. Вопросы существования решения для остальных значений m не рассматриваются. М. Н. Олевский

462. **Распределение напряжений в колеблющейся свободно опертой прямоугольной пластинке, равномерно сжатой по краям в одном направлении.** Багдасаров А. Д., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 99—106

Исследуется задача о свободных колебаниях прямоугольной пластинки ($|x| < a$, $|y| < b$) с большими прогибами, сжатой продольными силами, равномерно распределенными по кромкам $x = \pm a$; все стороны пластинки свободно оперты.

Прогиб w и функция напряжений φ ищутся в форме разложений по степеням некоторого параметра λ, причем все коэффициенты разложений (w_n и φ_n), кроме свободного члена (φ_0) в разложении φ, считаются зависящими от координат и времени ($\varphi_0 \equiv \varphi_0(x, y)$). Подстановка рядов в основные уравнения задачи и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях λ приводит к бесконечной системе дифференциальных уравнений четвертого порядка с граничными условиями. Применяется метод последовательных приближений и, в результате решения бигармонических уравнений с правой частью при соответствующих граничных условиях, разыскиваются функции φ_0, φ_1 и w_1 и приближенное значение параметра λ.

В указанном приближении приводятся формулы для напряжений в виде двойных тригонометрических рядов, а также их значения в центре пластинки.

Я. С. Уфлянд

463. **К задаче о кручении упругого полупространства.** Ростовцев Н. А., Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 1, 55—60

Рассматривается осесимметричная задача об определении смещений и напряжений в упругом полупространстве, которое скручивается за счет поворота вокруг оси симметрии жесткого штампа, связанного с полупространством посредством трения или сцепления. Решение дается в виде квадратур того же типа и тем же приемом, что и в предыдущей работе автора (РЖМат, 1954, 2159). Г. Н. Положий

464. **Об интегрируемости задачи Сен-Венана для кристаллических тел.** Бресс ан (Sull'integrabilità del problema di de Saint Venant nei solidi cristallini. Bressan Aldo), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1954, 23, № 2, 435—448 (итал.)

Доказывается, что задача Сен-Венана об изгибе и кручении стержней в ее обычной постановке в общем случае неразрешима, если материал стержня анизотропен. С. Г. Михлин

465. **Верхние и нижние границы для сопротивления кручению.** Бергер (Obere und untere Schranken für den Drillwiderstand. Bergér E. R.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 313—314 (нем.)

Задача состоит в определении величины

$$J_t = 2\int_\Omega T(x, y)\, d\Omega + 2\sum_{k=1}^{n} T_k F(\Omega_k),$$

где $T(x, y)$ (функция напряжений Прандтля) удовлетворяет следующим условиям: в области Ω сечения стержня

$$-\Delta T = 2; \qquad (1)$$

$T|_{\Gamma_0} = 0$ на внешнем контуре сечения Γ_0; $T|_{\Gamma_k} = T_k = \text{const}$ на внутренних контурах Γ_k, $k = 1, \ldots, n$ (контурах отверстий); $F(\Omega_k)$ — площадь Ω_k (k-го отверстия). Постоянные T_k определяются из условия

$$\int_{\bar\Gamma} (\partial T / \partial \nu)\, ds = -2F(\bar\Omega), \qquad (2)$$

где $\bar\Gamma$ — любой внутренний контур в Ω, $F(\bar\Omega)$ — площадь ограниченной им области. Автор формулирует, считая их известными, два вариационных принципа:

$$1.\quad J_t = \int_{\Omega + \sum_{k=1}^{n} \Omega_k} \left(4F - F_x^2 - F_y^2\right) d\Omega, \qquad (3)$$

где $F(x, y)$ — произвольная непрерывная кусочно-дифференцируемая в $\Omega + \sum_{k=1}^{n} \Omega_k$ функция, $F|_{\Gamma_0} = 0$ и $F = T_k = \text{const}$ в Ω_k.

2. Метод Треффтца (ср. Winberger H. F., РЖМат, 1954, 4816):

$$J_t \leqslant \int_\Omega \left(\Phi_x^2 + \Phi_y^2\right) d\Omega,$$

где $\Phi(x, y)$ — произвольное решение уравнения (1) в $\Omega + \sum_{k=1}^{n} \Omega_k$. (Удовлетворение уравнения (1) в Ω_k обеспечивает выполнение условия (2).) Автор предлагает выбирать $\Phi(x, y)$ в виде $\Phi(x, y) = \mathrm{Re}\,[-z\bar z/2 + f(z)]$ ($z = x + iy$, $f(z)$ — полином от z) и отмечает, что первые два приближения по этому методу совпадают с известными оценками J_t через моменты инерции сечения. Указывается, что четвертое приближение этого типа и простейшие оценки, вытекающие из (3), позволяют, как правило, оценивать J_t с двух сторон с точностью 10%. М. Ш. Бирман

466. **Теорема единственности и новое решение проблемы Зоммерфельда и других дифракционных проблем.** Питерс, Стокер (Uniqueness theorem and a new solution for Sommerfeld's and other diffraction problems. Peters A. S., Stoker J. J.), Communs Pure and Appl. Math., 1954, 7, № 3, 565—585 (англ.)

Доказывается теорема единственности решения волнового уравнения $\Delta u + u = 0$ в двумерной области D, граница которой Г имеет бесконечно удаленную точку, при следующих условиях: 1) Г такова, что любая окружность на плоскости (xy) вырезает такую часть Г, к которой применима формула Грина; вне окружности достаточно большого радиуса Г состоит лишь из одного луча R, уходящего в бесконечность; 2) На Г выполняются однородные граничные условия 1-го или 2-го рода. 3) В D решение u может быть представлено в виде $u = h + g$, где h удовлетворяет условиям излучения в форме: $\lim_{\rho\to\infty} \int_{C_\rho} |\partial h/\partial\rho + ih|^2\, ds = 0$ (C_ρ — окружность радиуса ρ с центром на R), а функция g имеет заданное поведение на бесконечности. 4) В угловых точках границы Г решение u удовлетворяет условиям регулярности: $u(\rho, \theta) \sim C_1$; $\partial u(\rho, \theta)/\partial\rho \sim \rho^{-k} C_2$, $k < 1$, C_1 и C_2 — постоянные.

При доказательстве теоремы единственности используется метод, предложенный Реллихом (Rellich R., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1943, 53, 57—65).

Далее дается метод решения задачи Зоммерфельда о дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем экране в форме полуплоскости, в котором используются представление решения в виде суммы двух функций и разложение решения в ряд Фурье по θ. К. А. Барсуков

467. **Дифракция на полуплоскости.** Чэмберс (Diffraction by a half-plane. Chambers L l. G.),

Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, **10**, № 2, 92—99 (англ.)

Рассматривается диффракция электромагнитных волн на идеально проводящем полубесконечном экране. Вводя параболические координаты $x = l(\xi^2 - \eta^2)$, $y = 2l\xi\eta$, автор, следуя Фридлендру (Friedlander, Proc. Roy. Soc., 1946, A186, 322—344), решает поставленную задачу более элементарным путем, чем Зоммерфельд и Копсон (Copson, Proc. Roy. Soc., 1946, A186, 100—118). Задача сводится к отысканию решения волнового уравнения

$$\square_0^2 \Psi = 0 \ (\square_0^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2)$$

при заданной падающей волне Ψ_0 и однородных граничных условиях на границе экрана.

В случае $\Psi_0 = \exp\{ik[ct + l(\xi^2 - \eta^2)\cos\alpha + 2l\zeta\eta\sin\alpha]\}$ решение Ψ дается в явном виде в квадратурах. Например, если $\Psi = 0$ при $\eta = 0$, Ψ не зависит от t, а l — длина волны ($kl = k\lambda = 2\pi$), то

$$\Psi = \beta^{-1} e^{K\cos(\varphi-\alpha)} \int_{-\infty}^{p} e^{-i\gamma^2}\, d\gamma - e^{K\cos(\varphi+\alpha)} \int_{-\infty}^{q} e^{-i\gamma^2}\, d\gamma,$$

где $K = ik\rho$, $\beta = \sqrt{\pi}\exp(-i\pi/4)$, $p = \sqrt{2k\rho}\cos^1/_2(\varphi - \alpha)$, $q = \sqrt{2k\rho}\cos^1/_2(\varphi + \alpha)$ (ρ и φ — полярные координаты). Аналогично строится Ψ в случае, когда $\partial\Psi/\partial\eta = 0$ при $\eta = 0$.

Далее автор рассматривает поставленную задачу диффракции отдельно, когда вектор напряженности электрического поля E перпендикулярен или параллелен поверхности экрана, и строит все компоненты поля.

Изучается приближение Френеля полученных результатов и делается ряд интересных заключений. Автор отмечает, что его метод можно применить и в случае звукового поля. Д. З. Аваазашвили

468. Влияние полусферической неоднородности на искусственное геоэлектрическое поле. Кольбенхейер (Vplyv polgulovej povrchovej inhomogenity na umelé geoelektrické prúdové pole. Kolbenheyer Tibor), Mat.-fys. časop., 1954, 4, № 4, 227—236 (словац.; резюме русс. и нем.)

Разложением в ряды по сферическим функциям находится решение следующей задачи: в однородном проводящем полупространстве помещена проводящая полусфера (основание которой лежит на границе полупространства) с другими значениями постоянных; найти потенциал внутри и вне полусферы, если на границе полупространства находится источник тока. Различаются два случая: источник тока вне основания полусферы и на нем. Подробно изучается поведение потенциала на прямой, соединяющей источник тока с центром полусферы. Задача имеет значение для геофизики. В. И. Левин

469. Задачи Коши в квантовой теории поля. Деприй (Problèmes de Cauchy en théorie quantique des champs. Deprit André), Ann. Soc. scient. Bruxelles., 1954, 68, ser. 1, № 1—2, 119—132 (франц.; резюме англ.)

Фейнман (Feynman, Phys. Rev., 1949, 76, 749) записал решение уравнения Шредингера $i\partial\psi(x, t)/\partial t = H(x, t)\psi(x, t)$ в виде $\psi(x, t) = \int K(x, t; \xi, \tau)\psi(\xi, \tau)d\xi$, где $K(x, t; \xi, \tau)$ — функция Грина уравнения Шредингера

$$[i\partial/\partial t - H(x, t)]\, K(x, t; \xi, \tau) = i\delta(n - \xi)\,\delta(t - \tau).$$

Автор намечает пути для строгого обоснования этих формул на базе теории обобщенных функций. Законченные результаты получены для уравнения Клейна — Гордона и уравнения Де Бройля. О. С. Парасюк

470 Д. Основные граничные задачи теории установившихся упругих колебаний для контуров с угловыми линиями. Цандеков М. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилис. ун-т, Тбилиси, 1954

471 Д. Представление общего интеграла системы дифференциальных уравнений колебания сферической оболочки через аналитические функции комплексной переменной и некоторые его применения. Оболашвили Е. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилиси ун-т, Тбилиси, 1953

См. также: 9, 10, 11, 12, 346, 356, 357, 385, 488, 490, 492, 569, 603, 606, 607, 608, 613, 703, 719, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 759

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

472. О разложении по собственным функциям диссипативных ядер. Мукминов Б. Р., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 4, 499—502

Ядро $K(x, y)$ ($a \leqslant x,\ y \leqslant b$) называется «диссипативным», если $\operatorname{Im} K(x, y) = [K(x, y) - \overline{K(x, y)}]/2i$ — эрмитово положительное ядро. Интегральный оператор Kf с диссипативным ядром, определенный в пространстве L_2, называется «диссипативным», если

$$\int_a^b\int_a^b |K(x, y)|^2\, dx\, dy < \infty, \qquad \int_a^b \operatorname{Im} K(x, x)\, dx < \infty.$$

Приводится элементарное доказательство критерия полноты главных функций диссипативного оператора Kf в области его значений, являющегося частным случаем одной теоремы, доказанной М. С. Лившицем при помощи приведения оператора к треугольной модели (РЖМат, 1954, 5660).

Указывается (без доказательства) связь между поведением индикатрисы целой функции $D(\lambda)$ (определителя Фредгольма непрерывного диссипативного ядра) и полнотой системы главных функций ядра. Как следствие получается предложение: если диссипативное непрерывное ядро $K(x, y)$ дифференцируемо по y, то система его главных функций полна.

Почти ортонормированной системой функций из L_2 называется такая система $\{\varphi_n\}$, что каждая линейная комбинация $f = \sum_{n=1}^{N} c_n\varphi_n$ удовлетворяет условию $m\|f\|^2 < \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 \leqslant M\|f\|^2$, где m и M — положительные постоянные. Далее приводятся некоторые условия, налагаемые на распределение собственных значений ядра, обеспечивающие почти ортонормированность собственных функций ядра.

Примечание референта. Рассмотрение почти ортонормированных систем оправдывается утверждением автора о том, что всякая $f \in L_2$ разлагается в ряд по функциям полной почти ортонормированной системы. Из контекста неясно, какой ряд (с какими коэффициентами) имеется в виду. Д. Ф. Харазов

473. О некоторых спаренных интегральных уравнениях. Ахиезер Н. И., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 3, 333—336

Рассматриваются парные интегральные уравнения

$$\int_k^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) \lambda d\lambda = f(x) \qquad (0<x<1), \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) (\lambda^2 - k^2)^p \lambda d\lambda = 0 \qquad (x>1), \qquad (2)$$

где ядро $J_0(\lambda x)$ — цилиндрическая функция нулевого порядка, число $k \geqslant 0$, число p $(0<p^2<1)$, а также $f(x)$ $(0<x<1)$ заданы; ищется функция $S(\lambda)$ и вместе с нею функция

$$g(x) = \int_0^\infty S(\lambda) J_0(\lambda x) (\lambda^2 - k^2) \lambda d\lambda \qquad (0<x<1).$$

Решение $S(\lambda)$ представляется в интегральной форме

$$S(\lambda) = \int_0^1 h(t) (\sqrt{\lambda^2 - k^2})^{-p} J_{-p}(t\sqrt{\lambda^2 - k^2}) dt, \qquad (4)$$

где $h(t)$ — новая неизвестная функция. Для определения $h(t)$ используются формулы разрывного интеграла Сонина и формулы обращения Сонина (Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, М. — Л., 1954, 64, 151). Даны явные выражения для функции $h(t)$:

$$h(t) = t^p \frac{d}{dt} \int_0^t f(x) x \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{t^2 - x^2})\, dx$$

$$(p>0)$$

и

$$h(t) = t^{1+p} \int_0^t f(x) x \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik}\right)^{-1-p} \times$$

$$\times J_{-1-p}(ik\sqrt{t^2 - x^2})\, dx, \ (p<0),$$

а также для функции $g(x)$:

$$g(x) = \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \int_x^1 h(t) t^p \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik}\right)^{-p} J_{-p}(ik\sqrt{t^2 - k^2})\, dt$$

$$(p>0)$$

и

$$g(x) = \int_x^1 h(t) t^p \left(\frac{\sqrt{t^2 - x^2}}{ik}\right)^{-1-p} J_{-1-p}(ik\sqrt{t^2 - x^2}) dt$$

$$(p<0).$$

Аналогичным методом решен другой тип парных интегральных уравнений

$$\int_k^\infty C(\lambda) J_\nu(\lambda x)\, d\lambda = f(x) \qquad (0<x<1) \qquad (5)$$

$$\int_0^\infty C(\lambda) J_{-\nu}(\lambda x)\, d\lambda = 0 \qquad (x>1), \qquad (6)$$

где ядро $J_\nu(\lambda x)$ — цилиндрическая функция порядка ν $(0<\nu^2<1)$ и $C(\lambda)$ — искомая функция.

Формальное решение уравнений (1) и (2) для частного случая $k=0$ известно (Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М. — Л., 1948, 423—429).

Указывается на приложение парных интегральных уравнений к решению многих смешанных краевых задач математической физики. А. Я. Лусис

474. О семействе кривых-решений интегрального неравенства. Канадзава, Ивасаки, Мураками (On the family of the solution-curves of the integral inequality. Kanazawa Takasi, Iwasaki Akira, Murakami Haruo), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 96—97 (англ.)

Изучается множество решений $u(x)$ неравенства

$$\left| u(x) - f(x) - \int_0^x K(x, t, u(t))\, dt \right| \leqslant p(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad (1)$$

где $f(x)$, $u(x)$ — элементы пространства C_n непрерывных (повидимому, вещественных) вектор-функций (авторы пишут: C) с метрикой $\|f\| = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$, а под $|f(x)|$, видимо, подразумевается $\sqrt{f_1^2(x) + \ldots + f_n^2(x)}$; такой же смысл имеет, повидимому, и левая часть (1); $K(x, t, u)$ — вектор-функция, непрерывная и ограниченная (числом M) при $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, $|u| < +\infty$; $p(x)$ непрерывна.

Продолжая исследования Хукухара (РЖМат, 1954, 3692), авторы доказывают теорему: Если семейство $\mathfrak{F}$ функций $f(x)$ есть компактный континуум в C_n, то и семейство $\mathfrak{U}$ всех решений $u(x)$ неравенства (1), когда $f(x)$ пробегает $\mathfrak{F}$, есть компактный континуум в C_n.

М. К. Фаге

475. Интегральные уравнения с нормальными ядрами. Чжан Ши-сюнь (Integral equations with normal kernels. Chang Shih-Hsun), Scientia Sinica, 1954, **3**, № 4, 369—385 (англ.)

Английский перевод статьи автора (РЖМат, 1955, 3243).

476. О системах рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений нормальной формы, интегральные члены которых содержат производные от неизвестных функций. Жерме (Sur des systèmes d'équations intégro-différentielles récurrentes de forme normale dont les termes intégraux contiennent les dérivés des fonctions inconnues. Germay R. H.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1954, ser. 1, 68, № 1—2, 5—12 (франц.)

Рассматривается система рекуррентных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy_{j,\mu}}{dx} = F_{j,\mu}\left[\begin{array}{l} x;\quad y_{1,\mu}(x) \ldots y_{p,\mu}(x); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1,\mu+r}(x) \ldots y_{p,\mu+r}(x); \\ w_{j,\mu}^{(1)}(x) \ldots w_{j,\mu}^{(k)}(x) \end{array}\right] \left[\begin{array}{l} (j=1,\ldots \\ \ldots, p) \\ (\mu = 1, \\ 2, \ldots) \end{array}\right]$$

где

$$w_{j,\mu}^{(m)}(x) = \int_{x_0}^x f_{j,\mu}^{(m)} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{l} x, s;\quad y_{1,\mu}(s), \ldots, y_{p,\mu}(s); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1,\mu+r}(s), \ldots, y_{p,\mu+r}(s) \\ \dfrac{dy_{1,\mu}}{ds} \ldots \dfrac{dy_{p,\mu}}{ds} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_{1,\mu+r}}{ds} \ldots \dfrac{dy_{p,\mu+r}}{ds} \end{array}\right] ds \quad (m=1, 2, \ldots, k).$$

При обычных предположениях относительно функций $F_{j,\mu}$, $f_{j,\mu}^{(m)}$ (равностепенная непрерывность, усло-

вия Липшица с константами, не зависящими от пробегающего бесконечное число значений индекса μ) доказывается существование единственной системы решений, состоящей из p бесконечных последовательностей функций $y_{j,\mu}$ ($j=1, 2, \ldots, p$; $\mu=1, 2, \ldots$), удовлетворяющей заданным начальным условиям.

При доказательстве используется метод последовательных приближений. И. З. Штокало

477. Решение задачи Коши для одного класса линейных интегро-дифференциальных уравнений. В а с и л ь е в В. В., Докл. АН СССР, 1955, **100**, № 5, 849—852

Изучается существование решения задачи Коши $z^{(s)}(x_0)=z_0^{(s)}$ ($s=0, 1, \ldots, n-1$) уравнения

$$L[z(x)]+\int_a^b \sum_{i=1}^m K_i(x, y)\, z^{(i)}(y)\, dy=0, \qquad (1)$$

где L — линейный однородный дифференциальный оператор n-го порядка. При $m<n$ ядра $K_i(x, y)$ удовлетворяют всем условиям, налагаемым на ядра в теории линейных интегральных уравнений. При $m=n+p$ ($p\geqslant 0$) ядра $K_i(x, y)$ предполагаются дифференцируемыми $p+1$ раз по x.

Для случая $m<n$ по методу А. И. Некрасова (Тр. ЦАГИ, 1934, № 190) общее решение представлено в виде

$$z(x)=\sum_{i=1}^n c_i z_i(x)+\int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n z_i(x)\,\Delta_i(\eta)\,F(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}, \qquad (2)$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные; $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ — линейно независимые решения уравнения $L(z)=0$; $\Delta(x)$ — их вронскиан, а $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_n(x)$ — миноры $\Delta(x)$, взятые с их знаками; и, наконец, $F(x)$ — решение интегрального уравнения

$$F(x)+ \qquad (3)$$

$$+\lambda\int_a^b \sum_{k=0}^m K_\nu(x, y)\left[G_\nu(y)+\int_{x_0}^y H_\nu(\eta, y)\,F(\eta)\frac{d\eta}{\Delta(\eta)}\right]dy=0,$$

где $G_\nu(y)=\sum_{i=1}^n c_i z_i^{(\nu)}(y)$, $H_\nu(\eta, y)=\sum_{i=1}^n z_i^{(\nu)}(y)\,\Delta_i(\eta)$.

Таким образом автор приходит к теоремам:

Т е о р е м а 1. Если λ не есть характеристическое число уравнения (3), то при $x=x_0$ задача Коши для уравнения (1) имеет единственное решение, определяемое по формуле (2).

Отметим, что решение задачи Коши получается по формуле (2), если в ней $c_1, \ldots, c_n$ заменить решением системы алгебраических уравнений $\sum_{i=1}^n c_i z_i^{(k)}(x_0)=z_0^{(k)}$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$).

Т е о р е м а 2 разбираемой работы неверна, как показывают примеры, хотя следует указать, что случай, когда λ есть корень характеристического уравнения, может быть разобран путем сведения к теории уравнений Фредгольма. Я. В. Быков

478. Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение термодинамики. Б а у м а н (Eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung der Thermodynamik. B a u m a n n V o l k e r), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 319—321 (нем.)

Автор утверждает, что при специальных физических предположениях для описания температурного процесса $T(x)$, протекающего при теплопроводности и теплоизлучении, получается следующая граничная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения: требуется найти неотрицательное непрерывное решение уравнения

$$\int_0^\infty k(\lambda)\left\{\int_0^h k(\lambda)\,K_0(k(\lambda)\,|\,x-t\,|)\,E(\lambda, T(t))\,dt+\right.$$

$$\left.+2E(\lambda, T(x))\right\}d\lambda-\int_0^\infty k(\lambda)\{K_1(k(\lambda)(h-x))\,E(\lambda, T_h)+$$

$$+K_1(k(\lambda)x)\,E(\lambda, T_0)\}\,d\lambda-mT''(x)=0, \qquad (1)$$

которое принимает наперед заданные неотрицательные граничные значения $T(0)$ и $T(h)$.

Предполагается, что: а) m, T_0, T_h — заданные неотрицательные числа; б) $k(\lambda)$ ($\lambda\geqslant 0$) — заданная ограниченная неотрицательная непрерывная функция; в) x — координата места, которая изменяется от 0 до h ($h>0$); г) $E(\lambda, T)=2c_1\lambda^{-5}(e^{c_2/\lambda T}-1)^{-1}$ — функция излучения Планка; д) $K_0(x)=-\int_x^\infty e^{-t}t^{-1}dt$; $K_i(x)=-\int_x^\infty K_{i-1}(t)dt$. При $m=0$, $k(\lambda)\equiv k>0$ преобразованием $x=z/k$ и $v(z)=T^4(z/k)$ уравнение (1) приводится к линейному интегральному уравнению. При $m>0$, $k(\lambda)\equiv k>0$ двукратным интегрированием получается нелинейное интегральное уравнение. Однако подробным исследованием полученного уравнения автор не занимается. В конце заметки изложена идея доказательства единственности решения граничной задачи.

В тождестве (4) (стр. 321) вместо $K_2(k(\lambda)\,|\,x-t\,|)$ следует читать $K_0(k(\lambda)\,|\,x-t\,|)$. Я. В. Быков

479 К. Интегральные уравнения с приложениями к физике и технике. Часть I. Линейные интегральные уравнения. Ш м е й д л е р (Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Teil I. Lineare Integralgleichungen. S c h m e i d l e r W., Leipzig, Akad. Verl.-Ges., Geest und Portig, 1954, 611 S.), Neues vom Büchermarkt., 1954, № 1,5 (нем.)

480 К. Положительные решения одного нелинейного интегрального уравнения. П и р л ь (Positive Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung. P i r l U d o. Berichte über d. Verhandlgn. d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig. Math.-naturwiss. Kl., Bd. 100, H. S., Berlin, Akademie-Verl., 1953, 4, 44 S.), Dtsch. Nationalbibliogr.,1954, № 5, 193 (нем.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

481. К вычислению потенциальных потоков. Ф р а н к (Zur Berechnung von Potentialströmungsfeldern. F r a n k W i l h e l m), Österr. Ingr-Arch., 1954, 8, № 2—3, 97—107 (нем.; резюме англ., франц.)

Метод логарифмических особенностей (вихревых нитей) применяется к расчету потенциального обтекания гладкого контура. Носителем логарифмических особенностей выбирается произвольная замкнутая кривая внутри обтекаемого контура. Для плотности обложения этого простого слоя получается, как известно, интегральное уравнение первого рода, правая часть которого зависит от характера краевых условий, налагаемых на потенциал. Применяя теоремы о гармонических функциях, автор показывает, что полученное интегральное уравнение будет иметь решение, если носитель слоя достаточно близок к обтекаемой кривой, и предлагает решать его сведением к бесконечной системе линейных уравнений. Метод иллюстрируется на обтекании круга и применяется к расчету влияния толщины пограничного слоя на распределение давления по окружности. В. И. Левин

482. Новая форма интегральных уравнений плоской статической задачи теории упругости. Белоносов С. М., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, 27, 30—42

Рассматривается плоская статическая задача теории упругости: ищутся аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ внутри односвязной области D, удовлетворяющие на контуре C условию

$$\varkappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} = 2\mu(u_0 + iv_0) \qquad (1)$$
$$\varkappa = (\lambda + 3\mu)/(\lambda + \mu),$$

где $u_0(z)$ и $v_0(z)$ — заданные на C компоненты смещений, λ, μ — постоянные Ляме (Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи теории упругости, Изд-во АН СССР, 1949). Область D отображается на полуплоскость $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ ($s = \sigma + it$) функцией $z = \omega(s)$ и вводятся обозначения: $\alpha(\tau) = [\omega(i\tau) - \overline{\gamma(i\tau)}]/\omega'(i\tau)$, $\Phi(s) = \varphi(\omega(s))$, $\psi_1(s) = \psi(\omega(s)) + [\gamma(s)/\omega'(s)]\,\Phi'(s)$, где $\gamma(s)$ — функция, регулярная в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > 0$. Показывается, что из условия (1) следует

$$\varkappa\Phi(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Phi(i\tau)}\,\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\alpha(\tau)}{s - i\tau}\right] d\tau = A(s),$$

где $A(s)$ определяется через u_0, v_0 и ω. Применяя формулу Меллина (обращение интеграла Лапласа) и вводя обозначения

$$u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \Phi(s)\, e^{sx}\, ds,$$
$$v(x) = \sqrt{x}\, u(x),$$

где $\sigma > 0$, автор получает для $v(x)$ интегральное уравнение

$$\varkappa v(x) - \int_0^{\infty} K(x, y)\,\overline{v(y)}\, dy = \sqrt{x}\, f(x), \qquad (2)$$

где

$$K(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\tau)\, e^{i\tau(x+y)}\, d\tau,$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} A(s)\, e^{sx}\, ds.$$

Далее изучаются свойства интегрального уравнения (2) в случае контура с угловыми точками. Отмечается, что если $\omega(s)$ — рациональная функция, то ядро уравнения (2) — вырожденное. Рассмотрена плоская статическая задача для бесконечного клина и бесконечной длинной полосы. М. Г. Слободянский

483. О движении электронов в магнитных спектрометрах с неоднородным полем. Павинский П. П., Изв. АН СССР, сер. физ., 1954, 18, № 2, 175—191

Задача фокусировки электронного пучка в плоском магнитном поле $H_x = 0$, $H_y = 0$, $H_z = H(y)$, где $H(y) = \mathrm{const}$ для $y \leqslant 0$ и на оси $y = 0$ $H(y)$ и $H'(y)$ непрерывны, приводит к интегральному уравнению

$$\psi(t) = \int_0^t R(t - \tau)\,\frac{dy}{d\tau}\, d\tau$$

для ординаты траектории y как функции параметра $\tau = \int_0^y K(\eta)\, d\eta$, где K — кривизна траектории, пропорциональная H_z, $R(x) = (1 - x)/\sqrt{x(2 - x)}$ и $\psi(t) = K_0^{-1}\{\sqrt{K_0 b(2 - K_0 b)} - \sqrt{(K_0 b + t)(2 - K_0 b - t)} + \sqrt{t(2 - t)}\}$ (K_0 — постоянная кривизна в полуплоскости $y \leqslant 0$, $b = -y(0)$; траектории фокусируются в точке $x = 2x_m$, $y = -b$). Решение находится в виде

$$y(\tau) = \int_0^{\tau} S(\tau - t)\,\psi(t)\, dt,$$

где $S(x)$ определяется соотношением $\int_{\tau}^{x} S(x - t)\, R(t - \tau)\, dt = 1$ (метод Сонина) и получается в виде ряда, коэффициенты которого находятся по рекуррентным соотношениям из коэффициентов разложения $R(x)$. Полученное решение исследуется с физической точки зрения. В. И. Левин

484. Проблема Милна при наличии точечного источника. Эллиот (Milne's problem with a point-source. Elliott J. P.), Proc. Roy. Soc., 1955, A228, № 1174, 424—433 (англ.)

Полупространство $z > 0$ заполнено средой, в которой происходит изотропное рассеяние нейтронов, порождаемых источником в точке $\mathbf{r} = \mathbf{a} = (0, 0, a)$ ($a > 0$), испускающим в единицу времени q нейтронов. Плотность нейтронов $\rho(\mathbf{r})$ определяется интегральным уравнением

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\iiint_{z'>0} \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}\{c\rho(\mathbf{r}') + q\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{a})\}\, dV',$$

где $c = \sigma_s/(\sigma_s + \sigma_c)$, а σ_s и σ_c означают сечения рассеяния и захвата; при этом длина свободного пробега и скорость нейтронов приняты за единицу. Задача состоит в нахождении функции $\rho(\mathbf{r})$. Автор вводит преобразование Фурье

$$f(z;\, h) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \rho(\mathbf{r})\, e^{i(h_x x + h_y y)}\, dx\, dy,$$

где $h = \sqrt{h_x^2 + h_y^2}$, и функцию $g(z, h) = f(z,\ h) + qc^{-1}\delta(z - a)$. Для определения этой функции получается одномерное интегральное уравнение

$$g(z,\, h) - \frac{c}{2}\int_0^{\infty} I(|\gamma|,\, h)\, g(z';\, h)\, dz' = \frac{q}{c}\delta(z - a),$$

где

$$I(|\gamma|,\, h) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-|\gamma|t}}{t} J_0(h\gamma\sqrt{t^2 - 1})\, dt \qquad (\gamma = z - z').$$

При $h \to 0$ ядро $I(|\gamma|, h)$ переходит в ядро Милна. Желая подчеркнуть зависимость функций $f(z, h)$, $g(z, h)$ от параметра a, автор пишет $f_a(z, h)$, $g_a(z, h)$. Доказывается, что

$$f_a(z,\, h) = f_0(|a - z|,\, h) + \frac{c}{q}\int_0^{\zeta} f_0(t, h)\, f_0(t + |a - z|, h)\, dt \qquad (1)$$

($\zeta = \min\{a, z\}$), и тем самым случай $a > 0$ сводится к более простому случаю $a = 0$. Автор строит функцию $f_0(z, h)$ методом Винера — Хопфа и из рассмотрения найденного выражения заключает, что асимптотическое поведение искомой функции

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho(R, z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} h f_0(z, h)\, J_0(hR)\, dh \quad (R = \sqrt{x^2 + y^2})$$

при большом R или большом z и равном нулю сечении захвата σ_c может быть получено без вычисления новых интегралов с помощью результатов Плачека и Марка (Placzek G., Phys. Rev., 1947, 72, 556; Marc C., Phys. Rev., 1947, 72, 558), относящихся к уравнению Милна. Далее рассматривается случай $a > 0$ и с помощью соотношения (1) получаются приближенные

формулы снова в предположении, что захват отсутствует или весьма мал. Свои решения автор сравнивает с результатами, которые дает диффузионное рассмотрение. В статье имеются опечатки.

Н. И. Ахиезер

485. Об одной системе интегральных уравнений в теории диффракции. Шантавый (O jednom systému integrálních rovnic v theorii diffrakce. Šantavý Ivan), Sbor. Vysoké školy stavit. Brně, 1954, **3**, № 2, 133—138 (чеш.; резюме русс.)

Копсон (Copson E. T., Proc. Roy Soc., 1946, **A186**, 100—118) составил систему интегральных уравнений для задачи диффракции электромагнитных волн на плоском экране. Баукамп (Bouwkamp C. J., Theoretische en Numerieke Behandeling van de Buiging door een Ronde Opening. Dissertation, Univ. Groningen, 1941, 60 p.) показал, что формулы Копсона справедливы только в том случае, когда определенный криволинейный интеграл равен нулю. Автор объясняет возражение Баукампа и показывает, что в уравнениях, выведенных Копсоном, отсутствует член, учитывающий влияние разрывности электромагнитного поля на краю экрана. Показано, что принцип Бабине в формулировке Копсона остается действительным. (Математическую формулировку принципа Бабине см. Леонтович М. А., Ж. эксперим. и теор. физики, 1946, **16**, № 6, 474—479.)

Е. С. Алексеев

486. Дальнейшая заметка о парных интегральных уравнениях и об одном применении к диффракции электромагнитных волн. Трантер (A further note on dual integral equations and an application to the diffraction of electromagnetic waves. Tranter C. J.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, **7**, № 3, 317—325 (англ.)

Рассматриваются парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty G(u) f(u) J_\nu(\rho u)\, du = g(\rho) \qquad (0<\rho<1), \quad (1)$$

$$\int_0^\infty f(u) J_\nu(\rho u)\, du = 0 \qquad (\rho>1), \quad (2)$$

где $G(u)$, $g(\rho)$ — заданные функции, $\operatorname{Re}\nu > -1$.

Решение ищется в виде $(n>0)$

$$f(u) = u^{1-n} \sum_{m=0}^\infty a_m J_{\nu+2m+n}(u),$$

благодаря чему уравнение (2) выполняется автоматически. Нахождение коэффициентов a_m сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Исследования системы не дано.

Общие соображения применяются к задаче диффракции электромагнитных волн у плоской щели. Эта задача сводится автором к определению функции $F(\alpha)$ из условий

$$\int_1^1 (1-\alpha^2)^{1/2} F(\alpha)\cos(k\xi\alpha)\, d\alpha + i\int_1^\infty (\alpha^2-1)^{1/2} F(\alpha)\cos(k\xi\alpha)\, d\alpha = \frac{1}{2} \qquad (0\leqslant\xi<b),$$

$$\int_0^\infty F(\alpha)\cos(k\xi\alpha)\, d\alpha = 0 \qquad (\xi>b).$$

Автор полагает

$$F(\alpha) = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{m=0}^\infty a_m \frac{J_{2m+1}(\varepsilon\alpha)}{\alpha}, \qquad \varepsilon = kb,$$

и, считая ε малым, получает приближенные значения

$$a_0 = -\frac{1}{2} i\varepsilon^2\left[1-\frac{1}{4}\varepsilon^2\left\{\gamma-\frac{3}{4}+\log\left(\frac{1}{4}\varepsilon\right)-\frac{1}{2}i\pi\right\}\right],$$

$$a_1 = -\frac{1}{32} i\varepsilon^4] \qquad (\gamma = 0{,}5772\ldots).$$

Указанная диффракционная задача была ранее другим методом рассмотрена в статье Грошвитца и Хёнля (Groschwitz E., Hönl H.. Z. Physik, 1952, **131**), где были получены другие приближенные выражения для коэффициентов a_0, a_1. Автор подвергает критике вычисления этой статьи.

Н. И. Ахиезер

См. также: 361, 413, 451, 558, 564, 605, 609

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

487. Существование дифференциала одного интеграла вариационного исчисления. Фреше (Existence de la différentielle d'une intégrale du calcul des variations. Fréchet Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 21, 2036—2038 (франц.)

Функционал $F[z]$ называется дифференцируемым при $z \equiv y$, если существует линейный функционал $L[x]$ такой, что отношение $\varepsilon = [\Delta F(y) - L[\Delta y]] / \|\Delta y\|$ стремится к нулю при $\|\Delta y\| \to 0$. Функционал $L[\Delta y]$ называется дифференциалом от $F(z)$ при $z \equiv y$ и обозначается через $\partial_{\Delta y} F[y]$. Если функционал $F[z]$ дифференцируем при z с достаточно малыми $\|z-y\|$ и если его первый дифференциал $\partial_{\Delta y} F[z]$ при фиксированном Δy есть функционал по z, дифференцируемый при $z \equiv y$, то функционал $\partial_{\Delta_1 y}\partial_{\Delta y} F[y]$ называется дифференциалом второго порядка при $z \equiv y$ функционала $F[z]$. Второй дифференциал симметричен относительно $\Delta_1 y$ и Δy.

Пусть C_1 — пространство функций z, имеющих непрерывные производные первого порядка на отрезке (a, b), с нормой $\|z(x)\| = \max_x |z(x)| + \max_x |z'(x)|$.

Рассмотрим на C_1 функционал

$$I[z(x)] = \int_a^b f[x, z(x), dz(x)/dx]\, dx$$

и предположим выполненными следующие условия регулярности:

1) Существует такое число $\eta>0$, что $f(x, z, t)$ имеет частные производные f'_z, f'_t, непрерывные по совокупности переменных x, z, t в цилиндре $a\leqslant x\leqslant b$, $|z-y(x)|<\eta$, $|t-y'(x)|<\eta$.

2) Все, что требовалось в условии 1) относительно f'_z, f'_t, требуется от частных производных f''_{z^2}, f''_{zt}, f''_{t^2}.

Имеют место следующие теоремы:

I. Если $f(x, z, t)$ удовлетворяет условию 1), то функционал $I[z]$ на C_1 имеет при $z \equiv y$ первый дифференциал

$$\partial_{\Delta y} I[y] = \int_a^b [f'_y(x, y, y')\Delta y + f'_{y'}(x, y, y')\Delta y']\, dx.$$

II. Если $f(x, z, t)$ удовлетворяет условию 2), то $I(z)$ на C_1 имеет при $z \equiv y$ второй дифференциал вида

$$\partial^2_{\Delta y^2} I[y] = \int_a^b [f''_{y^2}(x, y, y')\,\Delta y^2 + 2f''_{yy'}(x, y, y')\,\Delta y \Delta y' + f''_{y'^2}(x, y, y')\,\Delta y'^2]\,dx.$$

Э. С. Цитланадзе

488. **Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях и приложение их к вариационным задачам. Н и к о л ь с к и й С. М.**, Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, Suppl., 61—70

Статья автора (РЖМат, 1954, 4444) на русском языке.

489. **Существование абсолютного минимума кратных интегралов вариационного исчисления. Ш и л о в а Г. И.**, Докл. АН СССР, 1955, 102, № 4, 699—702

Изучается вопрос о существовании абсолютного минимума интегралов вида

$$\int_\Pi F(x^1, x^2, \ldots, x^n, f, p^1, p^2, \ldots, p^n)\,d\Omega,$$

где $p^i = \partial f / \partial x^i$, $d\Omega = dx^1\,dx^2 \ldots dx^n$.

Как обычно, F подчиняется условию

$$F(x, f, p) \geqslant m\{\Sigma_{i=1}^n (p^i)^2\}^{\alpha/2} \qquad (1)$$

(α и m — положительные постоянные).

Обобщая метод А. Г. Сигалова (РЖМат, 1954, 4059), рассмотревшего случай $\alpha = n = 2$, автор устанавливает существование непрерывных решений при $\alpha = n > 2$.

Пусть G — ограниченная область n-мерного евклидова пространства R^n, $n > 2$, граница которой G' равномерно регулярна в следующем смысле: существует такое $\delta > 0$, что каждый n-мерный шар радиуса меньше δ не содержит ни одной компоненты G'.

Индуктивно по n определяется класс A^α ($\alpha > 1$) непрерывных функций, заданных в $\overline{G}$. При $n = 1$ функции $f \in A^\alpha$ абсолютно непрерывны в обычном смысле, причем $\int_G |f'(x)|^\alpha\,dx < \infty$, а при $n > 1$ выполнены следующие условия:

а) $f(x)$ принадлежит классу A^α по $x^1, \ldots, x^{i-1}, x^{i+1}, \ldots, x^n$ для почти всех значений x^i ($i = 1, \ldots, n$);

б) $\int_G \{\Sigma_{i=1}^n (p^i)^2\}^{\alpha/2}\,d\Omega < \infty$.

Часть графика f, лежащая над G', обозначается через $\{f, G'\}$. Для функций $f_1(x)$, $x \in \overline{G}_1$, $f_2(x)$, $x \in \overline{G}_2$, определяется число $r(f_1, f_2) = r(\{f_1, G_1'\}, \{f_2, G_2'\})$, где $r(E_1, E_2) = \max\{\rho(E_1, E_2), \rho(E_2, E_1)\}$, $\rho(E_i, E_j) = \sup_{P_i \in E_i} \{\inf_{P_j \in E_j} \rho_{R^n}(P_1, P_2)\}$.

Если $\overline{G}$ — конечный полиэдр, то на $\overline{G}$ можно обычным образом рассматривать кусочно-линейные функции. Пусть $F(x, f, p)$ — непрерывная функция, определенная при $x \in \overline{G}$, $|f| \leqslant M$, p^i произвольных и имеющая на том же множестве непрерывные производные F_{p^i}, а также удовлетворяющая условиям:

а) существуют числа $m > 0$ и $C > 0$ такие, что из $x \in \overline{G}$, $|f| \leqslant M$ и $\Sigma_1^n (p^i)^2 \geqslant C$ следует (1) с $\alpha = n$;

б) $\mathcal{E}(x, p, \overline{p}) = F(x, f, p) - F(x, f, \overline{p}) - \Sigma_{i=1}^n (p^i - \overline{p}^i) \times F_{p^i}(x, f, \overline{p}) \geqslant 0$ для $x \in \overline{G}$, $|f| \leqslant M$ и $p, \overline{p}$ произвольных;

в) существуют непрерывная выпуклая функция $\varphi(p)$ и постоянные A_1 и A_2 такие, что $A_1\varphi(p) \leqslant F(x, f, p) \leqslant A_2\varphi(p)$ для $x \in G$, $|f| \leqslant M$, p произвольных.

Функция $f(x)$, $x \in \overline{G}$, называется допустимой, если $f \in A^n$, $|f| \leqslant M$, $(f, G, F) = \int_G F(x, f, p)\,d\Omega < \infty$ и на G' f обращается в заданную на G' непрерывную функцию $\psi(x)$, $|\psi| \leqslant M$.

В работе намечены главные этапы доказательства следующей теоремы:

Если существует, по крайней мере, одна допустимая функция, то существует допустимая функция $f_0(x)$, дающая интегралу (f, G, F) абсолютный минимум в классе всех допустимых функций. При этом

$$(f_0, G, F) = \inf\{\underline{\lim}_{k\to\infty} (f_k, G_k, F)\},$$

где нижняя грань берется по всем последовательностям кусочно-линейных функций $\{f_k(x)\}$, $x \in \overline{G}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых $r(f_k, f_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

В процессе доказательства получены обобщения теоремы Л. Юнга об ε—δ-решетках и «теоремы о выборе» А. Г. Сигалова. А. И. Фет

490. **Дифференциальные уравнения и функции клеток. Х е р ш** (Équations différentielles et fonctions de cellules. H e r s c h J o s e p h), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 15, 1602—1604 (франц.)

Пойа (G. Pólya) в лекциях, читанных в Цюрихской политехнической школе зимой 1953/54 г., предложил метод оценки сверху минимальных значений функционалов, зависящих от функций двух переменных. Метод Пойа основан на решении уравнений в конечных разностях, причем решение истолковывается как «функция узлов» соответствующей сети квадратов. В реферируемой работе предлагается процесс, «двойственный» процессу Пойа, в котором используются «функции клеток» (понятие, заимствованное из топологии); процесс приводит к оценкам снизу для минимальных значений функционалов. Излагается лишь общая идея метода. Пусть функция φ, заданная в плоской области G, дает минимум функционалу $R[p]$ в классе $\{p\}$ допустимых функций сравнения и удовлетворяет уравнению Эйлера $L[\varphi] = 0$; полагается $X = R[\varphi]$.

Берется квадрильяж плоскости с шагом h и на множестве квадратов Q_i, пересекающих $\overline{G}$, определяются функции клеток $\nu(Q_i)$. В классе $\{\nu_h\}$ таких функций разыскивается минимум некоторого функционала $R_h^\square$; минимизирующая функция клетки u_h удовлетворяет некоторому уравнению в конечных разностях $L_h^\square(u_h) = 0$. Предполагается, что можно для каждого h определить $R_h^\square$ и $L_h^\square$ таким образом, чтобы при $h \to 0$ $Y_h^\square = R_h^\square(u_h) \to X$ и чтобы существовали неравенства вида $Y_h^\square \leqslant f_{h/2}(Y_{h/2}^\square)$, где f — известная возрастающая функция. Оценки такого рода удается провести, используя то обстоятельство, что каждая функция клетки ($h/2$)-квадрильяжа индуцирует некоторую функцию клетки h-квадрильяжа. Последовательно находится

$$Y_h^\square \leqslant f_{h/2}(Y_{h/2}^\square) \leqslant f_{h/2}(f_{h/4}(Y_{h/4}^\square)) \leqslant \ldots,$$

откуда получается неравенство, связывающее $Y_{h/2^n}^\square$ и $Y_h^\square$. При $n \to \infty$ получается неравенство вида $X \geqslant F_h(Y_h^\square)$, где F_h вычисляется по f_h; это и есть оценка снизу для X.

В виде приложения рассматривается задача о собственных значениях мембраны: $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$, $\varphi = 0$ на границе.

За $L_h^\square = 0$ принимается уравнение, аналогичное употребляемому в методе сеток, за $R_h^\square$ — соответствующий этому уравнению функционал. Пусть ${}_h\Lambda_1 = \min_\nu R_h^\square(\nu)$, $\lambda_1 = \min_\varphi R[\varphi]$. Утверждается, что применение метода

«функций клеток» приводит к неравенству

$$\lambda_1 \geqslant 8h^{-2}\left[\arcsin\sqrt{{}_h\Lambda_1/8}\right]^2 = F_h\,({}_h\Lambda_1).$$

Точные формулировки и доказательства в работе не приводятся. А. И. Фет

491. Некоторые свойства оптимальных линейных фильтров. Саймон (Some properties of optimal linear filters. Simon Herbert A.), Quart. Appl. Math., 1955, **12**, № 4, 438—440 (англ.)

Математическое содержание работы сводится к следующему. Разыскивается минимум интеграла

$$F = \int_{t_0}^{t_1} \varphi\,[y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)]\,dt,$$

где φ — полином. Для того чтобы соответствующее уравнение Эйлера — Пуассона было линейно, необходимо и достаточно, чтобы

$$F = \int_{t_0}^{t}\left[c + \sum_{i=0}^{n} b_i y^{(i)} + \sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij} y^{(i)} y^{(j)}\right] dt + \xi,$$

где ξ — функция от краевых данных $y(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0)$, $y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$.

При этом условии уравнение содержит лишь четные производные и получаются неустойчивые решения, не соответствующие природе задачи.

Это обстоятельство (обусловленное требованием линейности уравнения Эйлера — Пуассона) автор неправильно объясняет тем фактом, что экстремаль не всегда дает минимум функционалу F. А. И. Фет

492. Замечания к одной вариационной задаче. Фрике (Bemerkungen zu einer Variationsaufgabe. Fricke A.), Elem. Math., 1955, **10**, № 3, 61—65 (нем.)

Решается следующая задача, приводящаяся к изопериметрической. Из плоскости yOz координатной системы (x, y, z) вырезаются четыре конгруэнтных листка, симметричных относительно осей Oy и Oz, имеющих одинаковый диаметр a и общую точку в начале координат. Контурная кривая C полученной четырехлепестковой фигуры выбирается так, что после изгибания листков в цилиндрические поверхности с образующими, соответственно параллельными осям Oy и Oz, получается замкнутое тело, симметричное относительно плоскостей $y = 0$, $z = 0$, $y = \pm z$. Находится контурная кривая C, при которой вышеуказанное тело имеет наибольший объем. Л. Я. Цлаф

См. также: 299, 361, 433, 443, 572

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

493. О пределах коэффициентов последовательностей обобщенных полиномов. Татаркевич (Sur les limites des coefficients des suites des polynômes généralisés. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1952, **A6**, 47—54 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Пусть C_δ — пространство Банаха с нормой $\delta(x)$. Пусть $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ — система из C_δ (последовательность называется системой, если $z_1, \ldots, z_n$ при всяком n линейно независимы). $\varepsilon_n(k)$ — наилучшее приближение z_k посредством обобщенных полиномов $\beta_1 z_1 + \ldots + \beta_{k-1} z_{k-1} + \beta_{k+1} z_{k+1} + \ldots + \beta_n z_n$ степени n (при норме $\delta(x)$), где β_i — любые вещественные числа.

Основной результат:

Теорема 3.1. Пусть $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ — система пространства C_δ, $f \in C_\delta$ и последовательность обобщенных полиномов

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^n z_i$$

такова, что для определенного k

$$\delta(x_n - f) = o\,[\varepsilon_n(k)]. \qquad (1)$$

Тогда существует конечный предел $\alpha_k(f) = \lim_{n\to\infty} \alpha_k^n$, который не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$ (среди последовательностей, удовлетворяющих (1)).

Доказывается также, что если $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ есть замкнутая последовательность в C_δ и если существует последовательность чисел $\{\varepsilon_k\}$ таких, что $\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_k > 0$ для всех n и k, то последовательность Z является минимально замкнутой, и наоборот.

Примечание референта. В доказательстве теоремы 3.1 имеется неточность: из неравенства $\varepsilon_n(k) \geqslant \varepsilon_{n+m}(k)$ не вытекает неравенство

$$\frac{\delta(x_n - f) + \delta(x_{n+m} - f)}{\varepsilon_{n+m}(k)} \leqslant \frac{\delta(x_n - f)}{\varepsilon_n(k)} + \frac{\delta(x_{n+m} - f)}{\varepsilon_{n+m}(k)}.$$

Осталось неясным, верна ли эта теорема. А. Х. Турецкий

494. Некоторые теоремы о пределах последовательностей. Фернандиш-Кошта (Einige Sätze über Grenzwerte von Folgen. Fernandes Costa M. A.), Gaz. mat. Lisbõa, 1953, **14**, № 54, 7—13 (порт.)

Перевод из Zbl. Math., 1954, **51**, № 1—5, 45.

495. О римановых производных для суммируемых функций. Бацер, Козакевич (On the Riemann derivatives for integrable functions. Butzer P. L., Kozakiewicz W.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 4, 572—581 (англ.)

Римановой производной s-го порядка от функции $f(x)$ в точке x называется предел (если таковой существует) $\lim_{h\to 0}(2h)^{-s}\,\Delta_{2h}^s f(x)$, где $\Delta_{2h}^s f(x)$ определяется соотношениями

$$\Delta_{2h}^1 f(x) = f(x+h) - f(x-h),\quad \Delta_{2h}^{s+1} f(x) = \Delta_{2h}^1\,[\Delta_{2h}^s f(x)].$$

В работе дается своего рода обобщение для $s = 3, 4, \ldots$ известной теоремы Валле-Пуссена о построении первообразной функции (Валле-Пуссен. Курс анализа бесконечно малых, т. 1, Л. — М., 1933, § 290), а именно доказано, что если $f(x)$ и $g(x)$ — суммируемые на $[a, b]$ функции, то тогда для того чтобы почти всюду имело место равенство

$$f(x) = \int_c^x dt_1 \int_c^{t_1} dt_2 \ldots \int_c^{t_{s-1}} g(t_s)\,dt_s + P_{s-1}, \qquad (1)$$

где $c \in [a, b]$, а $P_{s-1}(x)$ — некоторый многочлен, необходимо и достаточно, чтобы существовала последователь-

ность $\{h_n\}$, $h_n \to 0$, $h_n > 0$, такая, что во всяком сегменте $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ выполняются условия:

а) $(2h_n)^{-s} \int_\alpha^\beta | \Delta_{2h_n}^s f(x) | \, dx \leqslant M$ (M — постоянная, $n = 1, 2, \ldots$),

б) $(2h_n)^{-s} \int_\alpha^\beta \Delta_{2h_n}^s f(x)\, dx \to \int_\alpha^\beta g(x)\, dx$.

Кроме того, доказано, что суммируемая функция $f(x)$ является многочленом $(s-1)$-го порядка $P_{s-1}(x)$ тогда и только тогда, когда а) $f(x)$ почти всюду в (a, b) совпадает с некоторой функцией $\varphi(x)$, которая представима в виде разности двух функций, выпуклых порядка l (функция $\varphi(x)$ называется в (a, b) выпуклой порядка l, если $\Delta_{2h}^{l+1} f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in (a + lh, b - lh)$) б) при $h \to 0$, каков бы ни был сегмент $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, должно быть $\int_\alpha^\beta \Delta_{2h}^s f(x)\, dx = o(h^s)$.

Ставится задача — доказать при $s = 5, 6, \ldots$ (при $s < 5$ это известно), что равенство (1) имеет место также при условии, что в интервале (a, b) функция $f(x)$ непрерывна, имеет всюду производную $(s-2)$-го порядка $f^{(s-2)}(x)$ и имеет конечную суммируемую риманову производную s-го порядка $g(x)$. В. К. Дзядык

496. По поводу статьи Гриффита. Боссон (Note on a paper by J. L. Griffith. Bosson G.), J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1954, **88**, № 1, 12—14 (англ.)

Пусть $f(x, y, z)$ имеет производные всех порядков внутри и на границе сферы радиуса λ с центром в точке (x, y, z). Автор доказывает, что если: 1) $f(x, y, z)$, как функция x и y, имеет все производные внутри и на границе круга радиуса λ с центром в (x, y); 2) $f(x, y, z)$, как функция z, разлагается в сходящийся ряд Маклорена, — то справедлива формула

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + \lambda \sin\theta \cos\varphi,\ y + \lambda \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z + \lambda \cos\theta) \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = \frac{\operatorname{sh} \lambda \nabla_3}{\lambda \nabla_3} \cdot f(x, y, z), \qquad (1)$$

где $\nabla_3^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$.

Эта формула обобщает известную теорему о среднем для гармонической функции и аналогичную теорему Гриффита (Griffith, J. and Proc. Roy. Soc. N. S. Wales, 1954, 87, 51), полученную для функций двух переменных. С помощью формулы (1) автор получает известную формулу Пуассона для решения трехмерного волнового уравнения с начальными данными.

Примочание референта. Автор не указывает, что формула Пуассона получается при гораздо меньших предположениях относительно начальных данных, чем этого требует формула (1). А. И. Кошелев

497. О произведениях определенных производных произвольного порядка. Мамбриани (Su i prodotti delle derivazioni definite, d'ordine qualsiasi. Mambriani Antonio), Rev. mat. Univ. Parma. 1954, 5, № 1—3, 209—215 (итал.)

Продолжая изучение «определенных производных» произвольного порядка, определяемых формулой

$$D_{x_0}^\nu f(x) = \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} f(t)\, dt$$

(РЖМат, 1955, 1331), автор устанавливает для них формулу умножения

$$D_{x_0}^\mu D_{x_0}^\nu f(x) = D_{x_0}^{\mu+\nu} f(x) -$$

$$- \sum_{k=1}^n \left[D_{x_0}^{\nu-k} f(x) \right]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{-\mu-k}}{\Gamma(-\mu-k+1)}, \qquad (1)$$

где n — какое-либо натуральное число $> \operatorname{Re} \nu$ (если ν — натуральное число, то можно взять $n = \nu$). При этом сумма в (1) отсутствует, если: 1) μ — любое, $\operatorname{Re} \nu < 0$; или 2) $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, а ν — любое. М. К. Фаге

498. К двумерной проблеме моментов. Натансон И. П., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 5, 35—40.

Показано, что известные условия Хаусдорфа (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., М.—Л., 337—338), характеризующие последовательности моментов функций из $L_p(0,1)$ $(p > 1)$, а также функций измеримых и ограниченных, непосредственно переносятся на двумерный случай, когда областью интегрирования является квадрат. Н. И. Ахиезер

499. Исследование α-вариации. I. Геринг (A study of α-variation. I. Gehring F. W.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 3, 420—443 (англ.)

Винеру (Wiener N., J. Math. and Phys., 1924, **3**, 73—94) принадлежит (в существенном) следующее обобщение понятия вариации функции: α-вариацией $(0 < \alpha \leqslant 1)$ функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ $(v_\alpha \{f(x); a \leqslant x \leqslant b\})$ называется точная верхняя грань сумм $\{\sum_{n=1}^N | f(x_n) - f(x_{n-1}) |^{1/\alpha}\}^\alpha$, взятая по всем разбиениям $a = x_0 < \ldots < x_N = b$; 0-вариацией называется колебание $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

В вводной части работы излагаются результаты (в основном известные), устанавливающие связь между ограниченностью α-вариации и выполнением различных условий типа Липшица. Приводятся также две теоремы Юнга (Young L. C. Math. Ann., 1938, **115**, 581—612), играющие существенную роль в дальнейшем; одна из них устанавливает существование интеграла Стильтьеса

$$\int_0^1 f(x)\, dg(x),$$

где $f(x) \in W_\alpha$ (W_α — класс функций ограниченной α-вариации на $[0,1]$), $g(x) \in W_\beta$, $\alpha + \beta > 1$, другая выясняет условия, при которых возможен предельный переход

$$\int_0^1 f(x)\, dg_n(x) \to \int_0^1 f(x)\, dg(x) \quad (f \in W_\alpha,\ g_n \in W_\beta,\ \alpha + \beta > 1).$$

Далее понятие α-вариации применяется к проблеме моментов.

Пусть $\mu_n = \int_0^1 x^n dg(x)$ или $\mu_n = \int_0^1 x^n g(x)\, dx$ $(g \in W_\alpha;\ n = 0, 1, \ldots)$. Числа μ_n называются соответственно стильтьесовыми и лебеговыми моментами функции $g(x)$. Определим линейный функционал $\mu(P)$ на пространстве многочленов

$$\mu(P) = \mu\left(\sum_0^N a_n x^n\right) = \sum_0^N a_n \mu_n$$

и обозначим

$$\lambda_{k,n}(x) = \binom{k}{n} x^n (1-x)^{k-n},\ \lambda_{k,n} = \mu(\lambda_{k,n}(x)) \quad (n = 0, 1 \ldots k;\ k = 0, 1, \ldots).$$

Теорема 2.1.2. Для того чтобы числа $\{\mu_n\}$ были стильтьесовыми моментами функции $g(x) \in W_\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, где $V_\alpha \{f(x);\ 0 \leqslant x \leqslant 1\} \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\{\sum_{n=0}^k | \sum \lambda_{k,n} |^{1/\alpha}\}^\alpha \leqslant 1$ при всех k.

Теорема 2.4.1. Для того чтобы числа μ_n были лебеговыми моментами функции $g(x) \in W_\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$, где $V_\alpha \{f(x); 0 \leqslant x \leqslant 1\} \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы $(k+1)\{\sum_{n=1}^k | \sum \lambda_{k,n} - \lambda_{k,n-1} |^{1/\alpha}\}^\alpha \leqslant 1$ при всех k.

Затем вводится понятие α-сходимости, а также $(C, k; \alpha)$- и (A, α)-суммируемости ряда, обобщающие соответственно понятия абсолютной сходимости и абсолютной суммируемости ряда. Так, ряд $\sum_0^\infty a_n$ называется α-сходящимся, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\left\{\sum_{\nu=m}^{n} \left|\sum a_\nu\right|^{1/\alpha}\right\}^\alpha < \varepsilon$$

при $n > m \geqslant N(\varepsilon)$. Доказываются теоремы абелева типа $(C, j; \alpha) \subset (C, k; \alpha) \subset (A; \alpha)$ $(-1 < j < k, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, а также элементарные теоремы тауберова типа с условиями: а) $\{na_n\}$ α-сходится к нулю; б) $\{n^{-1}(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n)\}$ α-сходится к нулю. Б. И. Коренблюм

500. О суммировании двойных интегралов. Челидзе В. Г., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, 20, 131—143

Пусть функция $f(t, \tau)$, определенная в области R $(0 \leqslant t < \infty, 0 \leqslant \tau < \infty)$, интегрируема на каждом сегменте $[0 \leqslant t \leqslant x, 0 \leqslant \tau \leqslant y]$. Положим

$$S(t, \tau) = \int_0^t \int_0^\tau f(u, v)\, du dv.$$

Число S называется $C^\lambda_{\gamma,\delta}$-пределом $(\lambda \geqslant 1, \gamma > 0, \delta > 0, \gamma\delta \leqslant 1)$ функции $S(t, \tau)$ при $(t, \tau) \to \infty$, если $\frac{1}{xy}\int_0^x \int_0^y S(t, \tau)\, dt d\tau \to S$ $(x \to +\infty, y \to \infty, \lambda^{-1}x^\gamma \leqslant y \leqslant \lambda x^{1/\delta})$.

В этом случае $f(t, \tau)$ называется $C^\lambda_{\gamma\delta}$-интегрируемой на R.

Если двойной интеграл

$$F(p, q) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-pt-q\tau} f(t, \tau)\, dt d\tau =$$

$$= \lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \int_0^x \int_0^y e^{-pt-q\tau} f(t, \tau)\, dt d\tau$$

сходится при любых $p > 0, q > 0$ и $\lim F(p, q) = S$ $(p \to +0, q \to +0, \lambda^{-1}p^{1/\delta} \leqslant q \leqslant \lambda p^\gamma)$, то число S называется $A^\lambda_{\gamma\delta}$-пределом функции $S(t, \tau)$ при $t, \tau \to \infty$, а функция $f(t, \tau)$ — $A^\lambda_{\gamma\delta}$-интегрируемой на R.

Основной результат работы: пусть $S(t, \tau)$ удовлетворяет условиям:

1) $\lim\limits_{t \to \infty} \tau^{-\delta} S(t, \tau) = \omega(t)$ равномерно по t в любом конечном промежутке;

2) $\lim\limits_{t \to \infty} t^{-\gamma} S(t, \tau) = \chi(\tau)$ равномерно по τ в любом конечном промежутке;

3) $\int_0^x \omega(t)\, dt \to 0$ $(x \to \infty)$, $\int_0^y \chi(\tau)\, d\tau \to 0$ $(y \to \infty)$.

Тогда из существования предела $\lim_{t \to \infty, \tau \to \infty} S(t, \tau) = S$ следует существование $C^\lambda_{\gamma,\delta}$- и $A^\lambda_{\gamma,\delta}$-пределов функции $S(t, \tau)$ при $(t, \tau) \to \infty$ и равенство их числу S.

В работе имеется много опечаток. Б. И. Коренблюм

501. Асимптотические выражения некоторых интегралов, подинтегральные функции которых принимают свое наибольшее значение на границе области интегрирования. Сюй Ли-чжи (许里志), 数學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 3, 305 — 316 (кит.; резюме англ.)

Рассматриваются такие точки $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ границы области D, которые лежат на пересечении двух $(n-1)$-мерных гиперповерхностей S_1 и S_2 с непрерывно вращающимися касательными гиперплоскостями и в которых угол θ между этими гиперплоскостями удовлетворяет неравенствам: $0 < \theta < \pi$. При этом предполагается, что S_1 и S_2 являются частями границы области D и что ξ является обыкновенной точкой S_1 и S_2. Тогда, если: 1) функции $\varphi(u_1, \ldots, u_n) \equiv \varphi(u)$ и $f(u_1, \ldots, u_n) \equiv f(u) > 0$ определены в D и $\varphi(u)\,[f(u)]^N$ абсолютно интегрируема по D для любого $N > 0$, 2) все частные производные второго порядка функции $f(u)$ существуют и непрерывны, 3) функция $f(u)$ принимает свое наибольшее значение в точке $\xi = (0, \ldots, 0)$ границы D,

$$4) \lim_{u \to \xi)} f'_{u_i}(u) = 0, \quad \lim_{u \to \xi)} \det\left[-f''_{u_i, u_k}(u)\right] > 0,$$

где $u \to \xi)$ означает, что u стремится к ξ изнутри D, 5) функция $\varphi(u)$ непрерывна в точке $\xi = (0, \ldots, 0)$ и $\varphi(\xi) \neq 0$, — то при $N \to \infty$

$$J(N) = \int \ldots \int_D \varphi(u_1, \ldots, u_n)\,[f(u_1, \ldots, u_n)]^N du_1 \ldots$$

$$\ldots du_n \sim \frac{\varphi(\xi)\,[f(\xi)]^N}{2\pi\sqrt{|A|}} \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{n/2} \times$$

$$\times \arccos\left(\frac{\alpha A^{-1}\beta'}{(\alpha A^{-1}\alpha')^{1/2}\,(\beta A^{-1}\beta')^{1/2}}\right),$$

где $A = [-\Psi''_{u_i u_k}(\xi)]$ — матрица гессиана функции $-\Psi(u) = -\ln f(u)$, а α и β — векторы, нормальные в точке ξ к S_1 и S_2 и ориентированные так, что угол между ними равен θ.

Выводится также асимптотическое выражение для $J(N)$ при $n = 2$ в том случае, когда угол $\theta = 0$, т. е. кривые S_1 и S_2 касаются друг друга в острие ξ. Это выражение зависит от радиусов кривизн S_1 и S_2 в точке ξ.

Тот случай, когда ξ — обыкновенная точка границы области D, был рассмотрен автором в предыдущих работах (Hsu L. C., Duke Math. J., 1948, **15**, 623—632; Amer. J. Math., 1948, **70**, 698—708). В. И. Левин

502. О нерегулярности распределений. Рот (On irregularities of distribution. Roth Klaus Friedrich), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 63 (англ.)

Сформулирована теорема:

Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_N$ — точки (не обязательно различные) в квадрате $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Обозначим через $S(u, v)$ число точек P_i в прямоугольнике $0 < x < u$, $0 < y < v$; тогда $\int_0^1 \int_0^1 (S(x, y) - Nxy)^2\, dxdy > c \ln N$, где c — абсолютная константа.

Доказательство не приведено. Если обобщить понятие регулярного распределения (just distribution) точек на прямой, введенное Аардене-Эренфест (Aardenne-Ehrenfest T. van, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. wetensch., 1949, **A52**, 734—739) на случай плоскости, то из теоремы, приведенной в работе, следует, что регулярных распределений точек на плоскости существовать не может. В. М. Бабич

503. О средних Коши (о степенных средних). Паше (Über die Cauchysche Mittelwertefunktion (Potenzmittel). Paasche I.), Math. Naturwiss. Unterricht, 1954, **6**, 362—364 (нем.)

В последующем даны два различных доказательства устранимости точек разрыва, а также монотонности

средних $m(x)=m(x,z_\nu)=[(z_1^x+\ldots+z_n)/n]^{1/x}$ для любых $z_\nu>0$ и для $-\infty<x<\infty$. Выдержка из работы.

Перевод из Math. Revs, 1954, № 7, 608.

504. **Об одном интегральном неравенстве. Татаркевич** (Sur une inégalité intégrale. Tatarkiewicz Krzysztof), Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska, 1953, A7, № 4, 83—87 (журнал вышел из печати в 1954 г.) (франц.; резюме польск., русс.)

Доказывается теорема:

Пусть A_1 и A_2 — измеримые множества, f — функция, измеримая на $A=A_1+A_2$, и g — функция, суммируемая на A. Пусть далее $0\leqslant f(p_1)\leqslant g(p_1)\leqslant g(p_2)\leqslant f(p_2)$ для каждой пары точек p_1, p_2 таких, что $p_1\in A_1$, $p_2\in A_2$. Если $\int_A g(p)\,dp\leqslant\int_A f(p)\,dp$, то $\int_A[g(p)]^2dp\leqslant\int_A[f(p)]^2dp$.

Приводится пример, показывающий, что условие суммируемости функции g существенно. А. Х. Турецкий

505. **Об одном простом обобщении теоремы Гюльдена. Геронимус Я. Л.,** Тр. Харьковск. авиац. ин-та, 1954, № 15, 21—23

Элементарными соображениями устанавливается теорема: Объем, описанный поверхностью S при ее перемещении в пространстве, равен сумме работ нормальных единичных давлений, приложенных к этой поверхности. И. В. Матвеев

506. **Метод оценки некоторых определителей. Берчналл** (A method of evaluating certain determinants. Burchnall J. L.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, 9, №2, 100—104 (англ.)

Формулируется следующий метод: если билинейная форма, задаваемая квадратной матрицей $\|a_{st}\|$, допускает представление в виде:

$$\sum_{s,t=0}^{n}a_{st}X_sY_t=\sum_{r=0}^{n}c_r\left\{\sum_{s=r}^{n}p_{rs}X_s\right\}\cdot\left\{\sum_{t=r}^{n}q_{rt}Y_t\right\}$$

и $p_{rr}=q_{rr}=1$, то $|a_{st}|=\prod_{r=0}^{n}c_r$. Это равенство применяется к выводу некоторых соотношений для полиномов Эрмита, Лежандра и гипергеометрических функций Аппеля. Большинство результатов было получено раньше другими методами. К. А. Барсуков

507. **Об одном преобразовании цепных дробей типа S. Райт** (A transformation for S-fractions. Wright Fred M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 888—901 (англ.)

Исследуется связь между степенным рядом

$$Q(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu_nw^{n+1}\qquad(1)$$

и корреспондирующей цепной дробью типа S

$$\frac{c_1w}{1}+\frac{c_2w}{1}+\cdots+\frac{c_mw}{1}+\cdots,$$

конечной или бесконечной. Общие результаты в этом направлении принадлежат Стилтьесу.

Автор ставит и полностью решает специальную задачу: предполагая, что рядам $Q(w)$ и $P(w)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_nw^{n+1}$ корреспондируют конечные дроби типа S порядков $2k-1$ и $2k$, соответственно установить ту связь между этими двумя дробями которая равносильна соотношению $P(w)=\lambda_0w+wQ(w)$ (или, что то же, $\lambda_n=\mu_{n-1}$, $n=1,2,\ldots$). Решение дается в виде представления элементов этих дробей как функций некоторой конечной группы параметров. Полученный таким образом критерий может быть применен к решению следующей задачи теории моментов. Предполагая, что μ_0, $\mu_1,\ldots$ есть ряд моментов в интервале $(0,\infty)$ и что ряду (1) корреспондирует конечная дробь типа S, найти условия, при которых последовательность λ_0, $\lambda_1(=\mu_0)$, $\lambda_2(=\mu_1),\ldots$ также будет рядом моментов (случай бесконечной корреспондирующей дроби рассматривался автором в других работах).

В заключительном параграфе решается та же задача для моментов в интервале (0,1). А. Я. Хинчин

508. **Заметка об одном вопросе, предложенном П. Эдрёшем и Л. К. Хуа. Авакумович** (A note on a question set by P. Erdös and L. K. Hua. Avakumović Vojislav G.), Publs Inst. math. Acad. Serbe des sci., 1954, 6, 47—56 (англ.)

П. Эрдёш (Erdös P., J. Indian. Math. Soc., 1949, 13, № 4, 131—147), отвечая на вопрос Хуа Ло-кена, показал, что из $\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu s_{n-\nu}=\frac{1}{2}n^2+O(n)$ $(n\to\infty)$, где $s_n=\sum_1^n a_\nu$, $a_n\geqslant0$, нельзя вывести, что $s_n=n+o(\sqrt{n})$. Автор показывает, что в этом случае справедлива оценка $s_n=n+O(n^{\sqrt{3}-1+\varepsilon})$ для любого $\varepsilon>0$. Аналогичная оценка справедлива для неубывающей функции $a(x)$ $(x\geqslant0, a(0)=0)$, если $\int_0^x a(x-u)\,da(u)=\frac{1}{2}x^2+O(x)$ $(x\to\infty)$. Доказательство основано на рассмотрении интеграла

$$J(s)=s\int_0^\infty e^{-sx}\{a(x)-x\}x^{-1/k}dx\qquad(k>1,\ \mathrm{Re}\,s>0),$$

причем применяется следующий результат автора (Math. Z., 1940, 46, 650—664):

Пусть $J(s)=s\int_0^\infty e^{-sx}A(x)\,dx$ $(\mathrm{Re}\,s>0)$ удовлетворяет условиям:

1) $J(s)$ ограничена внутри выпуклой области D, граница которой имеет в точке $s=0$ касание $(k-1)$-го порядка с мнимой осью $(k>1)$;

2) $$H(y)=\lim_{\delta\to0+}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y\sigma}{\sigma}J(\delta+|\sigma|^k+i\alpha\sigma)d\sigma=o(1)$$
$$(y\to\infty),$$

где константа α такова, что точки $|\sigma|^k+i\alpha\sigma$ $(\sigma\neq0)$ лежат внутри области D.

Пусть далее $A(x)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале и $A(x')-A(x)>-m$ при $x\leqslant x'\leqslant x+x^{1/k}$. Тогда $A(x)=O(1)$ $(x\to\infty)$.

Тауберовы теоремы подобного типа возникли в связи с новым доказательством асимптотического закона простых чисел (см. цит. статью П. Эрдёша).

Опечатка: на стр. 51, 4-я строка сверху, должно быть

$$\frac{s}{\Gamma(1/k)}\int_s^{\infty\cdot e^{i\varphi}}\left\{y(\tau)-\frac{1}{\tau}\right\}(\tau-s)^{\frac{1}{k}-1}\frac{d\tau}{\tau}.$$

Б. И. Коренблюм

509. **Уточнение формулы для подсчета сумм четных степеней расстояний до вершин правильного многоугольника (Замечания по поводу статьи, опубликованной в вып. № 13 Трудов МНИ за 1953 г.), Щелкачев В. Н.,** Тр. Моск. нефт. ин-та, 1955, № 14, 280—283

Указывается, что формула для $\sum_{\nu=1}^{n}r_\nu^{2\sigma}$ (РЖМат, 1954, 2602) верна лишь при $\sigma<n$. Для случая $\sigma\geqslant n$ приводится более сложная формула. А. А. Конюшков

510. **Об одной системе функциональных уравнений. Георгиу** (Despre un sistem de ecuaţii funcţionale. Gheorghiu Octavian Em.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 11, 573—578 (рум.; резюме русс., франц.)

Находятся системы трех функций $T_i(u,v,w)$ $(i=1,2,3)$, для которых $T_i(u+u',v+v',w+w')$ $(i=1,2,3)$ являются рациональными функциями заданного вида от

$T_k = T_k(u, v, w)$, $T'_l = T_l(u', v', w')$, например,

$$T_1(u+u', v+v', w+w') = \frac{T_1 + T'_1 + T_2T'_3 + T_3T'_2}{1 + \sum_{i=1}^{3} T_iT'_i}$$

Затем находятся системы пяти функций $Q_i(u, v, w)$ $(i=1,2,3,4)$; $\lambda(u, v, w, u', v', w')$, для которых $\lambda Q_i(u+u', v+v', w+w')$ $(i=1, 2, 3, 4)$ являются целыми рациональными функциями заданного вида от $Q_k(u, v, w)$, $Q_l(u', v', w')$. П. И. Романовский

511. Периметр эллипса. Сандем (The perimeter of an ellipse. Sandham H. F.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 65—66 (англ.)

Известно, что длина эллипса не выражается в общем случае через элементарные функции. Автор указывает специальный случай, когда длина эллипса может быть выражена в конечном виде, именно длина эллипса с большой полуосью a и эксцентриситетом $e=\sqrt{(1/2) - 3\sqrt{7}/16}$ равна

$$2\pi a \left\{ \frac{4\pi}{7^{5/4}\Gamma(1/7)\,\Gamma(4/7)\,\Gamma(9/7)} + \right.$$
$$\left. + \frac{7^{3/4}\Gamma(1/7)\,\Gamma(4/7)\,\Gamma(9/7)}{4\pi^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) \right\}.$$

И. И. Пятецкий-Шапиро

512 К. Математический анализ. Т. 2. Аналитические функции и линейные дифференциальные уравнения в комплексной области. Т. 3. Дифференциальные уравнения с частными производными. Мальмквист, Стенстём, Даниэльсон (Matematisk analys. Bd. 2. Analytiska funktioner och lineära differentialekvetioner i der komplexa omradet. Malmqvist J., Stenström V., Danielson S., 451 s., 102 fig., 72 kr., Bd. 3. Partiella differentialekvetioner, 600 s., 82 fig., 85 kr., Stockholm, Natur och Kultur, 1953), Tekn. tidskr., 1954, 84, № 1, 18 (швед.)

513 К. Курс высшей математики. Ч. III. Дифференциальное исчисление. Георгиу (Curs de matematici superioare. Part. III. Calculul diferential. Gheorghiu Gh. Th., Timişoara, Ed. Inst. Politehnic, 1954, 403—653 p., Curs litografiat), Bul. bibliogr., 1954, **A3**, № 23, 13 (рум.)

514 К. Десять глав из дифференциального и интегрального исчисления. Груша (Deset kapitol z diferenciálního a integrálního počtu. 2 vyd. Hrušа K., Věcny rejstřik, Sekce mat.-fys., Sv. 4, Praha, Nakl. Čs. ak. věd, 1954, 205, 2 s., 15 Kčs.), Česká kniha, 1954, № 22, 625 (чеш.)

515 К. Суммирование бесконечно малых величин. Натансон И. П. Л., Гостехтеоретиздат, 1953, 56 стр., 80 коп.

516 К. Введение в исчисление бесконечно малых. Веселый (Uvod do počtu infinitesimálního. Vesely Ferdinand. Praha, SPN, 1954, 162 s., 11,25 Kčs), Česká kniha, 1954, № 37, 947 (чеш.)

517 К. Очерк математического анализа для кандидатов на диплом по дифференциальному и интегральному исчислению. Т. I. Теория функций действительного переменного, теория аналитических функций. Лене (Précis d'analyse mathématique, à l'usage des candidats au certificat de calcul différentiel et intégral. T. I. Théorie des fonctions de variables réelles, théorie des fonctions analytiques. Lainé E., 6 éd., Paris, Vuibert, 1953, VIII—303 p., 672 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, 3 part., № 20, 462 (франц.)

518 К. Введение в исчисление конечных разностей. Ричардсон (An introduction to the calculus of finite differences. Richardson C. H., New York, Van Nostrand, London, Macmillan, 1954, 142 pp., 28 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 245, 7 (англ.)

519 К. О поведении интегралов однородных и неоднородных суммовых уравнений на бесконечности. Паше (Über das Verhalten der Integrale homogener und inhomogener Summengleichungen im Unendlichen. Paasche I. München, Düsseldorf: Oldenbourg, 1954, 59 S., 5.90 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 29, 1399 (нем.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

520. Асимптотика. I. Корпут (Asymptotics. I. Corput J. G. van der), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 3, 206—217; Indagationes Math., 1954, **16**, № 3, 206—217 (англ.)

Систематическое изложение асимптотического анализа функций аргумента ω. Определения: если существует такое вещественное p, что $A = O(|\omega|^p)$, то A называется асимптотически конечным (а-конечным); асимптотическое (а-) равенство $A \sim B$ означает, что для любого вещественного q $A - B = O(|\omega|^{-q})$; если для каждого достаточно большого натурального h существует такое вещественное q_h, что $q_h \to \infty$ при $h \to \infty$ и $A_h = s + O(|\omega|^{-q_h})$, то говорят, что A_h асимптотически (а-) стремится к пределу s, а также любому s', а-равному s; ряд $a_0 + a_1 + \ldots$ называется асимптотически (а-) сходящимся к s (а-сумма), если $A_h = a_0 + a_1 + \ldots + a_{h-1}$ а-стремится к пределу s, в записи $\Sigma'_{h=0}^{\infty} a_h \sim s$ (штрих у суммы отличает а-сходимость от сходимости, пример: для $\omega \geqslant 1$ положим $a_h = e^{-\omega}$ при $0 \leqslant h < e^{\omega}$ и $a_h = 0$ при $h \geqslant e^{\omega}$; тогда $1 \leqslant \Sigma_{h=0}^{\infty} a_h < 1 + e^{-\omega}$ и, следовательно, $\Sigma_{h=0}^{\infty} a_h \sim 1$, тогда как $\Sigma'_{h=0}^{\infty} a_h \sim 0$). В случае зависимости рассматриваемых величин от параметров вводятся определения равномерной а-конечности, равномерного а-равенства, равномерной а-сходимости и т. д. Доказываются теоремы: если $A \sim B$ и $C \sim D$, то $A \pm C \sim B \pm D$, и если, кроме того, B и C а-конечны, то $AC \sim BD$; если ряд $\Sigma_{h=0}^{\infty} A_h$ сходится и существуют такие $\varepsilon_h > 0$, что ряд $\Sigma_{h=0}^{\infty} \varepsilon_h$ сходится к а-конечной сумме, причем равномерно относительно $h = 0, 1, \ldots$ $\varepsilon_h^{-1} A_h \sim \varepsilon_h^{-1} B_h$, то ряд $\Sigma_{h=0}^{\infty} B_h$ сходится к сумме, а-равной $\Sigma_{h=0}^{\infty} A_h$; если A_h а-стремится к s и для каждого $h = 0, 1, \ldots$ $A_h \sim B_h$, то B_h а-стремится к s; если A_h а-стремится к s, B_h а-стремится к t, то $A_h \pm B_h$ а-стремится к $s \pm t$, и если, кроме того, s и t а-конечны, то $A_h B_h$ а-стремится к st; ряд $a_0 + a_1 + \ldots$ а-сходится в том и только в том случае, когда a_h а-стремится к нулю (основная теорема); если ряд $a_0 + a_1 + \ldots$ а-сходится и для каждого $h = 0, 1, \ldots$ $b_h \sim a_h$, то ряд $b_0 + b_1 + \ldots$ также а-сходится и его а-сумма а-равна а-сумме ряда $a_0 + a_1 + \ldots$; если $\Sigma'_{h=0}^{\infty} a_h \sim s$ и u а-конечно, то $\Sigma'_{h=0}^{\infty} u a_h \sim us$; если $\Sigma'_{h=0}^{\infty} a_h \sim s$, $\Sigma'_{h=0}^{\infty} b_h \sim t$, то $\Sigma'_{h=0}^{\infty} (a_h + b_h) \sim s \pm t$, и если, кроме того, a_h и b_h а-конечны для каждого $h = 0, 1, \ldots$, $\Sigma'_{h=0}^{\infty} c_h \sim st$, где $c_h = a_0 b_h + a_1 b_{h-1} + \ldots + a_h b_0$; пусть $t \sim \Sigma'_{h=0}^{\infty} a_h s^h$,

где $s \sim \sum_{k=1}^{\infty'} b_k z^k$, причем существует такое вещественное число p и $\delta > 0$, что для каждого $k = 1, 2, \ldots$ $a_k = O(|\omega|^p)$ и $b_k z^k = O(|\omega|^{-\delta})$, тогда $t \sim \sum_{n=0}^{\infty'} c_n z^n$, где $c_0 = a_0$, а для $n \geqslant 1$ коэффициенты c_n определяются формальным тождеством $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = \sum_{h=1}^{\infty} a_h \times \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k\right)^h$; если $\sum_{h=0}^{\infty'} s_h \sim s$, а $s_h \sim \sum_{k=0}^{\infty'} a_{hk}$, причем a_{hk} а-стремится к 0 при $h + k \to \infty$, то s является также а-суммой двойного ряда $\sum_{h,k=0}^{\infty'} a_{hk} \sim s$; если $\sum_{h=0}^{\infty'} a_h \sim s$, $\sum_{h=0}^{\infty'} b_h \sim t$ и для каждого $h = 0, 1, \ldots$ a_h и b_h а-конечны, то $\sum_{h,k=0}^{\infty'} a_h b_k \sim st$; если $a_h(z)$ $(h \geqslant 0)$ аналитичны в области D и равномерно относительно z а-стремятся к 0 в D, то в D существует аналитическая функция, которая в каждой точке D является а-суммой ряда $\sum_{h=0}^{\infty'} a_h(z)$; если $a_h(z)$ $(h \geqslant 0)$ и $f(z)$ аналитичны в области D, для которой точка $z = 0$ является граничной, и если в каждой точке D $f(z) \sim \sim \sum_{h=0}^{\infty'} a_h(z)$, то для $k = 1, 2, \ldots$ $f^k(z) \sim \sum_{h=0}^{\infty'} a_h^{(k)}(z)$ в каждой точке z из D, расстояние которой от границы D больше $c|\omega|^{-p}$, где c и p — произвольные фиксированные положительные числа. Формулируется и доказывается ряд других теорем, в частности, относящихся к асимптотике корней уравнений. В. И. Левин

521. О суммах сходящихся рядов. Шалат (O súčtoch istých konvergentných radov. Šalát Tibor), Mat.-fyz. časop., 1954, 4, № 4, 203—211 (словац.; резюме русс.)

Пусть $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — бесконечный ряд с положительными членами и суммой $\alpha < \infty$. Автор изучает структуру множества W всех чисел вида

$$\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \ldots + \varepsilon_n a_n + \ldots, \qquad (1)$$

где $\{\varepsilon_n\}$ пробегает всевозможные последовательности, состоящие из 1 и —1. Доказываются следующие утверждения:

1. W — совершенное множество, симметрично расположенное по отношению к точке 0.

2. В случае, когда $a_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$, центрами смежных интервалов множества W_∞ являются частные суммы рядов (1).

3. В случае, когда $a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$, множество W совпадает с сегментом $[-\alpha, \alpha]$.

Примечание референта. Аналогичные рассмотрения проводились В. В. Степановым (Матем. сб., 1923, 31, № 2, 256—265) и независимо референтом (Воронежск. ун-т. Науч. работы студентов, 1952, 17—22).

Вместо W изучалось множество E всех чисел вида (1), с той, однако, разницей, что $\varepsilon_n = 0$ или 1. Результаты реферируемой статьи содержатся в цитированных работах, если учесть, что $W = 2E - \alpha$. В этих работах приведено также дальнейшее исследование строения множества E и изучение его метрических свойств.

Ю. Т. Медведев

522. О разложении в ряд Тэйлора функции Дирака и разложении в ряд по функциям Дирака функции $e^{i\omega x}$. Лафлёр (Sur un développement en série de Taylor de la fonction de Dirac, et un développement en série de fonctions de Dirac de la fonction $e^{i\omega x}$. Lafleur Charles), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 8, 784—786 (франц.)

Известные простые формулы записываются с помощью δ-функции Дирака, например

$$F(x') = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}(x') \int_{-\infty}^{\infty} x^n F(x)\, dx,$$

$$e^{i\omega x} = \sum_0^{\infty} \frac{2\pi i^n}{n!} \delta^{(n)}(x)\, \delta^{(n)}(\omega).$$

Новых результатов работа не содержит. Формулы (5) и (11) статьи содержат опечатки. Л. А. Дикий

523. Константы Лебега для эйлеровского (E, p)-суммирования рядов Фурье. Ливингстон (The Lebesgue constants for Euler (E, p) summation of Fourier series. Livingston Arthur E.), Duke Math. J., 1954, 21, № 2, 309—313 (англ.)

Пусть $L(n; E_p)$ — n-я константа Лебега для метода суммирования $(E, (1-p)/p)$ рядов Фурье (о методе (E, p) см. Харди Г., Расходящиеся ряды, М., 1951, гл. VIII).

Доказывается асимптотическое равенство

$$L(n; E_p) = \frac{2}{\pi^2} \log \frac{2np}{1-p} + A + \varepsilon_n(p), \qquad (1)$$

где $0 < p < 1$, $\varepsilon_n(p) \to 0$ при $n \to \infty$,

$$A = -\frac{2}{\pi}\left[\pi^{-1} C - \int_0^1 u^{-1} \sin u\, du + \right.$$
$$\left. + \int_1^{\infty} u^{-1} \left\{\frac{2}{\pi} - |\sin u|\right\} du\right],$$

где C — константа Эйлера—Маклорена.

Для $p = 1/2$ равенство (1) с $\varepsilon_n(p) = O(n^{-1/2})$ было доказано Лорхом (Lorch L., Duke Math. J., 1952, 19, 45—50). И. Е. Жак

524. Исследование знаков в степенных рядах. Юркат (Questions of signs in power series. Jurkat Wolfgang B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 964—970 (англ.)

Изучается вопрос о распределении знаков у коэффициентов степенного ряда

$$k(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} k_\nu x^\nu = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} q_\nu x^\nu\right\} \Big/ \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu x^\nu\right\} = q(x)/p(x).$$

Этот вопрос играет роль в теоремах включения для методов суммирования Вороного (Харди, Расходящиеся ряды; Изд-во ин. лит., М., 1951, 93—94). Доказываются две основные теоремы, из которых первая обобщает результаты Калуца (Kaluza Th., Math Z., 1928, 28, 161—170), Сегё (Szegö G., Math. Z., 1926, 25, 172—187) и Харди (цит. соч., стр. 93, теорема 22).

Теорема 1. Если $p_n > 0$ при $n \geqslant 0$ и последовательности $\{p_{n+1}/p_n\}$ и $\{q_n/p_n\}$ не убывают при $n \to \infty$, то $k_n \geqslant 0$ при $n \geqslant 1$.

Теорема 2. Если $p_0 > 0$; p_n не возрастает и $p_0 \overline{\Delta} q_n \geqslant q_0 \overline{\Delta} p_n$ для $n \geqslant 1$ (где $\overline{\Delta} a_\nu = a_\nu - a_{\nu-1}$ при $\nu \geqslant 1$ и $\overline{\Delta} a_0 = a_0$), то $k_n \geqslant 0$ для $n \geqslant 1$.

Даются различные варианты и обобщения этих теорем. Например, если $\overline{q}(x) = q(x) r(x)$ и $\overline{p}(x) = p(x) r(x)$, где $r(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} r_\nu x^\nu$, то теоремы 1 и 2 можно сформулировать в терминах коэффициентов рядов $\overline{q}(x)$ и $\overline{p}(x)$. Отдельно рассматривается случай $r(x) = (1-x)^\alpha$.

К. М. Слепенчук

525. О множителях сходимости и суммируемости для последовательности. Бозанкэ (On convergence and summability factors in a sequence. Bosanquet Lancelot Stephen), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 88—89 (англ.)

Положим $\Delta^0 a_n = a_n$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$, $\Delta^k = \Delta \Delta^{k-1}$.

Будем говорить, что $s_n = O(n^p)\,(C, k)$, если $C^k(s_n) = o(n^p)$, где $C^k(s_n) - (C, k)$ — средние последовательности $\{s_n\}$.'

Теорема. Если $s_n = o(n^p)\,(C, \varkappa)$, то для того чтобы $s_n\varepsilon_n = o(n^{p+q})\ (C, \rho)$ ($\rho, \varkappa$ — целые числа, $p > -1$, $p+q > -1$), необходимо и достаточно

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{-q} |\varepsilon_\nu| = O(n),$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varkappa-q} |\Delta^\varkappa \varepsilon_\nu| = O(n), \quad \varepsilon_n = O(n^{p-\varkappa+q}).$$

Те же самые условия необходимы и достаточны и при любых действительных числах p, q таких, что $p+q \neq -1, -2, \ldots, -\rho$ ($\rho \geqslant 1$). Если же $p+q$ равно одному из чисел $-1, -2, \ldots, -\rho$, то необходимыми и достаточными являются условия

$$\varepsilon_n = O(n^q), \quad \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{\varkappa+\rho} |\Delta^\varkappa (\nu^{-\rho-q-1}\varepsilon_\nu)| < \infty,$$

$$\varepsilon_n = O(n^{p-\varkappa+q}).$$

Доказательство теоремы не приводится.

М. Д. Калашников

526. **Обобщение теоремы Таубера и некоторые тауберовы константы (II). Раджагопал** (A generalization of Tauber's theorem and some Tauberian constants (II). Rajagopal C. T.), Math. Z., 1954, 60, № 2, 142—147 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1953, 804.

Пусть $N(x) \in L(0, \infty)$, $N(r)\log x \in L(0, \infty)$, $K(u) = \int_u^\infty N(x)\,dx$, $K(0) = 1$. Пусть далее $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, $\lim \lambda_n = \infty$. Рассматривается преобразование ряда $\Sigma_1^\infty a_n$ в функцию

$$\Phi_\lambda(x) = \sum_1^\infty a_n K(\lambda_n / x) = \int_0^\infty K(u/x)\,dA(u) \quad (x > 0),$$

где

$$A(u) = \begin{cases} a_1 + \ldots + a_n & \text{при } \lambda_n \leqslant u < \lambda_{n+1} \ (n = 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant u < \lambda_1. \end{cases}$$

Теорема. Пусть $\underline{\lim}\,(\lambda_n / \lambda_{n-1}) = l > 1$, $a_n = O(1)$. Если x зависит от n так, что при $n \to \infty$ $\overline{\lim}\,(\lambda_n / x) = \alpha$, $\underline{\lim}\,(\lambda_{n+1} / x) = \beta$, где α, β — конечные положительные константы, причем $\beta \leqslant \alpha l$, то $\Phi_\lambda(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_\lambda(x) - A(\lambda_n)| \leqslant \left\{ \int_0^\alpha |N(u)|\,du + \int_\beta^\infty |N(u)|\,du + \frac{T(\alpha, \beta)}{\log l} \right\} \overline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|,$$

где

$$T(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha |N(u)| \log(\alpha/u)\,du + \int_\beta^\infty |N(u)| \log(u/\beta)\,du.$$

Б. И. Коренблюм

527. **Замечания к заметкам Гумовского о суммировании медленно сходящихся рядов. Чжу** (Comments on Gumowski's letters on summation of slowly converging series. Chu E. L.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 12, 1553 (англ.)

Дальнейшая критика работы Гумовского (РЖМат, 1954, 5639; 1955, 320, 321, 322). Ф. В. Широков

528. **Замечание к одной теореме Бозанкэ. Татчелл** (A note on a theorem by Bosanquet. Tatchell J. B.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 2, № [illegible]4, 207—211 (англ.)

Ряд $\Sigma_0^\infty a_n$ называется суммируемым $|A|$, если функция $\alpha(x) = \Sigma_0^\infty a_n x^n$ имеет ограниченное изменение на полусегменте $[0, 1)$. Он называется суммируемым $|C, p|$, если

$$\Sigma_1^\infty |C_n^p(A) - C_{n-1}^p(A)| < \infty,$$

где $C_n^p(A) = \left\{ \sum_{\nu=0}^n \binom{n+p-\nu}{p} a_\nu \right\} \Big/ \binom{n+p}{p}$.

Доказывается теорема: Условия $\Sigma_1^\infty |\Delta\varepsilon_n|$ и $\Sigma_1^\infty n^{-1}|\varepsilon_n| < \infty$ необходимы и достаточны для того, чтобы для любого сходящегося ряда $\Sigma_0^\infty a_n$ ряд $\Sigma_0^\infty a_n\varepsilon_n$ был суммируемым $|A|$.

В качестве следствия этой теоремы приводится следующее обобщение одной теоремы Бозанкэ (Bosanquet L. S., J. London Math. Soc., 1945, 20, 39—48):

Условия $\Sigma_1^\infty n^k |\Delta^{k+1}\varepsilon_n| < \infty$ и $\Sigma_1^\infty n^{-1}|\varepsilon_n| < \infty$ необходимы и достаточны для того, чтобы для любого ряда $\Sigma_0^\infty a_n$, суммируемого (C, k), ряд $\Sigma_0^\infty a_n\varepsilon_n$ был суммируемым $|C, p|$.

В теореме Бозанкэ p ограничено условием $p \leqslant k+1$.

Ф. И. Харшиладзе

529. **О взаимосвязи между средними Нёрлунда для двойных рядов. Мур** (On relationships between Nörlund means for double series. Moore Charles N.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 957—963 (англ.)

Пусть p_{mn} и q_{mn} — две бесконечные последовательности неотрицательных чисел, s_{mn} — частные суммы двойного ряда Σu_{mn} (с ограниченными частными суммами).

Составим средние Нёрлунда (N, p_{mn}) для последовательности p_{mn}

$$N_{mn}^{(p)}(s) = P_{mn}^{-1} \sum_{i,\,j=0}^{m,n} p_{m-i,\,n-j} s_{ij},$$

где $P_{mn} = \Sigma_{i,\,j=0}^{m,n} p_{ij}$, и аналогично для последовательностей q_{mn} и $r_{mn} = \Sigma_{i,\,j=0}^{m,n} p_{ij} q_{m-i,\,n-j}$.

Автор устанавливает, что суммируемость s_{mn} к s методом (N, p_{mn}) или методом (N, q_{mn}) влечет суммируемость методом (N, r_{mn}) к тому же значению s. Отсюда следует теорема:

Теорема 1. Если методы (N, p_{mn}) и (N, q_{mn}) регулярны и, кроме того, каждая строка и каждый столбец матриц (p_{mn}) и (q_{mn}) дают регулярные преобразования Нёрлунда для простых рядов, то эти методы совместны.

Приводится пример, указывающий на существенность условий теоремы 1 относительно регулярности преобразований (N, p_{mn}) и (N, q_{mn}) по строкам и столбцам для простых рядов.

Теорема 2. Для того чтобы регулярный метод суммирования (N, q_{mn}) включал регулярный метод (N, p_{mn}), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |k_{ij}| P_{m-i,\,n-j} \leqslant H Q_{mn} \ (H \text{ — не зависит от } m, n);$$

$$Q_{mn}^{-1} \sum_{i=0}^{m} |k_{ij}| P_{m-i,\,n-j} \to 0 \text{ при } m,\ n \to \infty,$$

$$0 \leqslant j < n,\ (n-j) \text{ фиксировано};$$

$$Q_{mn}^{-1}\sum_{j=0}^{n}|k_{ij}|P_{m-i,\,n-j}\to 0 \text{ при } m,\ n\to\infty,$$

$$0\leqslant i<m,\ (m-i) \text{ фиксировано.}$$

Теорема 3. Для эквивалентности регулярных методов $(N,\ p_{mn})$ и $(N,\ q_{mn})$ необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma|k_{ij}|<\infty$ и $\Sigma|l_{ij}|<\infty$, где k_{ij} и l_{ij} определяются из формальных соотношений

$$\sum k_{mn}x^m y^n=\frac{\Sigma\, q_{mn}x^m y^n}{\Sigma\, p_{mn}x^m y^n};$$

$$\sum l_{mn}x^m y^n=\frac{\Sigma\, p_{nm}x^m y^n}{\Sigma\, q_{nm}x^m y^n}.$$

Эти результаты аналогичны известным результатам для методов Нёрлунда, суммирующих простые последовательности (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., М., 1951, гл. 4). М. Ф. Тиман

530. Заметка об одном новом результате в теории суммирования. Мартин (A note on a recent result in summability theory. Martin C. F.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 863—865 (англ.)

Для регулярной нормальной матрицы A было установлено (РЖМат, 1954, 4834), что существует ограниченная расходящаяся последовательность, суммируемая A, если выполнены два условия: 1) Матрица A^{-1} нерегулярная; 2) существует нормальная матрица B, у которой столбцы являются сходящимися к нулю последовательностями, причем $\|B\|<\infty$, $\|A^{-1}B\|=\infty$ и почти все столбцы матрицы $A^{-1}B$ образуют ограниченные последовательности. Здесь доказана необходимость условия 2) с изъятием слова «почти» (необходимость условия 1) очевидна). В. М. Даревский

531. О теореме Фейера. Сиддики (On a theorem of Fejér. Siddiqi Jamil A.), Math. Z., 1954, 61, № 1, 79—81 (англ.)

Пусть матрица $\{\lambda_{n,k}\}$ $(n=0,1,2,3,\ldots;\ k=1,2,3,\ldots,n;\ \lambda_{n,0}=1)$ удовлетворяет условиям:

1) $\lim_{n\to\infty}\lambda_{n,k}=1$ для каждого (фиксированного k;

2) $\sum_{k=0}^{n}|\Delta\lambda_{n,k}|\leqslant M$ (для всех n) $(\Delta\lambda_{n,k}=\lambda_{n,k}-\lambda_{n,\,k+1})$;

3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|\Delta^2\lambda_{n,k}|=0$ $\quad(\Delta^2\lambda_{n,k}=\Delta\lambda_{n,k}-\Delta\lambda_{n,\,k+1})$.

Для любой периодической периода 2π функции $f(x)$, имеющей ограниченное изменение на периоде, последовательность $n(b_n\cos nx-a_n\sin nx)$, где a_n и b_n коэффициенты Фурье $f(x)$, суммируема методом $\{\lambda_{n,k}\}$ к значению $\pi^{-1}[f(x+0)-f(x-0)]$, т. е.

$$\lim\sum_{k=0}^{n}\Delta\lambda_{n,k}\,k\,(b_k\cos kx-a_k\sin kx)=\frac{f(x+0)-f(x-0)}{\pi}.$$

Фейер (Fejer L., J. reine und angew. Math., 1913, 142, 165—188) установил этот результат для частного случая, а именно для метода $(C,\ r)$ $(r>0)$. Автор отмечает, что другой частный случай его теоремы, соответствующий методу гармонических средних (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1951), усиливает результат Фейера. А. Ф. Тиман

532. О полной относительной силе некоторых хаусдорфовых методов, равносильных обыкновенной сходимости. Басу (On the total relative strength of some Hausdorff methods equivalent to identity. Basu S. K.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 2, 389—398 (англ.)

Метод суммирования A вполне сильнее метода B, если из $s_n\to l$ (B) следует, что $s_n\to l\,(A)$ для всякого конечного или бесконечного l. Методы A и B равносильны, если для всякого конечного l из $s_n\to l\,(A)$ следует, что $s_n\to l\,(B)$, и наоборот.

Рассматривается метод суммирования U_α, определенный средними

$$\tau_n=\alpha s_n+(1-\alpha)\,h_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \qquad (1)$$

где

$$h_n=\sum_{k=0}^{n}C_k^n\Delta^{n-k}\mu_k s_k, \qquad (2)$$

а $\{\mu_n\}_0^\infty$ — последовательность регулярных моментов (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., М., 1951, 307—328).

Предполагается, что хаусдорфовы средние (2) определяют вполне регулярный метод суммирования. Обозначим метод суммирования, совпадающий с обыкновенной сходимостью, через E.

Теорема 1. При $\alpha>1/2$ метод U_α равносилен методу E. Для $0<\alpha\leqslant 1/2$ то же самое справедливо при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на числа μ_n.

В частности, при $h_n=(s_0+s_1+\ldots+s_n)/(n+1)$ получаем известную теорему Мерсера.

Теорема 2. При $0<\alpha<1$ метод U_α вполне сильнее E, но E не вполне сильнее U_α. При $\alpha>1$ метод E вполне сильнее U_α, но U_α не вполне сильнее E.

Теорема 3. Если $1<\beta<\alpha$, то U_β вполне сильнее U_α, но U_α не вполне сильнее U_β.

Теорема 4. Если $0\leqslant\beta<1<\alpha$, то U_β вполне сильнее U_α, но если $0<\beta<1<\alpha$, то U_α не вполне сильнее U_β.

Теорема 5. Если $0<\beta<\alpha<1$, то U_α не вполне сильнее U_β.

Теорема 6. Если $0\leqslant\beta<\alpha<1$, то существуют такие μ_n, что соответствующий метод U_β вполне сильнее U_α. Существуют и такие μ_n, что соответствующий метод U_β не вполне сильнее U_α. Ф. И. Харшиладзе

533. Тауберовы теоремы для абсолютного суммирования. Лоренц (Tauberian theorems for absolute summability. Lorentz G. G.), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 469—475 (англ.)

По определению, последовательность s_n абсолютно суммируема методом $A=\|a_{n\nu}\|$ или $|A|$-суммируема, если последовательность

$$\sigma_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{n\nu}s_\nu$$

абсолютно сходится или (что то же самое) имеет конечную вариацию $\Sigma|\sigma_n-\sigma_{n+1}|<+\infty$. Пусть $u_n=s_n-s_{n-1}$; условие на u_n называют абсолютным тауберовым условием (АТУ) для метода A, если это условие с $|A|$-суммируемостью s_n дает абсолютную сходимость s_n.

Аналогично обозначениям «O» и «o» вводится обозначение $u_n=\Omega(c_n)$, где $c_n>0$, если последовательность u_n/c_n абсолютно сходится к нулю. Хислоп (Hyslop J. M., J. London Math. Soc., 1937, 12, 176—180) показал, что $u_n=\Omega(1/n)$ является АТУ для метода Абеля.

Автором рассмотрен метод Бореля:

$$\sigma(x) = e^{-x}\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \sum_{\mu=\nu}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!}, \quad x \to +\infty.$$

Доказывается основная теорема 2: Для метода Бореля $u_n = \Omega(n^{-1/2})$ является АТУ.

Кроме того, в статье даются некоторые критерии отрицательного характера. Доказана следующая теорема:

Теорема 3. Пусть метод $A = (a_{n\nu})$, последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < \ldots$ и числа $c_n > 0$ таковы, что

$$\operatorname*{Var}_n \sum_{\rho \leqslant \nu \leqslant \rho} a_{n\nu} \to 0$$

для $n_k \leqslant \mu \leqslant \rho < n_{k+1}$, $k \to \infty$; $\Sigma_{n_k \leqslant \nu < n_{k+1}} c_\nu \to \infty$, $k \to \infty$; $c_{n+1} = O(c_n)$. Тогда $u_n = \Omega(c_n)$ не является АТУ для метода A. М. П. Щеглов

534. **О методах суммирования типа *M*. Рамануджан** (On summability methods of type *M*. Ramanujan M. S.), J. London Math. Soc., 1954, 29, part 2, № 114, 184—189 (англ.)

Бесконечная матрица $G = (g_{n,k})$ называется γ-матрицей, если для каждого сходящегося ряда $s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ряды $t_n = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k} u_k$ сходятся для всех значений n и $\lim t_{n \to \infty} = s$.

Если для любого сходящегося ряда $s = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$ ряды $v_n = \sum_{k=1}^{\infty} h_{n,k} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$, сходятся, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится к сумме s, то матрица $H = (h_{n,k})$ называется α-матрицей. Матрицу $A = (a_{nk})$, удовлетворяющую условиям Тёплица, будем называть T-матрицей. T-матрица $A = (a_{n,k})$ есть матрица типа M, если из $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{i,k} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. γ-матрица $G = (g_{n,k})$ есть матрица типа M, если из $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i| < \infty$ и $\sum_{i=1}^{\infty} c_i (g_{i,k} - g_{i,k+1}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, следует, что $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$. α-матрица $H = (h_{n,k})$ есть матрица типа M, если γ-матрица $G = (g_{n,k})$, где $g_{n,k} = h_{1,k} + h_{2,k} + \ldots + h_{n,k}$, есть матрица типа M.

Пусть (c) — пространство всех сходящихся последовательностей, а (c_0) — пространство всех нуль-последовательностей.

Для T-матрицы A через $R_c(A)$ будем обозначать множество точек $y = Ax$, где $x \in (c)$.

Если E — нормированное пространство, то множество $G \subset E$ называется фундаментальным в E, если линейное пространство, порожденное G, плотно в E.

Доказывается:

1. T-матрица A есть матрица типа M, тогда и только тогда, когда ее столбцы фундаментальны в (c_0).

2. T-матрица A есть матрица типа M тогда и только тогда, когда множество $R_{c_0}(A)$ фундаментально в (c_0).

3. Если произведение $C = AB$ двух T-матриц A и B есть матрица типа M, то A — матрица типа M.

Аналогичное утверждение справедливо для α-матриц.

4. Произведение $U = AG$ T-матрицы A типа M и γ-матрицы G типа M есть γ-матрица типа M.

5. Произведение $V = GH$ γ-матрицы G типа M и α-матрицы H типа M есть γ-матрица типа M.

6. Произведение $C = AB$ α-матриц A и B типа M есть α-матрица типа M. М. Д. Калашников

535. **О суммировании периодических последовательностей. I, II. Ньютон** (On the summation of periodic sequences. I, II. Newton R. H. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 5, 533—549; Indagationes Math., 1954, 16, № 5, 533—549 (англ.)

Доказывается ряд теорем о суммировании периодических последовательностей T-матрицами (матрицами Тёплица) общего вида, матрицами Вороного (автор называет их матрицами Нёрлунда) и диагональными матрицами. Для T-матриц общего вида и матриц Вороного устанавливаются различные условия, при которых эти матрицы суммируют все периодические последовательности к правильным значениям (значение, к которому матрица суммирует ограниченную последовательность $z_0, z_1, \ldots$, называется правильным, если оно совпадает с результатом суммирования методом Абеля ряда $z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots$).

В частности, доказываются следующие две теоремы

I. T-матрица (a_{nk}) суммирует все периодические последовательности к правильным значениям, если при некоторых $r > 1$ и n_0 выполняются условия:

1) $\Sigma_{k=1}^{\infty} k^r |\Delta^r a_{nk}| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) $|a_{nk}| \leqslant K(n)/k^r$ $(n > n_0,\ k = 1, 2, \ldots)$,

где M — положительная константа, $K(n)$ — положительная функция от n, а $\Delta^r a_{nk} = \Sigma_{p=0}^{r} (-1)^p \binom{r}{p} a_{n,p+k}$.

II. Пусть (a_{nk}) — матрица Вороного, т. е. $a_{nk} = p_{n-k}/P_n$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, $a_{nk} = 0$ $(k > n)$, $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n$ (здесь предполагается, что $p_0 > 0$, $p_1, p_2, \ldots \geqslant 0$; здесь считается, что почти все p_n имеют один и тот же знак). Если $p_n/P_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n \to \infty} (n+1)^\alpha p_n = \lambda$, где $0 < |\lambda| < \infty$ и $-\infty < \alpha \leqslant 1$, то (a_{nk}) суммирует все периодические последовательности к правильным значениям. Указываются необходимые и достаточные условия того, чтобы две T-матрицы были абсолютно эквивалентны на множестве всех периодических последовательностей. Устанавливаются условия, при которых T-матрица Вороного не суммирует ни одной расходящейся последовательности. Относительно одного из этих условий показывается, что если оно нарушено, то матрица может оказаться суммирующей некоторые периодические последовательности. Один из результатов, полученных для диагональных матриц, состоит в том, что если какая-либо диагональная T-матрица (a_{nk}) $(a_{nk} = 0$ при $n > k$, $a_{n,n+k} = a_{k+1}$ при $k = 0, 1, \ldots)$ суммирует периодическую последовательность, то она суммирует ее к правильному значению. В. М. Даревский

536. **Перестановки C_1-суммируемых рядов. Багемил, Эрдёш** (Rearrangements of C_1-summable series. Bagemihl F., Erdös P.), Acta. math., 1954, № 92, 35—53 (англ.)

Ряд, который получается из ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

перестановкой его членов, будем кратко называть перестановкой этого ряда. Пусть ряд (1) C_1-суммируем, т. е. последовательность средних арифметических его частных сумм сходится, рассмотрим множество C_1-суммируемых его перестановок. Что представляет собой множество R соответствующих C_1-сумм? Авторы показывают, что множество R состоит или из одного числа, или из всех чисел вида $\alpha + \nu\beta$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где $\alpha, \beta \neq 0$ — некоторые действительные числа, или из всех действительных чисел.

Справедливы также следующие утверждения:

1. Каково бы ни было действительное число α, существует такой C_1-суммируемый ряд (1), что его множество R состоит из единственного числа α.

2. Каковы бы ни были действительные числа α и $\beta \neq 0$, существует такой C_1-суммируемый ряд, что соответствующее множество R состоит из всех чисел вида $\alpha + \nu\beta$ ($\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Статья содержит много примеров. И. Е. Жак

537. Произведения методов суммирования. Пати (Products of summability methods. Pati T.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, № 3, 348—351 (англ.)

Пусть T_1, T_2 — два метода суммирования последовательностей. Последовательность $\{s_\nu\}$ суммируема T_1, T_2, если ее T_2-трансформация суммируема T_1.

Доказывается, что суммируемость T_1 влечет за собой суммируемость $T_1 T_2$, где T_1 — метод Абеля, а T_2 — регулярный метод Хаусдорфа. Этот результат был получен также Сасом (РЖМат, 1954, 3748).

М. Д. Калашников

538. Тауберова теорема для абсолютной суммируемости. Пати (A Tauberian theorem for absolute summability. Pati T.), Math. Z., 1954, **61**, № 1, 75—78 (англ.)

Обозначения: $\Sigma_1^\infty a_n$ — данный бесконечный ряд, $\{\lambda_n\}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к бесконечности, $A_\lambda^r(\omega) = \Sigma_{\lambda n \leqslant \omega} (\omega - \lambda)^r a_n$ ($r \geqslant 0$). Ряд Σa_n называется абсолютно суммируемым $(R, \lambda r)$ (или суммируемым $|R, \lambda, r|$), если $A_\lambda^r(\omega)/\omega^r$ имеет ограниченную вариацию в интервале (λ_1, ∞). Суммируемость $|R, \lambda, 0|$ эквивалентна абсолютной сходимости ряда.

Обрешков (Obrechkoff N., C. r. Acad. sci., 1928, **186**, 215—217) доказал, что суммируемость $|R, \lambda, r|$ ($r \geqslant 0$) влечет за собой суммируемость $|R, \lambda, k|$ при $k > r$. В работе устанавливается следующая обратная теорема: Если 1) ряд Σa_n суммируем $|R, \lambda, k|$ ($k > 0$), 2) последовательность $\{a_n \lambda_n / (\lambda_n - \lambda_{n-1})\}$ имеет ограниченную вариацию, 3) последовательность $\{\lambda_n / \lambda_{n+1}\}$ имеет ограниченную вариацию, то ряд Σa_n является абсолютно сходящимся. Б. И. Коренблюм

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

539. Исследования о функциях Матьё, I—VI. Сипс (Recherches sur les fonctions de Mathieu. Sips R.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, № 6-7, 341—355; № 8-10, 374—387; № 11, 444—455; № 12, 530—540; 1954, **23**, № 1, 41—51; № 2, 90—103 (франц.)

Автор задался целью показать, что многие факты, относящиеся к функциям Матьё (в основном — хорошо известные), могут быть получены из следующей формулы, отмеченной Морсом (Morse P. N., Proc. Nat. Acad. Sci., Washington, 1935, **21**, 56—62), см. также Шефке (РЖМат, 1954, 4468):

$$H_0^{(1)}(\lambda R) = \frac{4i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{ce}_n(\eta_0)\,\mathrm{ce}_n(\eta)\,\mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi)\,\mathrm{Ce}_n(\xi_0)}{\mathrm{ce}_n(0)\,\mathrm{Me}_n^{(1)\prime}(0)} - \frac{\mathrm{se}_n(\eta_0)\,\mathrm{se}_n(\eta)\,\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)\,\mathrm{Se}_n(\xi_0)}{\mathrm{se}_n'(0)\,\mathrm{Ne}_n^{(1)}(0)} \right), \quad \xi \geqslant \xi_0; \quad (1)$$

здесь ξ, η — эллиптические координаты, R — расстояние между точками (ξ_0, η_0) и (ξ, η), λ — параметр в уравнении $u_{xx} + u_{yy} + \lambda^2 u = 0$, разделением переменных, в котором (в эллиптических координатах: $x + iy = c\,\mathrm{ch}(\xi + i\eta)$) порождаются функции Матьё. Обозначения функций Матьё те же, что и в книге Мак-Лахлана (РЖМат, 1954, 4086).

В ч. I даются некоторые общие сведения о функциях Матьё и выводится основная формула (1). В ч. II автор получает интегральные представления функций $\mathrm{Me}_n^{(1)}$ и $\mathrm{Me}_n^{(2)}$ через ce_n и ганкелевы функции $H_0^{(1)}$ соответственно $H_0^{(2)}$, а также ряды для $\mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi)$ и $\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi)$ по функциям Ганкеля $H_m^{(1)}(\lambda c\,\mathrm{ch}\,\xi)$, $H_m^{(2)}(\lambda c\,\mathrm{ch}\,\xi)$. Используя представления последних в виде контурных интегралов, автор преобразует указанные ряды в соответствующие контурные интегралы; спецификацией пути интегрирования в них получаются интегральные представления Гольдстейна и некоторые другие интегральные представления функций $\mathrm{Me}_n^{(1)}$ и $\mathrm{Me}_n^{(2)}$. Аналогичные результаты приводятся и для функций $\mathrm{Ne}_n^{(1)}$ и $\mathrm{Ne}_n^{(2)}$.

Ч. III посвящена получению интегральных уравнений Уиттекера (для функций ce_n и se_n) и некоторых других, непосредственно из них вытекающих. Здесь также приведены сингулярные интегральные уравнения для функций Ce_n и Se_n. В ч. IV получены разложения произведений $\mathrm{ce}_n(\eta)\,\mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi)$, $\mathrm{se}_n(\eta)\,\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)$ в ряды по функциям $H_m^{(1)}(\lambda\rho)\cos m\omega$ и соответственно $H_m^{(1)}(\lambda, \rho)\sin m\omega$, $\mathrm{tg}\,\omega = \mathrm{th}\,\xi\,\mathrm{tg}\,\eta$, $\rho^2 = c^2(\mathrm{sh}^2\xi + \cos^2\eta)$ (ср. Meixner J., Math. Nachr., 1949, **3**, 14—19), а также представления последних по упомянутым произведениям функций Матьё. Ч. V содержит асимптотические представления функций $\mathrm{Me}_n^{(1)}(\xi)$, $\mathrm{Me}_n^{(2)}(\xi)$ и $\mathrm{Ne}_n^{(1)}(\xi)$, $\mathrm{Ne}_n^{(2)}(\xi)$, а следовательно, и функций Ce_n и Se_n (при больших значениях ξ). В ч. VI рассмотрены предельные формы функций Матьё (при $c \to 0$ и $c \to \infty$).

М. Н. Олевский

540. Линейные соотношения между E-функциями и функциями Бесселя. Рагаб (Linear relations between E-functions and Bessel functions. Ragab F. M.), Acta math., 1954, № 92, 1—11 (англ.)

Устанавливается ряд новых линейных соотношений для E-функций, введенных Макробертом (MacRobert T., Functions of a complex variable, London, 3-rd ed., 1946, 352). В качестве примера приведем формулу

$$E(\alpha_1 + n, \alpha_2, \ldots, \alpha_p : q;\ \rho_s : x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r C_n^r \frac{(\alpha_1)_n}{(\alpha_1)_r} x^{-r} E(\alpha_1 + r, \ldots, \alpha_p + r : q,\ \rho_s + r : x),$$

где $(\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1)$, $(\lambda)_0 = 1$, C_n^r — число сочетаний из n элементов по r. При частных значениях параметров из найденных формул получаются соотношения, содержащие E-функции и цилиндрические функции. Н. Н. Лебедев

541. Об интегральном представлении E-функции Макроберта. Бос (On integral representations of MacRobert's E-function. Bose N. N.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1954, **46**, № 2, 97—101 (англ.)

Даются различные интегральные представления для E-функции (принадлежащее Макроберту обобщение гипергеометрической функции (MacRobert T., Proc. Glasgow Math. Assoc., 1953, **1**, 111—114)). В обозначении автора $E(\alpha, \beta :: p) = \Gamma(\alpha) \int_0^\infty e^{-u} u^{\beta-1} (1 + u/p)^{-\alpha} du$. В частности, в терминах E-функций с помощью операционного исчисления вычисляются интегралы

$$\int_0^\infty z^{-1/4} e^{-pz} E(\alpha, \beta :: z^{-1})\, dz,$$

и

$$\int_1^\infty E(\alpha, \beta + 1/2 :: pz) / \{(z-1)^{1/2} z^{\beta+1/2}\}\, dz.$$

Работа является продолжением предыдущей работы того же автора (Bose N. N., Bull. Calcutta Math. Soc., 1952, 44, 63). А. Г. Корман

542. **Разложения обобщенных функций Уиттекера. Слейтер** (Expansions of generalized Whittaker functions. Slater L. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, 50, № 4, 628—631 (англ.)

Используя соотношение

$${}_4F_3\left[\begin{matrix} 2n, & n+1, & 1-t, & -m; \\ n, & 2n+t, & 2n+m+1; & \end{matrix} 1\right] = \frac{(2n+1)_m (n+t-1/2)_m}{(n+1/2)_m (2n+t)_m} \tag{1}$$

(обозначения см. РЖМат, 1953, 317), автор дает прямое доказательство следующего разложения вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1$ в ряд по бесселевым функциям $I_n(x)$:

$${}_1F_1(n+t-1/2; 2n+t; x) =$$

$$= 2^{2n}\, n!\, e^{x/2} x^{-n} \sum_{r=0}^{\infty} A_{n+r}(t)\, I_{n+r}(x/2),$$

где

$$A_{n+r}(t) = \frac{(n+r)(2n)_r (-1)^r (1-t)_r}{n!\, r!\, (2n+t)_r}.$$

(Это разложение взято автором из неопубликованной рукописи Миллера (C. P. Miller)).

Аналогично, заменяя соотношение (1) теоремами Диксона и Дугалла (Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, Cambridge, 1935), автор получает разложения функции ${}_2F_2(x)$ в ряд по функциям ${}_1F_1(x)$ и $I_n(x)$ и функции ${}_4F_4(x)$ в ряд по функциям ${}_3F_3(x)$. Л. М. Глускин

543. **Об одном разложении функции Бесселя в ряд по функциям Лежандра. Блох Э. Л.**, Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 6, 745—748

Доказывается формула

$$e^{t\cos\theta} J_m(t\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{m+n} P_{m+n}^m(\cos\theta)}{(2m+n)!} \quad (m = 0,1,2,\ldots),$$

частный случай которой, соответствующий $m=0$, приведен в известной монографии Грея и Мэтьюза (Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, изд. 2-е, Изд-во ин. лит., 1953, 297).

С помощью замены переменных получается ряд формул аналогичного типа, которые затем применяются для вычисления некоторых определенных интегралов, содержащих функции Бесселя и Лежандра. Н. Н. Лебедев

544. **О бесселевых полиномах. Нассиф** (Note on the Bessel polynomials. Nassif M.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 3, 408—412 (англ.)

Кролл и Фринк (Krall H. L., Frink O., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 65, 100—115) рассмотрели один класс ортогональных полиномов $p_n(z) = \Sigma_{k=0}^n p_{nk} z^k$, $p_{nk} = 2^{-k}(n+k)!/(k!\,(n-k)!)$, названных ими полиномами Бесселя.

Автор доказывает две теоремы, относящиеся к теории этих полиномов.

Теорема А. Функция $f(z)$, голоморфная внутри области $|z-a| \leqslant R$, может быть разложена в этой области в равномерно сходящийся ряд

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n p_n(z-a),$$

где $c_n = 2^n (2n+1) \sum_{\nu=0}^{\infty} (-2)^\nu f^{(n+\nu)}(a) / (\nu!\,(2n+\nu+1)!)$.

Теорема В. Все корни бесселева полинома $p_n(z)$ $(n > 1)$ находятся внутри круга радиуса $|z| = ((n-1)/(2n-1))^{1/2}$. Н. С. Кошляков

545. **Обобщение функций Бесселя — Майтланда. Чак** (A generalisation of Bessel-Maitland function. Chak A. M.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1954, sér. I, 68, № 3, 146—156 (англ.)

Изучаются функции

$$J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^\gamma x^\gamma}{\gamma!} \prod_{\alpha=1}^{n} [\Gamma(\lambda_\alpha + \mu_\alpha \gamma + 1)]^{-1}$$

с производящей функцией (при целочисленных $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$) $\exp[t_1 + \ldots + t_n + x/t_1^{\mu_1} \ldots t_n^{\mu_n}]$. Выводится ряд операционных соотношений, рекуррентных формул и дифференциальное уравнение, которым удовлетворяют эти функции. Рассматриваются также функции $\mathrm{ber}^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)$ и $\mathrm{bei}^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x)$, определенные равенством

$$J^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(-xi) = \mathrm{ber}^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x) + i\,\mathrm{bei}^{\mu_1\ldots\mu_n}_{\lambda_1\ldots\lambda_n}(x).$$

В. И. Левин

546. **Асимптотические свойства вырожденных гипергеометрических функций. Трикоми** (Asymptotische Eigenschaften der konfluenten hypergeometrischen Funktionen. Tricomi Francesco G.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 178—179 (нем.)

Изучаются асимптотические свойства функции

$$\Phi(a, c; x) \equiv {}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

в действительной области, при $a \to -\infty$, ограниченном c и любом x.

Рассматриваются случаи: 1) $x = O(\varkappa^\rho)$, $\rho < 1/3$; 2) $a\varkappa \leqslant x \leqslant b'\varkappa$ $(b' < 4)$; 3) $x = 4\varkappa + O(\varkappa^{1/4})$; 4) $b''\varkappa \leqslant x$ $(b''\varkappa > 4)$, где $\varkappa = c/2 - a$, а a, b', b'' — фиксированные положительные числа. Первый случай был исследован автором в работе (Annali Mat., 1949, (4) 28, 263—289). В остальных трех случаях соответственно получается

$$e^{-x/2}\Phi(a, c, x) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c)\,(2\varkappa\cos\theta)^{1-c}}{\sqrt{\pi\varkappa\sin 2\theta}}\,[\sin\theta + O(\varkappa^{-1})], \quad \theta = \arccos\sqrt{\dfrac{x}{4\varkappa}}, \\ \qquad\qquad \theta = \varkappa(2\theta - \sin 2\theta) + (1/4 - a)\pi \\ \dfrac{1}{\pi}\Gamma(c) 3^{1/3} (2\varkappa)^{2/3-c} [A_1(t)\cos a\pi + A_2(t)\sin a\pi + O(\varkappa^{-2/3})], \\ \qquad\qquad x = 4\varkappa - (16/3\varkappa)^{1/3} t \\ \Gamma(c)\sin a\pi \dfrac{(2\varkappa\,\mathrm{ch}\,\vartheta)^{1-c}}{\sqrt{\pi\varkappa\,\mathrm{sh}\,2\vartheta}} \exp[\varkappa(\mathrm{sh}\,2\vartheta - 2\vartheta)]\,[1 + O(\varkappa^{-1})], \\ \qquad\qquad \mathrm{ch}\,\vartheta = \sqrt{x/4\varkappa}, \end{cases}$$

где $A_1(t)$ и $A_2(t)$ — функции Эйри. Доказательства отсутствуют. П. И. Кузнецов

547. **Разложение в ряд произведений полиномов Лаггерра. Хюллерос** (Expansion of products of Laguerre polynomials. Hylleraas Egil), Arch. math. og naturvidensk., 1954, 52, № 1—2, 69—72 (англ.)

Дается более простое доказательство формулы

$$L_n^{(\alpha)}(x)L_{n'}^{(\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{k'=0}^{n'}\binom{n'+\beta}{n-k}\binom{n+\alpha}{n'-k'}\binom{k+k'}{k}\times$$

$$\times(-1)^{n+n'-k-k'}L_{k+k'}^{(\alpha+\beta)}(x),$$

доказанной в несколько ином виде Ольсеном (РЖМат, 548). В. И. Левин

548. **Об одном тождестве для полиномов Лагерра и связанном с ним преобразовании Ганкеля. Ольсен** (On a certain identity in Laguerre polynomials and the related Hankel transform. Olsen Haakon), Arch. math. og naturvidensk, 1954, 52, № 1—2, 1—8 (англ.)

Доказываются две эквивалентные формулы:

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{k'=0}^{l'}\binom{\nu}{l-k}\binom{n'}{l'-k'}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{(-1)^{k'}}{k!}(n-l'+k+k')!\times$$

$$\times L_{n'-l'+k+k'}^{(\nu-n'+l'-l)}(x)=\frac{n'!}{l'!}(-1)^{l'-l}L_l^{(l'-l)}(x)\,L_{n'}^{(\nu-n')}(x)$$

и

$$\int_0^\infty J_{\nu-l-n'+l'}(2\sqrt{xt})\,e^{-t}t^{(\nu-l+n'-l')/2}L_l^{(\nu-l)}(t)\times$$

$$\times L_{l'}^{(n'-l')}(t)\,dt=$$

$$=\frac{n'!}{l!}\,e^{-x}x^{(\nu-n'+l-l')/2}L_{l'}^{(l-l')}(x)\,L_{n'}^{(\nu-n')}(x).$$

В. И. Левин

549. **Асимптотическое разложение функций Лежандра с большим индексом. Олвер** (The asymptotic expansion of Legendre functions of large order. Olver Frank William John), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 152 (англ.)

Краткое сообщение о новых асимптотических разложениях сферических функций Лежандра $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ и их производных для больших вещественных или комплексных значений индекса n. В качестве основного преимущества полученных формул перед существующими отмечается, что они справедливы равномерно по отношению к z в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z\geqslant 0$. Найденные разложения применяются к исследованию распределения нулей функций Лежандра на плоскости комплексного переменного. Н. Н. Лебедев

550. **Функции параболического цилиндра большого порядка. Эрдейи, Кеннеди, Макгрегор** (Parabolic cylinder functions of large order. Erdélyi A., Kennedy M., McGregor J. L.), J. Rational Mech. and Analysis, 1954, 3, № 4, 459—485 (англ.)

Реферируемая работа представляет систематическое исследование асимптотического поведения интегралов уравнения $y''-4\nu^2(x^2-1)y=0$ при больших вещественных или комплексных значениях параметра ν и произвольных значениях комплексного переменного x. Интерес к рассматриваемой задаче обусловлен тем, что решения данного уравнения, просто связанные с функциями параболического цилиндра, встречаются в различных проблемах математической физики, а также тем, что это уравнение является простейшим среди уравнений вида $y''-4\nu^2\varphi(x)y=0$, для которых функция $\varphi(x)$ дважды обращается в нуль.

Основываясь на известном методе, предложенном Лангером и усовершенствованном в дальнейшем Черри (Cherry T., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 224), авторы получают формулы, дающие асимптотические представления рассматриваемых решений при $|\nu|\to\infty$, пригодные в различных областях плоскости комплексного переменного x. Найденные формулы справедливы равномерно относительно x, и их совокупность дает полное описание асимптотического поведения исследуемых функций при возрастании параметра ν.

Н. Н. Лебедев

551. **Ортогональность гиперболоидальных функций. Ван-Ностранд** (The orthogonality of the hyperboloid functions. Van Nostrand Robert G.), J. Math. and Phys., 1954, 33, № 3, 276—282 (англ.)

Гиперболоидальными функциями называются присоединенные функции Лежандра $H=P^m_{ip-1/2}(\eta)$, удовлетворяющие уравнению для сферических функций

$$\frac{d}{d\eta}\left[(1-\eta^2)\frac{dH}{d\eta}\right]+\left[\nu(\nu+1)-\frac{m^2}{1-\eta^2}\right]H=0 \quad (1)$$

при $\nu=ip-1/2$. При $\eta\to\infty$ имеет место асимптотическая формула

$$P^m_{ip-1/2}(p)=\eta^{-1/2}\,[A_m(p)\cos(p\ln\eta)+$$

$$+B_m(p)\sin(p\ln\eta)]\,[1+O(\eta^{-2})],$$

где

$$A_m(p)=2\mathrm{Re}\left[\frac{2^{ip-1/2}\Gamma(ip)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(ip-m+1/2)}\right];$$

$$B_m(p)=-2\mathrm{Im}\left[\frac{2^{ip-1/2}\Gamma(ip)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(ip-m+1/2)}\right]$$

Выводится равенство:

$$\int_1^\infty P^m_{ip-1/2}(\eta)\,P^m_{iq-1/2}(\eta)\,d\eta=$$

$$=\frac{(-1)^m\,\mathrm{cth}(\pi p)}{p}\,\frac{\Gamma(ip+m+1/2)}{\Gamma(ip-m+1/2)}\,\delta(p-q),$$

где $\delta(p)$ — дельта-функция Дирака. Из этого равенства вытекает ортогональность рассматриваемых функций.

Введем вытянутые сфероидальные координаты: эллиптический параметр $\eta\,(1\leqslant\eta<\infty)$, гиперболический параметр $\xi\,(-1\leqslant\xi\leqslant 1)$ и азимут $\varphi\,(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$.

Пусть R — расстояние точки $P(\eta,\xi,\varphi)$ от начальной точки $P_0(\eta_0,\xi_0,\varphi_0)$.

Используя эти координаты, автор выводит формулу

$$\frac{1}{R}=\frac{\pi}{-}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})\cos m(\varphi_0-\varphi)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p\,\mathrm{th}(\pi p)}{\mathrm{ch}(\pi p)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma^2(ip-m+1/2)}{\Gamma^2(ip+m+1/2)}\begin{Bmatrix}P^m_{ip-1/2}(\xi_0)\,P^m_{ip-1/2}(-\xi)\\ P^m_{ip-1/2}(-\xi_0)\,P^m_{ip-1/2}(\xi)\end{Bmatrix}\times$$

$$\times P^m_{ip-1/2}(\eta_0)\,P^m_{ip-1/2}(\eta)\,dp,$$

причем верхний член в фигурных скобках следует брать при $\xi<\xi_0$, а нижний — при $\xi>\xi_0$.

Это выражение можно применить для вычисления любого объемного потенциала, а также для определения произвольных постоянных, входящих в потенциальные функции, создаваемые точечным зарядом или точечным источником электрического тока вблизи гиперболоидальной границы между двумя материальными средами с различными электрическими характеристиками. Ю. Л. Рабинович

552. **Формула Максвелла для сферических функций. Мор** (Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen. Mohr Ernst), Math. Nachr., 1954, 12, № 5—6, 273—282 (нем.)

Исследуется однородная целая рациональная сферическая функция порядка n $u_n(x, y, z)$. Рассматривая n осей l_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), которые исходят из начала прямоугольной системы координат (x, y, z) и имеют направляющие коэффициенты a_ν, b_ν, c_ν, автор дает новый метод доказательства формулы Максвелла, представляющей функцию $r^{-(2n+1)}u_n(x, y, z)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, в виде мультиполя с осями $l_1, l_2, \ldots, l_n$:

$$r^{-(2n+1)}u_n(x, y, z) = C\frac{\partial}{\partial l_n}\frac{\partial}{\partial l_{n-1}}\ldots\frac{\partial}{\partial l_1}\frac{1}{r}. \quad (1)$$

Здесь C — постоянная величина, а оператор $\partial/\partial l_\nu$ означает производную по направлению единичного вектора $\overline{l_\nu^0} = \{a_\nu/|l_\nu|, \quad b_\nu/|l_\nu|, \quad c_\nu/|l_\nu|\}$, $|l_\nu| = \sqrt{a_\nu^2 + b_\nu^2 + c_\nu^2}$.

Доказывается также единственность представления (1) с точностью до обращения направлений дифференцирования. М. Б. Капилевич

553. **Об одной формуле Гросвальда. Нанджундья** (On a formula of Grosswald. Nanjundiah T. S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 10, 700—702 (англ.)

Даны новые способы вывода формулы Гросвальда (РЖМат, 1953, 313, 314; 1955, 853). В одном из них использованы свойства ультрасферических многочленов $P_n^{(\lambda)}(x)$. Л. М. Глускин

554 РЕЦ. **Бесселевы функции с формулами. Бикли** (Bessel functions and formulas. Bickley W. G., New York, Cambrige Univ. Press., 1954, 11 pp., 75 cents) [**Рецензия: Хейралла** (Kheiralla A. Ali), J. Appl. Mech., 1954, **21**, № 2, 211 (англ.)]

555 Д. **К теории функций волнового уравнения, с приложениями к специальным рядам и интегралам функциями Бесселя, Уиттекера и Матьё. Хенрич** (Zur Funktionentheorie der Wellengleichung. Mit Anwendungen auf spezielle Reihen und Integrale mit Besselschen, Wittakerschen und Mathieuschen Funktionen. Henrici P., Diss., Zürich, ETH, 1953), Schweiz. Buch., 1954, **B54**, № 4, 166 (нем.)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

556. **Обобщенные интегралы Фурье. Коидзуми, Суноути** (Generalized Fourier integrals. Koizumi Sumiyuki, Sunouchi Gen-ichirô), Tôhoku Math. J., 1954, **5**, № 3, 243—260 (англ.)

Статья посвящена представлению функций обобщенными интегралами Фурье. Впервые подобные представления были получены Ханом (Hahn H., Wiener Berichte, IIa, 1925, **134**, 447—470; Acta Math., 1927, **49**, 301—353). Дальнейшее развитие принадлежит Идзуми (Izumi S. Sc. Rep. Tôhoku Imp. Univ., 1935, **23**, 880—906; 907—919). Реферируемая работа посвящена обобщению построений Идзуми.

Авторы обобщают интеграл Стилтьеса. Они берут произвольное положительное число α и вводят целое число k так, что $0 \leqslant h = k - \alpha < 1$. Затем полагают

$$I^h f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(h)}\displaystyle\int_0^x (x-y)^{h-1} f(y)\,dy & (h>0), \\ 0 & (h=0). \end{cases}$$

Если $0 < \alpha \leqslant 1$, то, по определению,

$$\int_a^b g(x)\frac{d^\alpha f(x)}{dx^{\alpha-1}} = g(b)\,I^{1-\alpha}f(b) - g(a)\,I^{1-\alpha}f(a) - \int_a^b g'(x)\,I^{1-\alpha}f(x)\,dx.$$

Для $\alpha > 1$ вводится открывающее путь для индукции второе определение

$$\int_a^b g(x)\frac{d^\alpha f(x)}{dx^{\alpha-1}} = \lim_{\varepsilon\to 0} g(b - \overline{k-1}\varepsilon)\,\underset{\varepsilon}{\Delta}{}^{k-1} I^h f(b)\,\varepsilon^{1-k} - \lim_{\varepsilon\to 0} g(a + \overline{k-1}\varepsilon)\,\underset{\varepsilon}{\Delta}{}^{k-1} I^h f(a)\,\varepsilon^{1-k} - \int_a^b g'(x)\frac{d^{\alpha-1}f(x)}{dx^{\alpha-2}},$$

если только пределы справа существуют. При этом приняты обозначения

$$\underset{\varepsilon}{\Delta}{}^r I^h f(x) = \sum_{\nu=0}^{r}\binom{\nu-r-1}{\nu} I^h f(x+\nu\varepsilon),$$

$$\underset{\varepsilon^*}{\Delta}{}^r I^h f(x) = \sum_{\nu=0}^{r}\binom{\nu-r-1}{\nu} I^h f(x-\nu\varepsilon).$$

Авторы рассматривают так называемые бесселевы средние

$$(B, r)\int_{-0}^{\infty}(\quad) = \lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\lambda}\left\{1-\left(\frac{v}{\lambda}\right)^2\right\}^r(\quad) \quad (r>0)$$

и пользуются функциями Юнга

$$C_p(x) = I^p\cos x \quad (p \geqslant 0).$$

Основная теорема.

Если $f(x)/(1+|x|^\alpha \in L(-\infty, \infty)\,(\alpha>1)$, то для почти всех x

$$f(x) = \frac{1}{\pi}(B, \alpha-1)\int_{-0}^{\infty}\left\{\cos vx\frac{d^\alpha\Phi_\alpha(v)}{dv^{\alpha-1}} + \sin vx\frac{d^\alpha\Psi_\alpha(v)}{dv^{\alpha-1}}\right\}.$$

При этом $\Phi_\alpha(v) = \Psi_\alpha(v) = 0$ $(v<0)$, а при $v \geqslant 0$ для k четного

$$\Phi_\alpha(v) = \int_{-1}^{1} f(y)\frac{C_\alpha(vy)}{y^\alpha}\,dy - \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty}\right) f(y)\frac{(-1)^{k/2}C_{2-h}(vy)}{y^\alpha}\,dy,$$

$$\Psi_\alpha(v) = \int_{-1}^{1} f(y)\frac{C_{\alpha+1}(vy)}{y^\alpha}\,dy + \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty}\right) f(y)\frac{(-1)^{k/2}C_{1-h}(vy)}{y^\alpha}\,dy$$

и для k нечетного

$$\Phi_\alpha(v) = \int_{-1}^{1} f(y)\frac{C_\alpha(vy)}{y^\alpha}\,dy + \left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty}\right) f(y)\frac{(-1)^{(k-1)/2}C_{1-h}(vy)}{y^\alpha}\,dy,$$

$$\Psi_\alpha(\nu)=\int_{-1}^{1} f(y)\frac{C_{\alpha+1}(\nu y)}{y^\alpha}\,dy+$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{1}^{\infty}\right) f(y)\frac{(-1)^{(k-1)/2}C_{2-h}(\nu y)}{y^\alpha}\,dy.$$

Имеется ряд опечаток. Н. И. Ахиезер

557. **Цепочка преобразований. Фокс** (Chain transforms. Fox Charles), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 677—688 (англ.)

Рассматривается совокупность преобразований

$$g_{p+1}(x)=\int_0^\infty [r_p(x/u)/u]\,g_p(u)\,du,\qquad (1)$$

$$\int_0^\infty [l_q(x/u)/u]\,g_{q+1}(u)\,du=g_q(x),$$

где p принимает i каких-либо значений из ряда $1, 2, \ldots, n$, а q принимает оставшиеся $n-i$ значений. Преобразования (1) образуют цепочку порядка n, если каждая из функций $g_2(x), g_3(x), \ldots, g_n(x)$ встречается дважды в системе (1), а именно, один раз слева, а другой раз справа, и $g_{n+1}(x)=g_1(x)$. Примером цепочки третьего порядка служит цепочка с ядрами $r_1(t)=te^{-t}$, $r_2(t)=e^{-t}$, $l_1(t)=1/(1+t)$; здесь $p=1, 2$; $q=3$. Выводятся условия, при которых преобразования (1) образуют цепочку.

О характере этих условий можно судить по следующей теореме:

Если 1) $x^{-1/2}l_q(x)\in L(0,\infty)$, $x^{-1/2}r_p(x)\in L(0,\infty)$ для всех ядер, входящих в (1); 2) $\Pi_q L_q(s)=\Pi_p R_p(s)$ (L_q и R_p — трансформации Меллина функций $l_q(x)$ и $r_p(x)$; 3) $g_1(x)$ и $\mathrm{Te}\,g_p(x)$, которые входят под знак интеграла в (1), удовлетворяют условию $g_i(x)x^{-1/2}\in L(0,\infty)$. 4) $y^{-1/2}g_1(y)$ имеет ограниченную вариацию в окрестности точки $y=x$. Тогда преобразования (1) образуют цепочку.

Доказательство сводится к проверке равенства $g_{n+1}(x)=g_1(x)$. Условия 1), 3), 4) дают возможность воспользоваться формулами свертки и формулами обращения для преобразования Меллина.

После перехода к трансформациям учитывается условие 2), из которого вытекает, что $G_{n+1}(s)=g_1(s)$ ($G_i(s)$ — трансформация Меллина функции $g_i(x)$) и $g_{n+1}(x)=g_1(x)$. В другой теореме рассмотрен случай, когда $g_i(x)\in L_2(0,\infty)$. Полученные результаты иллюстрируются примерами. В. С. Рогожин

558. **Цепочка преобразований. Фокс** (Chain transforms. Fox Charles), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 103—104 (англ.)

Краткое изложение статьи автора (реф. 557).

В. С. Рогожин

559. **Обобщение метода Лапласа. Томсен** (Extensions of the Laplace method. Thomsen D. L., Jr), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 526—532 (англ.)

Автор получает асимптотические выражения для интеграла

$$J=\int_0^a \exp[-h\varphi(t)+k\psi(t)]\,dt \qquad (1)$$

при $h, k\to+\infty$ и $a\to 0+$. Предположения относительно функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$:

A. $\varphi(t)>0$, не убывающая в $0\leqslant t<c$; $\psi(t)$ — вещественная на $0\leqslant t<c$.

B. $\varphi(t)\in C^3$, $\psi(t)\in C^2$ $(0\leqslant t<c)$.

C. $\varphi(t)\in C^2$, $\psi(t)\in C^2$ $(0\leqslant t<c)$.

D. $\varphi(t)\in C^2$, $\psi(t)\in C$ $(0\leqslant t<c)$.

E. $\varphi(0)=\varphi'(0)=\psi(0)=0$, $\varphi''(0)>0$.

F. $k=o(h)$ при $h, k\to+\infty$.

Вводятся интегралы

$$I_{a,h,k}=\int_0^a \exp\left[-\frac{1}{2}h\varphi''(0)t^2+k\psi'(0)t\right]dt, \qquad (2)$$

$$I'_{a,h,k}=\exp[-h\varphi(\tau)+k\psi(\tau)]\times$$

$$\times\int_0^a \exp\left[-\frac{1}{2}h\varphi''(0)(t-\tau)^2\right]dt, \qquad (3)$$

где $\tau=(k/h)[\psi'(0)/\varphi''(0)]+O(k^2/h^2)$; τ получается как решение уравнения $h\varphi'(\tau)=k\psi'(\tau)$ при условиях B и F.

Теорема 1. Если или $\psi'(0)<0$, или $k=O(h^{1/2})$, то при условиях A, D, E, F и при $h, k\to+\infty$, $a\to 0+$ имеем $J\sim I_{a,h,k}$.

Теорема 2. Если $\psi'(0)=0$, то при условиях A, C, E, F и при $h, k\to+\infty$, $a\to 0+$ имеем $J\sim I_{a,h,k}$.

Теорема 3. Если $\psi'(0)>0$, $h^{1/2}=o(k)$, то при условиях A, B, E, F и при $h, k\to+\infty$, $a\to 0+$ имеем $J\sim I'_{a,h,k}$ в предположении ограниченности снизу $(a-\tau)h^{1/2}$.

Теорема 4. Если $\psi'(0)\geqslant 0$, $a<\tau$ и выполнены условия A, B, E, F, то $J\sim I''_{a,h,k}$, при $h, k\to+\infty$, $a\to 0+$. Здесь

$$I''_{a,h,k}=\exp[-h\varphi(a)+k\psi(a)]\times$$

$$\times\int_0^a \exp\left[\beta(t-a)-\frac{1}{2}h\varphi''(0)(t-a)^2\right]dt,$$

где $\beta=-h\varphi'(a)+k\psi'(a)$.

Эта статья обобщает ранее полученные результаты Фулкса (Fulks W., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 613—622), который применял их к изучению неполной гаммы функции. П. И. Кузнецов

560. **Характеристика функций, представимых неабсолютно сходящимся интегралом Лапласа. Сан-Хуан-Льоса** (Charakterisierung der durch einfach konvergente Laplace-Integrale darstellbaren Funktionen. San Juan Llosá Ricardo), Math. Nachr., 1954, 12, № 1—2, 113—118 (нем.)

Даются необходимые и достаточные условия представимости функции интегралом Лапласа.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(s)$ была представима в виде

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt=\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-st}F(t)\,dt\equiv L\{F\},$$

где $F(t)$ суммируема по Лебегу на $0\leqslant t\leqslant T$ для каждого T, необходимо и достаточно, чтобы существовала абсцисса $x_0>0$ такая, что:

1. $f(s)$ непрерывна для $\mathrm{Re}\,s>x_0$.

2. $f(x+iy)/(x+iy)\in L^2(-\infty<y<+\infty)$ для каждого $x>x_0$.

3. Интеграл

$$\Phi(t)=\text{V.P.}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty}e^{ts}\frac{f(s)}{s}\,ds=\lim_{Y\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{x-iY}^{x+iY}e^{ts}\frac{f(s)}{s}\,ds$$

определяет для каждого $x>x_0$ функцию $\Phi(t)$, не зависящую от x, абсолютно непрерывную в каждом ко-

нечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ и обладающую свойствами $\Phi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$, $\Phi(t) = O(e^{x_0 t})$ при $t \to +\infty$. $F(t)$ равна существующей почти всюду производной $\Phi(t)$.

Теорема 2. Утверждения теоремы 1 верны, если условие 3) сохранить, а условия 1), 2) заменить следующими:

I. $f(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > x_0$.

II. $f(s) = o(1)$ при $s \to \infty$ на каждом луче $s = x_0 + re^{i\varphi}$ $(0 \leqslant r < \infty, |\varphi| < \pi/2)$ внутри этой полуплоскости.

III. $|f(s)/s| < M(x)$ при $\operatorname{Re} s \geqslant x > x_0$.

IV. При фиксированном $x > x_0$ и в каждом конечном интервале $0 \leqslant t \leqslant T$ выполняется условие

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iY}^{x+iY} e^{ts} \frac{f(s)}{s}\, ds \right| < N(T)\Psi(T) \text{ для } Y > Y_0(T),$$

где $\Psi(t) \geqslant 0$ суммируема в каждом конечном интервале. Например, IV выполняется при $N(T) = 1 + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Phi(t)$, $\Psi(t) \equiv 1$. П. И. Кузнецов

561. Некоторые теоремы, относящиеся к преобразованию Стилтьеса. Вучкович (Quelques théorèmes relatifs à la transformation de Stieltjes. Vučković Vladeta), Publs Inst. math. Acad. serbe des sci., 1954, 6, 63—74 (франц.)

Пусть $A(u)$ — функция ограниченной вариации на каждом конечном сегменте и $A(0) = 0$. Рассматривается преобразование Стилтьеса $S(x) = \int_0^\infty (u+x)^{1-\rho} dA(u)$, $\rho > 1$, $x > 0$. Основные результаты работы составляют следующие две теоремы:

1) если

$$S(x) = O(\exp(-x^\alpha)),\ x \to \infty,\ 0 < \alpha \leqslant 1/2, \qquad (1)$$

то функция $\chi(s) = \int_0^\infty e^{-su} u^\gamma A\ (u^{1/\alpha})\, du$, $\gamma > -1$, регулярна при $s = 0$; 2) из (1) и условия $u^\beta\ [A(v) - A(u)] > -m$ для $u \leqslant v \leqslant u + u^{1-\alpha}$, $\beta > -\alpha$, следует, что $u^\beta A(u) = O(1)$, $u \to \infty$. Для $\rho = 2$ эти теоремы были доказаны автором в его предыдущей работе (Recueil des travaux de l'Acad. serbe des sciences, Inst. Math., 1953, 3, 255—288).

Доказательство первой теоремы опирается на ряд лемм, в которых устанавливаются: а) асимптотика функции $F(\alpha, \delta, \rho, s; x)$, определяемой рядом

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu s^\nu x^{\alpha\nu+\delta+\rho-1}}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\alpha\nu+\delta+\rho)\,\Gamma(-\alpha\nu-\delta)},\quad s > 0,\quad \rho > 1,$$
$$0 < \alpha \leqslant 1/2,\ \delta > -1,$$

при $x \to +\infty$; б) значение интеграла $\Gamma(\rho) \int_0^\infty (t+x)^{-\rho} \times$ $\times F(\alpha, \delta, \rho, s; t)\, dt = x^\delta \exp(-sx^\alpha)$; в) оценка $|F(\alpha, \delta, \rho, s; x)| \leqslant |x|^{\delta+\rho-1} \exp(|s||x|^\alpha)$ и г) существование интеграла $\int_0^\infty F(\alpha, \delta, \rho, s; x)\, S(x)\, dx$ и возможность перестановки интегрирования после замены в нем функции $S(x)$ через $(\rho - 1) \int_0^\infty (u+x)^{-\rho} A(u)\, du$. Имеются опечатки, в частности, в заключении теоремы 2).

М. Н. Олевский

562. Об одной функции операционного исчисления. Станкович (Sur une fonction du calcul opérationnel. Stanković Bogoljub), Publs Inst. math. Acad. serbe des sci., 1954, 6, 75—78 (франц.)

Решение интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \exp(-st) f_\alpha(t)\, dt = \exp(-s^\alpha),\ 0 < \alpha < 1,$$

известно в форме интеграла (Follard H., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 5, № 10):

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(-tu - u^\alpha \cos\pi\alpha) \sin(u^\alpha \sin\pi\alpha)\, du \quad (1)$$

и в виде ряда (Humbert P., Bull. sci. math., 1945, 49, 121—129):

$$f_\alpha(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sin\pi\alpha k \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{t^{\alpha k+1}}.$$

Микусинский (Mikusinski J., Studia math., 1951, 12, 208—224) нашел для функции (1), что $f_\alpha^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \ldots$; Влодарский (Włodarski L., Studia math., 1952, 13, 188—189) показал, что непрерывное решение $f_\alpha(t)$ будет $\geqslant 0$ при $t \geqslant 0$.

Автор доказывает, что $f_\alpha(t) > 0$ при $t > 0$ (По этому поводу см. также РЖМат, 1955, 327), а также, что $f_\alpha(t) \sim \Gamma(\alpha+1) \sin\alpha\pi / t^{\alpha+1}$ при $|\arg t| < \pi/2$ и $|t| \to \infty$.

М. К. Фаге

563 К. Сборник упражнений по операционному исчислению. Стендер П. В. Л., Ленингр. заоч. индустр. ин-т, 1954, 20 стр., беспл.

См. также: 9, 10, 11, 129, 143, 155, 181, 320, 325, 326, 335, 394, 409, 430, 435, 452, 468, 486, 636, 637, 771

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

564. Некоторые задачи нелинейного анализа. Красносельский М. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3 (61), 57—114

Дан обзор методов и результатов, развитых и полученных в связи с изучением вопроса о существовании и единственности решения уравнения $A(x) = x$ для некоторых классов нелинейных операторов A, действующих в различных пространствах Банаха, а также в связи с изучением вопроса о собственных функциях таких операторов. Рассмотрены вопросы о приближенном решении уравнения $A(x) = x$, об устойчивости решений, о точках ветвления решений и, в частности, о точках бифуркации. Доказательства отсутствуют. Изложены различные методы исследования этого круга вопросов, предложения о некоторых свойствах операторов и результаты, полученные топологическими и вариационными методами. Упоминается о работах В. В. Немыцкого. Подробно освещены топологические

методы Лерея и Шаудера в том виде, в каком эти методы и полученные ими результаты изложены в работах автора обзора, с некоторыми дополнениями, принадлежащими автору, Э. Роте (E. Rothe) и Дж. Кронин (J.Cronin). Вариационные методы доказательства существования решения освещены менее полно. Приведено лишь одно предложение, сформулированное в заметке автора (РЖМат, 1953, 332). Вариационный метод доказательства существования собственных функций (стр. 99—100) изложен в том виде, в каком он был предложен и развит в работах референта (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 2, 197—200; РЖМат, 1955, 3842; Матем. сб., 1952, 30(72): 1,3—10; РЖМат, 1953, 1222; 1955, 1365), о чем не упомянуто в обзоре. Изложен вариационный метод решения задачи о точках бифуркации (РЖМат, 1953, 1253; 1954, 1717). Много внимания уделено пространствам Орлича — приведены почти все основные предложения, опубликованные за последние годы в виде кратких заметок без доказательств.

Примечание референта. Библиография не является полной, в ней отсутствуют некоторые основные работы других авторов, опубликованные за последние годы. Например, работы референта по рассмотренным в обзоре вопросам, опубликованные за 1953 и 1954 гг. Иногда отсутствуют нужные ссылки, по которым читатель мог бы познакомиться с доказательством сформулированных предложений. Имеется ряд неточностей в ссылках, причем предложения некоторых авторов приписаны другим авторам или излагаются без всяких ссылок. М. М. Вайнберг

565. О некоторых свойствах интегральных квадратичных форм в пространствах $L^q (q \leqslant 2)$. Вайнберг М. М., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 3 (61), 236—238

В пространстве $L^q (q \leqslant 2)$ рассматривается квадратичная форма

$$I(u) = \int_B \int_B K(x, y) u(y) u(x)\, dy\, dx$$

(B — множество конечной меры s-мерного евклидова пространства). Предполагается, что оператор

$$Au = \int_B K(x, y) u(y)\, dy$$

действует вполне непрерывно из L^q в $L^p (p^{-1} + q^{-1} = 1)$ и является самосопряженным, если его рассматривать в L^2. Вводятся обозначения

$$I_n(u) = \int_B u(x) A_n u\, dx,$$

$$A_n u = \int_B \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(y)}{\lambda_k} \right) u(y)\, dy, \quad (u \in L^q),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ($|\lambda_i| \leqslant |\lambda_{i+1}|$) и $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ — характеристические числа и соответствующие им собственные функции оператора A, рассматриваемого в L^2.

Основное содержание первых двух теорем заключается в том, что форма $I(u)$ слабо непрерывна в L^q и что

$$\lim_{n \to \infty} \max_{\|u\| \leqslant r} |I(u) - I_n(u)| = 0,$$

если почти все числа λ_i имеют один и тот же знак.

Далее автор указывает, что теоремы о квадратичных формах позволяют установить новые условия компактности для нелинейных операторов, которые приводят к новым предложениям для оператора Гаммерштейна

$$\Gamma u = \int_B K(x, y) g(u(y), y)\, dy.$$

В качестве примеров приведен ряд теорем о существовании собственных функций у оператора Г. М. А. Красносельский

566. О нерефлексивных пространствах суммируемых функций. Гальперин (On the non-reflexive L-function spaces. Halperin Israel), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 118 (англ.)

Указывается на пространства L^λ, являющиеся обобщением пространств L^p. Сопряженные к L^λ пространства обобщают пространство L^∞. Г. П. Акилов

567. Линейные функционалы и протяженность. Лумис (Linear functionals and content. Loomis L. H.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 1, 168—182 (англ.)

Пусть L — линейное множество функций, определенных на некотором множестве S, и I — положительный линейный функционал в L. Множество $A \subset S$ имеет протяженность (content), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся функции $g, h \in L$ такие, что $g \leqslant \chi_A \leqslant h$ (χ_A — характеристическая функция множества A) и $I(h) - I(g) \leqslant \varepsilon$. Величина $\mu(A) = \sup I(g) = \inf I(h)$ называется протяженностью множества A. Функционал I естественным образом распространяется на множество R, состоящее из функций f, для которых существуют такие g, $h \in L$, что $g \leqslant f \leqslant h$ и $\sup I(g) = \inf I(h)$; общее значение этих величин принимается за $I(f)$. Множество R называется двусторонним пополнением множества L. Ясно, что R — линейное множество, двустороннее пополнение которого совпадает с ним самим; распространенный функционал I и на R будет линейным и положительным. Множество $A \subset S$ имеет протяженность тогда и только тогда, когда $\chi_A \in R$; при этом $\mu(A) = I(\chi_A)$. Через E обозначается множество всех функций вида $\Sigma c_k \chi_{A_k}$, где A_k — множества, имеющие протяженность. Очевидно, $E \subset R$. Если $g \in E$, то $I(g)$ можно записать в виде интеграла $\int g d\mu$. Функция f называется суммируемой по Риману, если она входит в двустороннее пополнение множества E. Поскольку такая функция должна входить в R, для нее имеет смысл $I(f)$, причем и здесь $I(f)$ может быть записано в виде интеграла $I(f) = \int f d\mu$.

Доказывается несколько теорем, связывающих введенные понятия. Приведем одну из них.

Теорема 1. Если L содержит постоянные, то множества, имеющие протяженность, образуют булевскую алгебру, на которой протяженность μ конечно-аддитивна; при этом класс суммируемых по Риману функций совпадает со множеством ограниченных функций из R.

Дальнейшие результаты относятся, главным образом, к несобственному интегрированию. Так, при некоторых условиях, накладываемых на L и I, доказывается, что $I(f) = \int f d\mu$ для любой $f \in L$, причем интеграл следует понимать, вообще говоря, как несобственный. Аналогичная, но более слабая теорема была доказана Аренсом (Arens R., Duke Math. J., 1950, 17, 499—506). Г. П. Акилов

568. Пространство Лебега — пример регулярного пространства. Гомиш (Espace de Lebesgue — un exemple d'espace régulier. Gomes Ruy Luis), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 111—112 (франц.)

Пусть F — совокупность всех числовых ограниченных функций, заданных в промежутке $[a, b]$. Интервалом $[h, g]$ называется совокупность элементов $f \in F$, удовлетворяющих неравенству $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ ($x \in [a, b]$). Под окрестностью элемента $f_0 \in F$ понимается произ-

вольный интервал $[h, g]$, содержащий f_0, и такой, что h полунепрерывна сверху, а g — снизу.

Указываются некоторые свойства пространства F. Оно, в частности, является регулярным топологическим (но не линейным топологическим) пространством. Поскольку интеграл Лебега может быть получен из интеграла Коши (определенного для непрерывных функций) распространением последнего по непрорывности (в топологии, определенной выше), автор называет F пространством Лебега. Г. П. Акилов

569. **Возмущения линейных операторов в банаховом пространстве.** **Розенблум** (Perturbation of linear operators in Banach spaces. Rosenbloom Paul), Arch. Math., 1955, **6**, № 2, 89—101 (англ.)

Пусть T_0 — линейный оператор в банаховом пространстве X (не обязательно ограниченный), T_0^* — сопряженный с T_0 оператор, действующий в пространстве X^*, x_0 и x_0^* — собственные векторы соответственно операторов T_0 и T_0^* с одним и тем же собственным значением λ_0. Предполагается, что в подпространстве $X_1 \subset X$ векторов x, для которых $x_0^*(x) = 0$ оператор $T_0 - \lambda_0 I$ имеет ограниченный обратный оператор R. Рассматривается ограниченный линейный оператор U в пространстве X. Доказывается, что если норма U достаточно мала, то существуют единственные собственный вектор $x(U)$ и собственное значение $\lambda(U)$ оператора $T_0 + U$, близкие к x_0 и λ_0 соответственно. Доказательство основано на теореме о неявных функциях в банаховом пространстве. Подобный метод был ранее применен Л. В. Канторовичем (Тр. Матем ин-та им. Стеклова, 1949, **28**, 104—144). Для эффективного вычисления $\lambda(U)$ и $x(U)$ используется принцип сжатых отображений. Функции $\lambda(U)$ и $x(U)$ имеют дифференциал Фреше при $U = 0$. Находятся линейные аппроксимации этих функций. При этом получаются формулы, которые для случая эрмитова оператора T_0 в гильбертовом пространстве X переходят в известные формулы, полученные Борном, Гайзенбергом и Иорданом. Приводятся явные оценки для ошибок при пользовании этими формулами и для скорости сходимости процесса. Указывается, что все рассуждения переносятся на некоторый класс нелинейных операторов U. В качестве примера рассматривается уравнение $\ddot{x} + Ux = \lambda x$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$, где U — оператор (не обязательно линейный), определенный на всех непрерывных в промежутке $0 \leqslant t \leqslant \pi$ функциях $x(t)$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(\pi) = 0$.

Автор указывает на связь работы с известными работами Реллиха и работой Вольфа (Wolf F., Math. Ann., 1952, **124**, 317—333). В работе имеются опечатки, например в формулировке теоремы 1, в третьей строке снизу, на стр. 94 пропущен множитель $\{\| R \| (b^2 + \mu^2 + 2\sqrt{2}\,\mu b)\}^{-1}$. Ю. Л. Далецкий

570. **Функционалы в подпространствах L^α.** **Рогозинский** (Functionals on subspaces of L^α. Rogosinski Werner Wolfgang), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 161—162 (англ.)

В комплексном пространстве $L^\alpha (1 \leqslant \alpha < \infty)$ рассматривается подпространство $\mathfrak{H}$ и линейный функционал B на нем. Как известно, $B(g) = \int g\mu dP$, где $\mu \in L^\beta$, $\alpha^{-1} + \beta^{-1} = 1$ и $\| B \| = \| \mu \|_{L^\beta}$.

Пусть $\alpha > 1$. Тогда, если G означает функцию из $\mathfrak{H}$ такую, что $\| G \| = 1$ и $B(G) = \| B \|$, то $\mu = \| B \| \times \operatorname{sign} \overline{G} \, | G |^{\alpha - 1}$; при этом как G, так, следовательно, и μ однозначно определяются функционалом B. При $\alpha = 1$ это неверно. Однако и в этом случае, если $\mathfrak{H}$ — так называемое аналитическое подпространство, т. е. состоит из функций, которые почти везде отличны от нуля, и если экстремальная функция G существует, то μ единственно и $\mu = \| B \| \operatorname{sign} \overline{G}$.

Утверждается, что аналогичные обстоятельства имеют место и для функционалов в пространстве C непрерывных функций. Указывается на возможность использования этих результатов в проблеме моментов. Г. П. Акилов

571. **Об аддитивных операторах в функциональных пространствах.** **Гринблюм М. М., Винокуров В. Г.**, Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 36, 25—29

Пусть L — аддитивный и однородный оператор, отображающий банахово пространство E в банахово пространство E_1. Особым подпространством оператора L называется множество M всех таких элементов $y \in E_1$, что существует последовательность $x_n \to 0$ и $Lx_n \to y$. Если $M = \{0\}$, то говорят, что L принадлежит классу $C^{(0)}$, если же $M = E_1$, то — классу $D^{(0)}$. В промежуточном случае $(\{0\} \neq M \neq E_1)$ оператор L естественным образом порождает аддитивный и однородный оператор L_1, отображающий E в фактор-пространство E_1/M. Если $L_1 \in C^{(0)}$, то данный оператор L принадлежит классу $C^{(1)}$, если же $L_1 \in D^{(0)}$, то L принадлежит классу $D^{(1)}$. Дальнейшее рассмотрение позволяет определить классы $C^{(\alpha)}$ и $D^{(\alpha)}$ для любого трансфинитного (конечного или нет) числа α. Утверждается, что построенная классификация непуста.

Доказывается теорема о том, что оператор P, проектирующий E на его подпространство E_1 (если его рассматривать как оператор из E в E_1), принадлежит одному из классов $C^{(0)}$, $D^{(0)}$, $C^{(1)}$. Точнее говоря, доказывается, что если $P \neq C^{(0)} \cup D^{(0)}$, то $P \in C^{(1)}$. Этот результат применяется к вопросу об условиях разложимости данного пространства в прямую сумму двух данных подпространств (Гринблюм М. М., Докл. АН СССР, 5190, **70**, № 5).

Необходимо отметить исключительно большое количество опечаток (более 50). Г. П. Акилов

572. **Метод ортогональных траекторий для нелинейных операторов вариационного типа в пространстве L_p.** **Цитланадзе Э. С.**, Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, **20**, 245—278

Доказан ряд теорем об обобщенных собственных функциях некоторых операторов, действующих в пространстве $L_p (p > 1)$. Эти теоремы обобщают результаты Л. А. Люстерника и В. И. Соболева (Люстерник Л. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1939, 257—264; Соболев В. И., Докл. АН СССР, 1941, **31**, № 8, 734—736) об оценке количества критических точек четных функционалов на сфере гильбертова пространства.

Изучается неотрицательный, обращающийся в нуль только при $x = 0$ четный слабонепрерывный функционал $f(x)$, который имеет в каждой точке $x \in L_p$ дифференциал Фреше $df(x, h) = (Lx, h)$, где Lx — градиент функционала $f(x)$. Предполагается, что оператор L удовлетворяет условию Липшица. Вводится оператор $Nx(t) = | x(t) |^{p/q} \operatorname{sign} x(t)$ $(x(t) \in L_p, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1)$, значения которого отличаются положительным множителем от значений градиента нормы в L_p (Mazur S., Studia Math., 1933, **4**, 128—133). Элемент $x \in L_p$, $\| x \| = 1$, называется нормированным собственным элементом оператора L, если $Lx = \lambda Nx$.

Через S_1^* обозначено бесконечномерное проективное пространство, полученное идентифицированием диаметрально противоположных точек шара $S_1 (\| x \| \leqslant 1)$. Через $[P^*]_k$ обозначен класс всех компактных мно-

жеств $P^* \subset S_1^*$, имеющих в S_1^* категорию k в смысле Люстерника — Шнирельмана.

Каждый четный функционал, определенный на S_1, можно рассматривать как функционал, определенный на S_1^*. Доказано, что оператор L имеет по крайней мере один нормированный собственный элемент на каждой поверхности уровня $f(x) = c_k$, где

$$c_k = \sup_{[P^*]_k} \min_{x \in P^*} f(x).$$

Так как все c_k положительны и $c_k \to 0$, то из указанной теоремы вытекает, что оператор L имеет не менее счетного числа различных нормированных собственных элементов.

Проведен анализ случая совпадения критических значений c_k. Если $c = c_i = c_j$ $(j > i)$, то категория множества T в S_1^* не меньше $j - i + 1$, где T состоит из точек проективного пространства S_1^*, соответствующих нормированным собственным элементам оператора L, расположенным на поверхности уровня $f(x) = c$.

В конце статьи указаны приложения к оценке количества нормированных решений нелинейного интегрального уравнения вида

$$\int_0^1 K(s,\ t)\, x(t)\, dt = \lambda |x(s)|^{p/q} \operatorname{sign} x(s).$$

М. А. Красносельский

573. Об устойчивости критических значений четных функционалов на сфере. Красносельский М. А., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 6, 957—959

Пусть в банаховом пространстве E заданы дифференцируемые функционалы $f(x)$ и $\varphi(x)$. Точка $x_0 \in E$ называется критической точкой функционала $f(x)$ относительно многообразия $\varphi(x) = \varphi(x_0)$, если $\operatorname{grad} f(x_0) = \mu \operatorname{grad} \varphi(x_0)$, а $f(x_0)$ называется критическим значением f на $\varphi(x) = \varphi(x_0)$. Если E — вещественное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ и $\varphi(x) = (x, x)$, то $\operatorname{grad} \varphi(x) = 2x$, так что в этом случае критические точки относительно сферы $S(\|x\| = r > 0)$ удовлетворяют равенству: $\operatorname{grad} f(x_0) = \mu x_0$, где μ — скаляр. Функционал $f(x)$ называется гладким в шаре $\|x\| \leqslant r$, если остаток его дифференциала Фреше равномерно ограничен в этом шаре.

Теорема: Каждому натуральному N отвечает такое $\delta > 0$, что каждый функционал вида $F(\varphi) = F_0(\varphi) + G(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{H}$ имеет на сфере S не менее N различных критических значений, если гладкие слабо непрерывные функционалы F_0 и G удовлетворяют условиям: F_0 есть четный положительный функционал на S, причем $\|\operatorname{grad} F_0(\varphi)\| > 0$ в тех точках шара $\|\varphi\| < r$, в которых $F_0(\varphi) > 0$, и $\sup_{\varphi \in S} \|\operatorname{grad} G(\varphi)\| + \sup_{\varphi \in S} |G(\varphi)| < \delta$.

Доказательство отсутствует. М. М. Вайнберг

574. О дифференциале и производной в нормированных пространствах. Маринеску (Asupra diferenţialei şi derivatei în spaţiile normate. Marinescu G.), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi. fiz., 1954, 6, № 2, 213—219 (рум.; резюме русс., франц.)

Из теоремы, установленной в работе референта для функционалов (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4 (50), 55—102, теорема 2.1), путем применения линейных непрерывных функционалов выводится следующая аналогичная

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

1. Дифференциал Гато $\delta T(x; h)$ оператора T, действующего из вещественного банахова пространства E в вещественное банахово пространство F, существует в некоторой окрестности $x_0 \in E$ и для всякого $h \in E$ непрерывен в точке x_0.

2. $\delta T(x_0; h)$ непрерывен в точке $h = 0$. Тогда $\delta T(x_0; h)$ — линейный и непрерывный оператор от h.

С помощью этой теоремы доказывается

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1. Дифференциал Гато $\delta T(x; h)$ существует в некоторой окрестности V точки $x_0 \in E$ и непрерывен в точке $h = 0$ при каждом $x \in V$.

2. $\delta T(x; h)$ непрерывен в V по x при каждом $h \in E$.

3. Производная Гато T' оператора T непрерывна в точке x_0 вдоль любого луча, выходящего из x_0. Тогда существует дифференциал Фреше оператора T в точке x_0:

$$dT(x_0; h) = \delta T(x_0; h).$$

При помощи теоремы 2 устанавливается теорема 3, которая представляет собою иную формулировку (с менее ограничительными условиями) теоремы Л. А. Люстерника (Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, М.— Л., 1951, стр. 303). Если допустить, что в пространстве F слабая топология эквивалентна топологии нормы, то в теореме 2 можно отказаться от требования радиальной непрерывности (теорема 4). Пусть $C(E, F)$ есть пространство всех линейных операторов, действующих из E в F. В теореме 5 дано необходимое и достаточное условие того, чтобы оператор S из E в $C(E, F)$ представлял собою производную от оператора T из E в F.

М. М. Вайнберг

575. Производная алгебра банаховой алгебры. Хелгасон (The derived algebra of a Banach algebra. Helgason S.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 10, 994—995 (англ.)

Рассматривается полное коммутативное нормированное кольцо A (банахова алгебра, в терминологии автора) и его гомоморфный образ $\hat{A}$ в кольце непрерывных обращающихся в нуль на бесконечности функций $\hat{x}$, определенных на локально бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$ регулярных максимальных идеалов M кольца A. Кольцо A называется полупростым, если этот гомоморфизм есть изоморфизм, и самосопряженным, если $\hat{A}$ вместе с каждой функцией содержит комплексно сопряженную функцию.

Совокупность A_0 всех $x \in A$, для которых конечно выражение

$$\|x\|_0 = \sup_{y \in A - 0} \{\|xy\| / \|\hat{y}\|_\infty\},$$

где $\|\hat{y}\|_\infty = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |\hat{y}(M)|$, автор называет производной алгеброй алгебры A.

Основные результаты:

1. A_0 есть полупростое кольцо по отношению к норме $\|x\|_0$.

2. Существует отображение φ пространства $\mathfrak{M}_0$ максимальных идеалов кольца A_0 в пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца A такое, что: а) φ есть гомеоморфизм и $\varphi(\mathfrak{M}_0)$ открыто в $\mathfrak{M}$; б) предложение а) остается справедливым, если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_0$ рассматривать как топологические пространства с джекобсоновской топологией.

3. Всякому непрерывному линейному функционалу F в A_0 отвечает мера Радона μ_F на $\mathfrak{M}_0$ такая, что для любых $x, y \in A_0$

$$F(xy) = \int_{\mathfrak{M}_0} h(xy)\, d\mu_F(M),$$

где $h(x) = x(M)$.

4. Если A есть совокупность $L^1(0, 2\pi)$ всех суммируемых в $[0, 2\pi]$ функций, в которой умножением является свертывание, то а) $A_0 \supset L^2(0, 2\pi)$; б) если a_n — коэффициенты Фурье функции из A_0 и $|b_n| \leqslant |a_n|$, то в A_0 существует функция с коэффициентами Фурье b_n.

5. Если A — кольцо почти периодических функций с умножением $x \cdot y(t) = \mathfrak{M}_s(x(t-s)y(s))$ ($\mathfrak{M}_s$ — среднее по s), то A_0 состоит из тех периодических функций, ряд Фурье которых сходится абсолютно.

При этом, если $x(t) \sim \Sigma a(\lambda) e^{-i\lambda t}$, то $\|x\|_0 = \Sigma |a(\lambda)|$. Доказательства отсутствуют. М. А. Наймарк

576. **Неособенный элемент пространства Винера.** Лаud (A non-exceptional element of Wiener space. Loud W. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 940—941 (англ.)

Дается дополнение к следующему результату работы Камерона и Мартина (Cameron R. H., Martin W. T., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 130—137).

Пусть $C = \{x(t)\}$ — пространство непрерывных функций, определенных на $0 \leqslant t \leqslant 1$ и равных нулю при $t = 0$.

Для $x \in C$ положим:

$$\sigma_n(x) = \sum_{j=1}^{2^n} \left[x\left(\frac{j}{2^n}\right) - x\left(\frac{j-1}{2^n}\right) \right]^2.$$

Камерон и Мартин установили, что последовательность $\{\sigma_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ стремится к $1/2$ с вероятностью 1 (Гнеденко Б., Курс теории вероятностей, Гостехиздат, 1954, стр. 199—200), что эквивалентно сходимости этой последовательности к $1/2$ почти всюду на C в смысле меры Винера (Wiener N., Acta math., 1930, 55, 117—258).

Этот факт использован авторами при доказательстве некоторых теорем, связанных с преобразованием подмножеств $\{x(t)\} \subset C$ в подмножества $\{\lambda x(t)\} \subset C$ при вещественном $\lambda > 0$. В более общей форме этот результат был доказан Леви (Lévy P., Amer. J. Math., 1940, 62, 487—550).

В реферируемой статье строится конкретный пример сравнительно простой функции

$$x_0(t) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m/2} g(t, 2^{-m}),$$

где $g(t, h)$ есть $2h$-периодическая функция, равная нулю при $t = 2kh$, единице при $t = (2k+1)h$ (k — целое число) и линейная на интервалах между этими точками, и доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x_0) = 1/2$.

Этот пример интересен потому, что для большинства простых функций $x(t)$ из множества C, в частности для всех функций ограниченной вариации, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = 0.$$

Е. П. Калугина

577. **Неравенство Штейница и пределы римановых сумм. Гальперин, Миллер** (An inequality of Steinitz and the limits of Riemann sums. Halperin Israel, Miller Norman), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, sec. 3, 48, June, 27—29 (англ.)

Рассматривается ограниченная функция $F(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, значения которой лежат в линейном нормированном пространстве V. Строятся интегральные суммы $\Sigma_{i=1}^{j} F(\zeta_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ для всех разбиений $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_j = 1$ $(j = 1, 2, \ldots)$ и любых промежуточных значений ζ_i $(t_{i-1} \leqslant \zeta_i < t_i)$. Вектор v называется пределом Римана для $F(t)$, если какая-то последовательность интегральных сумм (занумерованных индексом n) сходится к v в метрике пространства V, когда $\max_i (t_i - t_{i-1}) \to 0$ при $n \to \infty$. Авторы доказывают, что множество S всех пределов Римана, порожденных данной $F(t)$, замкнуто и выпукло, если V есть евклидово (т. е. со скалярным произведением) действительное или комплексное пространство произвольной размерности. Для конечномерного V эта теорема была доказана различными методами Хартманом (Hartman P., Quart. J. Math., 1947, 18, 124—127) и Джеффри (Jeffery R. L., Trans. Roy. Soc. Canada, 1950, sec. 3, 44, 43—49).

Примечание референта. С помощью неравенств, аналогичных полученным референтом (РЖМат, 1955, 3172), эта теорема легко может быть распространена на случай $V = L_p$ $(p > 1)$. М. И. Кадец

578. **Обобщение теоремы Боголюбова на топологические абелевы группы с дополнением о средних Банаха в неабелевых группах. Фёльднер** (Generalization of a theorem of Bogolioùboff to topolcgical Abelian groups with an appendix on Banach mean values in non-Abelian groups. Følner Erling), Math. scand., 1954, 2, № 1, 5—18 (англ.)

Н. Н. Боголюбову принадлежит следующая теорема (Ін-т будівельної механіки АН УРСР, Зап. кафедри матем. фізики, 1939, 4, 185—194): Пусть E — произвольное относительно плотное множество на вещественной прямой, тогда по данным достаточно малым $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ можно найти такие линейно независимые числа $\chi_1, \ldots, \chi_q$, что каждое x, удовлетворяющее неравенствам $|\chi_j x| < \varepsilon \pmod{2\pi}$ $(j = 1, \ldots, q)$, удовлетворяет неравенству $|x - x_1 - x_2 + x_3 + x_4| < \delta$, где $x_k \in E$. Эта теорема дала возможность Н. Н. Боголюбову построить новую теорию равномерных почти периодических функций.

В реферируемой статье дается обобщение приведенной теоремы на произвольную коммутативную непрерывную группу G. Множество $E \subset G$ автор называет плотным относительно элементов $g_1, \ldots, g_k \in G$, если $\bigcup_{j=1}^{k} (E + g_j) = G$. Справедлива теорема: Пусть $E \subset G$ плотно относительно некоторых k элементов, а V — произвольная окрестность нуля группы. Тогда существует $q \leqslant k^2$ непрерывных характеров $\chi_1(x), \ldots, \chi_q(x)$ группы G таких, что каждое $x \in G$, удовлетворяющее неравенствам $\operatorname{Re} \chi_1(x) \geqslant 0, \ldots, \operatorname{Re} \chi_q(x) \geqslant 0$, принадлежит множеству $E - E + E - E + V$.

Автор приводит доказательство этой теоремы, опирающееся на некоторые факты теории положительно определенных функций на группе, а также устанавливает ряд близких результатов.

Очень близкое доказательство (для случая группы целых чисел) было опубликовано Н. Н. Боголюбовым в его более поздней работе (Сб. тр. Ин-та матем. АН УССР, 1948, № 11, 113—120), эта работа, повидимому, осталась неизвестной автору.

В дополнении к работе выясняется вопрос о возможности построения двусторонне-инвариантного среднего на некотором линейном двусторонне-инвариантном пространстве L вещественных ограниченных функций, определенных на некоммутативной группе G. Для построения такого среднего необходимо и достаточно, чтобы $\sup_{x \in G} H(x) \geqslant 0$ для каждой функции $H(x) = h_1(x) - h_1(f_1 x g_1) + \ldots + h_n(x) - h_n(f_n x g_n)$, где $h_1, \ldots, h_n$ — произвольные функции из L; $f_1, \ldots, f_n$; $g_1, \ldots, g_n$ — произвольные элементы из G. Рассматриваются также близкие вопросы. Ю. М. Березавский

579. **Представление линейных операторов, отображающих L^p в L. Фуллертон** (The representation

of linear operators from L^p to L. Fullerton R. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 689—696 (англ.)

Пусть $L^p(R, \varphi)$ — банахово пространство вещественных функций, заданных на пространстве с мерой (R, φ) и суммируемых со степенью $p\,(1 \leq p < \infty)$ по φ. Через $J(R)$ обозначим σ-кольцо измеримых подмножеств множества R и через $A(R, \varphi)$ — пространство вполне аддитивных и абсолютно непрерывных (относительно φ) функций множеств с нормой

$$\| F \| = \operatorname*{var}_{e \in J(R)} F(e) = \sup_{e \in J(R)} F(e) - \inf_{e \in J(R)} F(e);$$

$$F \in A(R, \varphi).$$

Предполагается, что R есть соединение счетной последовательности множеств конечной меры.

Теорема. Всякий ограниченный линейный оператор, отображающий $L^p(R, \varphi)$ в $A(S, \gamma)$, где S и γ имеют тот же смысл, что R и φ, имеет вид

$$Tx = \int_R K(e, t)\, x(t)\, d\varphi,$$

где вещественное ядро $K(e, t)$, определенное для $e \in J(S)$ и $t \in R$, удовлетворяет следующим условиям: а) $K(e, t) \in L^q(R, \varphi)$ для каждого $e \in J(S)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$; б) $\int_E K(e, t)\, d\varphi \in A(S, \gamma)$ для любого $E \in J(R)$, $0 < \varphi(E) < \infty$; в) $\sup\limits_{e \in J(R)} \{\int_R |K(e, t)|^q d\varphi\}^{1/q} = M < \infty$.

Обратно, всякий оператор указанного вида представляет собой ограниченный линейный оператор, отображающий $L^p(R, \varphi)$ в $A(S, \gamma)$.

При этом норма оператора T удовлетворяет неравенствам $M \leqslant \| T \| \leqslant 2M$.

Следствие. Для того чтобы T был ограниченным линейным оператором из $L^p(R, \varphi)$ в $L(S, \gamma)$ и переводил каждый существенно неотрицательный элемент из $L^p(R, \varphi)$ в существенный неотрицательный элемент из $L(S, \gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись все условия теоремы и следующее дополнительное условие: для всякого $e \in J(S)$ и почти всех $t \in R$ $K(e, t) \geqslant 0$. В этом случае норма оператора T находится по формуле:

$$\| T \| = \sup_{e \in J(R)} \{\int_R |K(e, t)|^q d\varphi\}^{1/q}.$$

Доказательство использует обобщенную теорему Радона — Никодима (Сакс С., Теория интеграла, Изд-во ин. лит., 1949, стр. 59). М. М. Вайнберг

580. **Разностные алгебры линейных операторов банахова пространства.** Юд (Difference algebras of linear transformations on a Banach space. Yood Bertram), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 4, 615—636 (англ.)

Пусть $\mathfrak{E}$ — кольцо всех линейных ограниченных операторов, действующих в бесконечномерном банаховом пространстве X, и $\mathfrak{R}$ – двусторонний идеал в $\mathfrak{E}$, состоящий из всех линейных вполне непрерывных операторов из $\mathfrak{E}$. Фактор-кольцо $\mathfrak{E}/\mathfrak{R}$ называется разностной алгеброй; $\mathfrak{P}$ – ее радикал. Приводится ряд вспомогательных предложений, бо́льшая часть которых следует из частично питируемых автором статей (Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 7, № 3, 147—166; Аткинсон Ф. В., Матем. сб., 1951, 28, № 1, 3—14; Гохберг И. Ц., Докл. АН СССР, 1951, 76, № 4, 477—480).

Исследуется множество $\mathfrak{M}$ всех элементов $\mathfrak{E}$, которые входят в классы вычетов, принадлежащие $\mathfrak{P}$. Одна из основных теорем дает следующие характеристики множества $\mathfrak{M}$:

а) $\mathfrak{M}$ есть множество всех операторов $U \in \mathfrak{E}$, для которых оператор $B + U$ нормально разрешим и хоть одно из уравнений $(B + U)x = 0$, $(B^* + U^*)f = 0$ имеет лишь конечное число линейно независимых решений (B — произвольный обратимый оператор из $\mathfrak{E}$);

б) $\mathfrak{M}$ есть множество всех операторов $U \in \mathfrak{E}$, для которых оператор $B + U$ нормально разрешим и уравнение $(B + U)x = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений, где B — произвольный обратимый оператор из $\mathfrak{E}$;

в) $\mathfrak{M}$ есть множество всех операторов $U \in \mathfrak{E}$, для которых оператор $B + U$ нормально разрешим и уравнение $(B^* + U^*)f = 0$ имеет конечное число решений, где B — произвольный обратимый оператор из $\mathfrak{E}$.

Одно из следствий приведенных характеристик множества $\mathfrak{M}$ обобщает известную теорему Шаудера (Schauder J., Studia math., 1930, 2) следующим образом:

Пусть $\mathfrak{L}$ — левый или правый идеал в $\mathfrak{E}$; пусть далее для любого оператора $T \in \mathfrak{L}$ оператор $I + T$ нормально разрешим и хоть одно из уравнений $(I + T)x = 0$, $(I + T)^* f = 0$ имеет конечное число линейно независимых решений; тогда эти уравнения имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Некоторые из приведенных предложений обобщаются на обыкновенные и метрические кольца.

Понятие индекса оператора и некоторые из его простейших свойств переносятся на элементы абстрактной полугруппы.

В последнем параграфе изучаются множества обратимых, обратимых слева и обратимых справа элементов в $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{E}/\mathfrak{R}$. И. Ц. Гохберг

581. **Об устойчивости свойства нормальной разрешимости линейных уравнений. Гольдман М. А.,** Докл. АН СССР, 1955, 100, № 2, 201—204

Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства и пусть $\mathfrak{S}$ — пространство всех линейных ограниченных операторов, отображающих E_1 в E_2. Пусть $T \in \mathfrak{S}$ и $\alpha(T)$ — размерность подпространства всех решений уравнения $Tx = 0$, $x \in E_1$. Пусть оператор T нормально разрешим; он называется обладающим устойчивой нормальной разрешимостью, если существует такое число $\rho > 0$, что для любого $B \in \mathfrak{S}$, для которого $\| B \| < \rho$, оператор $T + B$ нормально разрешим. Обозначим через Γ_0 множество всех операторов из $\mathfrak{S}$, обладающих устойчивой нормальной разрешимостью.

1. Для того чтобы линейный ограниченный нормально разрешимый оператор T принадлежал Γ_0, необходимо и достаточно, чтобы хоть одно из чисел $\alpha(T)$, $\alpha(T^*)$ было конечным.

2. Для того чтобы линейный ограниченный оператор T принадлежал множеству Γ_0, необходимо и достаточно, чтобы оператор T можно было представить в виде $T = U + V$, где V — линейный вполне непрерывный оператор, а U — обобщенно обратимый оператор (оператор U называется обобщенно обратимым, если образ хотя бы одного из операторов U или U^* совпадает с E_2 или E_1^* соответственно).

Во втором критерии полную непрерывность V можно заменить конечномерностью.

Доказательство необходимости этих критериев основывается на следующей лемме:

Пусть L — подпространство E_1 и размерность факторпространства E_1/L бесконечна. Тогда в E_1 существует такое бесконечномерное подпространство L_1, что пересечение $L \cap L_1$ состоит только из нулевого элемента. Достаточность предложений 1 и 2 в некоторых частных случаях доказана ранее Ф. В. Аткинсоном (Матем. сб., 1951, 28 (70), № 1; см. также Николь-

ский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1943, 7, № 3; Гохберг И. Ц., Докл. АН СССР, 1951, 76, № 4; 78, № 4). И. Ц. Гохберг

582. **Об одном способе построения N'-функций, эквивалентных дополнительным к заданным N'-функциям.** Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., Тр. физ.-матем. фак. Воронежск. ун-та, 1954, 33, 3—17

Непрерывная выпуклая функция $M(u)$ $(-\infty < u < \infty)$ называется N'-функцией, если: α) $M(0) = 0$, $M(-u) = M(u) > 0$ при $u \neq 0$; β) $\lim_{u \to 0} u^{-1} M(u) = 0$; γ) $\lim_{u \to \infty} u^{-1} M(u) = \infty$ (по терминологии Бирнбаума и Орлича, это выпуклая N'-функция. *Ред.*).

По N'-функции $M(u)$ строится пространство Орлича $L_M^*(G)$-функций на ограниченном множестве G n-мерного пространства (РЖМат, 1955, 4536).

Две N'-функции называются эквивалентными, если соответствующие им пространства Орлича состоят из одних и тех же функций.

Доказывается следующий критерий эквивалентности, сформулированный ранее авторами без доказательства (Докл. АН СССР, 1951, 81, 497—500). N'-функции $M_1(u)$ и $M_2(u)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие положительные числа α, β и u_0, что $M_1(\alpha u) \leqslant M_2(u) \leqslant M_2(\beta u)$ при $u \geqslant u_0$.

Устанавливаются, кроме того, еще некоторые свойства N'-функций. Дается способ построения N'-функций, эквивалентных дополнительным функциям к функциям $M(u)$, растущим при $u \to \infty$ как $u^r (\ln u)^{\alpha_1} \dots (\ln \ln \dots \ln u)^{\alpha_n}$ $(r > 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произвольные числа). М. А. Мертвецова

583. **О трансфинитных итерациях слабого линейного замыкания выпуклых множеств в линейных пространствах. Часть A. Два понятия линейного замыкания. (Исследование выпуклых множеств в абстрактных линейных пространствах без топологии. IV).** Никодим (On transfinite iterations of the weak linear closure of convex sets in linear spaces. Part A. Two notions of linear closure. (A study of convex sets in abstract linear spaces where no topology is supposed. IV). Nikodým Otton Martin), Rend. Circolo mat. Palermo, 1953, 2, № 1, 85—105 (англ.)

Слабым линейным замыканием подмножества E линейного пространства L называется множество $\operatorname{lin} E$ всех тех $x \in L$, для которых существует $y \in E$ такое, что полуинтервал $[y, x) \subset E$. Рассматриваются трансфинитные итерации $\operatorname{lin}^\alpha$ операции lin. Пусть Ω — первое несчетное трансфинитное число. $\operatorname{lin}^\Omega E = \operatorname{lin}^{\Omega+1} E$ для каждого выпуклого $E \subset L$. Если $\dim L = \aleph_0$, то для каждого выпуклого $E \subset L$ существует $\alpha < \Omega$ такое, что $\operatorname{lin}^\alpha E = \operatorname{lin}^{\alpha+1} E$. Если $\dim L > \aleph_0$, то существует выпуклое $E \subset L$ такое, что $\operatorname{lin}^\alpha E \neq \operatorname{lin}^{\alpha+1} E$ для всех $\alpha < \Omega$; доказательство опирается на предположение, что при $\dim L_1 = \aleph_0$ для каждого $\alpha < \Omega$ существует выпуклое $E(\alpha) \subset L_1$ такое, что $\operatorname{lin}^\alpha E(\alpha) \neq \operatorname{lin}^{\alpha+1} E(\alpha)$ (см. реф. 584).

$E \subset L$ называется линейно замкнутым, если оно пересекается с каждой прямой l по замкнутому на l множеству. Сильным линейным замыканием множества $E \subset L$ называется пересечение $\operatorname{cl} E$ всех линейно замкнутых множеств, содержащих E. Если E выпукло, то и $\operatorname{cl} E$ выпукло, причем (если E не сводится к точке) $\operatorname{cl} E = \operatorname{lin}^\Omega E$. Д. А. Райков

584. **О трансфинитных итерациях слабого линейного замыкания выпуклых множеств в линейных пространствах. Часть b. Теорема существования (Исследование выпуклых множеств в абстрактных линейных пространствах без топологии. IV.)** Никодим (On transfinite iterations of the weak linear closure of convexe sets in linear spaces. Part b. «An existence theorem in weak linear closure». (A study of convex sets in abstract linear spaces where no topology is supposed. IV). Nikodým Otton Martin), Rend. Circolo mat. Palermo, 1954, 3, № 1, 5—75 (англ.)

Доказательство предположения, сформулированного в предыдущем реферате, при более слабом условии, что $\dim L_1 \geqslant \aleph_0$. Д. А. Райков

585. **Предельные пространства и пополнения.** Ковальский (Limesräume und Komplettierung. Kowalsky Hans-Joachim), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 237 (нем.)

Автор предлагает обобщение понятия предельного пространства в смысле Фреше. Для этих пространств возможно указать способ пополнения. В частном случае это дает конструкцию бикомпактного расширения топологических пространств. Ю. А. Шрейдер

586. **Топологии, определяемые ограниченными множествами.** Робертс (Topologies defined by bounded sets. Roberts G. T.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 2, 379—381 (англ.)

Результаты, полученные автором в линейных структурах (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, 48, 533—546), обобщаются на случай произвольных линейных пространств. В линейном пространстве X выделяется класс $\mathscr{B}$ множеств, называемых ограниченными, подчиненный следующим условиям: 1) множество, состоящее из одной точки, ограничено: 2) если $x \in X$, $x \neq 0$, то множество всех λx не входит в $\mathscr{B}$; 3) E_1, $E_2 \in \mathscr{B}$ влечет $E_1 \cup E_2 \in \mathscr{B}$; 4) $E \in \mathscr{B}$, $E_1 \subset E$ влечет $E_1 \in \mathscr{B}$; 5) $E \in \mathscr{B}$ влечет $\lambda E \in \mathscr{B}$ при любом λ; 6) выпуклая оболочка любого ограниченного множества ограничена. С помощью ограниченных множеств в X вводятся различные топологии и устанавливаются некоторые соотношения между ними, а также исследуется непрерывность ограниченных линейных функционалов относительно введенных топологий (Функционал называется ограниченным, если он отображает каждое ограниченное множество в ограниченное множество чисел).

Вводится понятие относительно равномерной сходимости в X: $x_n \to 0$ в этом смысле, если существуют $\lambda_n \uparrow +\infty$ такие, что $\{\lambda_n x_n\} \in \mathscr{B}$.

Доказательств в статье не приводится. Б. З. Вулих

587. **Распределения Шварца и интегралы Коши.** Депри (Distributions de L. Schwartz et intégrales de Cauchy. Deprit André), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 9, 910—913 (франц.)

Для функции $f(z)$, аналитической в области, ограниченной контуром C, устанавливается формула (справа и слева — функционалы Шварца):

$$\frac{\partial^n \delta}{\partial z^n} * f(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C f(\xi) \cdot \text{v. p.} \frac{1}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

Для z, не лежащего на C, формула переходит в классическую формулу Коши

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} = f^{(n)}(z) \text{ или } 0.$$

Г. Е. Шилов

588. **О замене переменных в обобщенных функциях и их преобразованиях Фурье.** Скарфьелло (Sur le changement de variables dans les distributions et leurs transformées de Fourier. Scarfiello R.), Nuovo cimento, 1954, 12, № 4, 471—482 (франц.; резюме итал.)

Пусть D^p — пространство внешних дифференциальных форм степени p с компактным носителем, т. е. пространство форм вида $\varphi^p = \Sigma f_I dx_I$, где коэффициенты f_I — бесконечно дифференцируемые функции с компактным носителем, I — множество, состоящее из p целых чисел отрезка $[1, n]$: $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$; $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$.

Пусть α^{n-p} — внешняя дифференциальная форма степени $n-p$, коэффициенты которой являются функционалами типа функции. Тогда можно ввести скалярное произведение $\langle \alpha^{n-p}, \varphi^p \rangle = \int_{Rn} \alpha^{n-p} \wedge \varphi^p$, где интеграл от внешнего произведения обеих форм распространяется на все пространство.

Аналогично можно ввести скалярное произведение форм $\langle T^{n-p}, \varphi^p \rangle$, где T^{n-p} — обобщенная внешняя дифференциальная форма степени $n-p$

$$T^{n-p} = \sum J_J dx_J,$$

коэффициенты которой являются обобщенными функциями.

Обобщенные функции в R^n можно теперь рассматривать либо как обобщенные внешние формы степени n, либо как обобщенные внешние формы нулевой степени.

Пусть теперь H — изоморфизм R^n в R^n. Положим

$$H'\varphi^0 = H'\varphi(x) = \varphi(H(x)).$$

$$H'\varphi^n = H'(\varphi(x)\,dx) = \varphi(H(x))\,|H|\,dx,$$

где $|H|$ — модуль якобиана преобразования H. Тогда соотношения

$$\langle HT^n, \varphi^0 \rangle = \langle T^n, H'\varphi^0 \rangle = \langle T, \varphi(H(x)) \rangle,$$

$$\langle HT^0, \varphi^n \rangle = \langle T^0, H'\varphi^n \rangle = \langle T, \varphi(H(x))\,|H| \rangle$$

определяют двумя возможными способами образ HT обобщенной функции T при преобразовании H, в зависимости от того, рассматривается ли обобщенная функция T как внешняя дифференциальная форма степени n или степени 0.

Далее определяются преобразования Фурье обобщенных внешних дифференциальных форм и к ним применяются полученные результаты. О. С. Параскок

589. **Новые результаты в теории линейных операторов. I. Гротендик** (Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires (I). Grothendieck Alexandre), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 8, 577—579 (франц.)

Рассматриваются билинейные формы u на прямом произведении $E \times F$ банаховых пространств E, F, причем используется терминология предыдущей статьи (РЖМат, 1955, 1374). Форма u называется полуинтегральной слева, если E есть фактор-пространство некоторого пространства G такого, что u интегральна на $G \times F$, т. е. представляется в виде

$$u = \int_{M \times N} x' \otimes y' d\mu(x', y'), \quad M \subset G', \; N \subset F.$$

Аналогично определяется форма, полуинтегральная справа. Форма u называется прединтегральной (préintégrale), если E и F суть фактор-пространства пространств G и H таких, что u интегральна на $G \times H$. Линейное отображение $E \to F$ называется полуинтегральным слева (соответственно справа; прединтегральным), если соответствующая билинейная форма в $E \times F'$ полуинтегральна слева (соответственно справа; прединтегральна). Основные результаты:

1. Класс всех полуинтегральных слева (соответственно справа) отображений одного гильбертова пространства в другое совпадает с классом всех отображений типа Гильберта—Шмидта.

2. Тождественное отображение гильбертова пространства на самого себя прединтегрально.

3. Всякое отображение $L^1 \to L^2 \to L^\infty$, $L^2 \to L^\infty \to L^1$, $L^\infty \to L^1 \to L^2$ интегрально (последние два ядерны).

4. $l^1 \hat{\otimes} L^1 \subset l^2 \hat{\otimes} L^1$; $l^2 \hat{\otimes} L^\infty \subset c_0 \hat{\otimes} L^\infty$.

5. Отображения $L^2 \to L^1 \to L^2$ и $L^2 \to L^\infty \to L^2$ являются отображениями типа Гильберта—Шмидта.

6. Всякая суммируемая последовательность в E ядерна.

7. $C_0(M) \hat{\otimes} C_0(M)$ есть совокупность линейных комбинаций функций из $C_0(M \times M)$ «положительного типа».

Доказательства отсутствуют. М. А. Наймарк

590. **Новые результаты в теории линейных операторов. II. Гротендик** (Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires (II). Grothendieck Alexandre), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 9, 607—609 (франц.)

В дополнение к результатам предыдущей заметки (реф. 589) излагаются следующие результаты:

1. Если u — эрмитова форма в $C_0(M) \times C_0(M)$, то $u \ll u_\mu$, где u_μ — положительная эрмитова форма $u_\mu = \int f d\mu$, определенная положительной мерой μ с нормой $\leqslant h \| u \|$.

2. Для всякого отображения u: $C_0(M) \to L^2$ существует положительная ограниченная мера μ на M такая, что u непрерывно в псевдонорме, индуцированной на $C_0(M)$ пространством $L^2(\mu)$

3. Всякое слабо непрерывное линейное отображение $L^\infty(\mu)$ в гильбертово пространство L^2 можно представить в виде произведения отображений $L^\infty(\mu) \to L^1(\mu)$, $L^2(\mu) \to L^2$, из которых первое есть операция умножения на $f \in L^2(\mu)$. Всякое линейное непрерывное отображение $L^2 \to L^1(\mu)$ можно представить в виде произведения отображений $L^2 \to L^2(\mu)$, $L^2(\mu) \to L^1(\mu)$, из которых второе есть операция умножения на $f \in L^2(\mu)$.

4. Совокупность «операторов умножения» в $L^2(\mu) \hat{\otimes} \hat{\otimes} L^2(\nu)$ есть совокупность всех интегральных $f \in L^\infty(\mu \otimes \nu)$.

5. Отображения $L^1 \to L^\infty$ и $L^\infty \to L^1$, являющиеся соответственно произведениями $L^1 \to L^\infty \to L^1 \to L^\infty$ и $L^\infty \to L^1 \to L^\infty \to L^1$, интегральны (причем второе ядерно).

6. Локально выпуклое пространство E тогда и только тогда изоморфно (как линейное топологическое пространство) гильбертову пространству, когда оно изоморфно нормированному фактор-пространству некоторого пространства L^∞ и нормированному подпространству некоторого пространства L^1.

7. Пусть G — локально компактная группа. Если $f \in L^\infty(G)$ есть линейная комбинация положительно определенных функций, то линейная форма $\langle \varphi^* \psi, f \rangle$ на $L^1(G) \times L^1(G)$ гильбертова, т. е. функция $f(s^{-1}t)$ на $G \times G$ гильбертова. Обратное верно, если G компактна, абелева или имеет композиционный ряд из таких групп.

При этом билинейная форма u на $E \times F$ называется гильбертовой, если она непрерывна по отношению к

некоторым непрерывным предгильбертовым нормам на E, F. Отсюда вытекает, что всякая билинейная непрерывная на $C_0(G) \times C_0(G)$ форма, инвариантная относительно правых сдвигов, определяет билинейную непрерывную на $L^1(G) \times L^1(G)$ форму, также инвариантную относительно правых сдвигов.

В заключение указывается, что имеется 14 естественных классов тензорных топологических произведений и соответствующих линейных отображений пространств Банаха, число которых однако уменьшается для ряда конкретных пространств.

Доказательства отсутствуют. М. А. Наймарк

591. **О нелинейной регулярной выпуклости с приложением к теории игр. Б е р ж** (Sur une convexité régulière non linéaire et ses applications à la théorie des jeux. B e r g e C l a u d e), Bull. Soc. math. France, 1954, 82, № 3, 301—315 (франц.)

Пусть F — семейство полунепрерывных снизу выпуклых функционалов, определенных в линейном топологическом пространстве E; причем $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$, $f_1, f_2 \in F$ влечет $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \in F$. Множество $X \subset E$ называется F-регулярно выпуклым, если для каждого $x_0 \notin X$ существуют функционал $f \in F$ и число α такие, что $f(x_0) > \alpha$ и $f(x) < \alpha$ при $x \in X$.

Ряд известных теорем о регулярно выпуклых (в классическом смысле) множествах обобщается на случай F-регулярно выпуклых множеств. Например: Если $C \subset E$ — выпуклый компакт, $C' \subset E$ есть F-регулярно выпуклое множество и при этом $C \cap C' = \Lambda$ (Λ — знак пустого множества), то существуют функционал $f \in F$ и число α такие, что $f(x) \geqslant \alpha$ при $x \in C$, $f(x) < \alpha$ при $x \in C'$.

Если $C \subset E$ — выпуклый компакт и для каждого функционала $f \in F$ существует такой элемент $x_f \in C$, что $f(x_f) \leqslant 0$, то в C найдется элемент x_0, для которого $f(x_0) \leqslant 0$ при каждом $f \in F$.

Полученные результаты прилагаются к исследованию одного класса нелинейных конечных игр.

Классическая линейная (конечная) игра состоит в том, что два игрока A и B независимо друг от друга выбирают свои «стратегии»: игрок A — m-мерный вектор $p = (p_1, \ldots, p_m)$, $\sum_{\mu=1}^{m} p_\mu = 1$, $p_\mu \geqslant 0$; игрок B — n-мерный вектор $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $\sum_{\nu=1}^{n} q_\nu = 1$, $q_\nu \geqslant 0$. Функция $\Phi(p, q) = \sum_{\mu,\nu} h_{\mu\nu} p_\mu q_\nu$ ($\| h_{\mu\nu} \|$ — заданная матрица) показывает при этом выигрыш игрока A. Такая игра удовлетворяет условию

$$\sup_p \inf_q \Phi(p, q) = \inf_q \sup_p \Phi(p, q). \qquad (1)$$

В работе доказывается, что нелинейная игра, в которой функция выигрыша $\Phi(p, q) = \sum_{\mu,\nu} p_\mu \varphi_{\mu\nu}(q_\nu)$, где $\varphi_{\mu\nu}(t)$ — заданные на сегменте $[0,1]$ непрерывные выпуклые функции, равные нулю при $t = 0$, также удовлетворяет условию (1). Далее исследуется множество оптимальных стратегий игроков A и B.

Г. Ш. Рубинштейн

592. **О неархимедовски нормированных пространствах. Ф л е й ш е р** (Sur les espaces normés non-archimédiens. F l e i s c h e r I s i d o r e), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, A57, № 2, 165—168; Indagationes math., 1954, 16, № 2, 165—168 (англ.)

Пусть K — неархимедовски дискретно нормированное поле, т. е. каждому $\lambda \in K$ соответствует вещественное число $|\lambda| \geqslant 0$ такое, что $|\lambda| = 0$ лишь если $\lambda = 0$; $|\lambda + \mu| \leqslant \max(|\lambda|, |\mu|)$ (неархимедовость): $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$; совокупность Λ всех норм $|\lambda|$ имеет единственной своей предельной точкой 0 (дискретность). Рассматриваются неархимедовски нормированные пространства E, т. е. векторные пространства над K с нормой $\| x \|$, удовлетворяющей условиям: $\| x \| \in \Lambda$; $\| x \| = 0$ лишь если $x = 0$; $\| x \pm y \| \leqslant \max(\| x \|, \| y \|)$ и $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$. Если E полно, то оно изометрично пространству $C(\aleph)$ функций λ_i со значениями в K, определенных на множестве индексов I, имеющем мощность $\aleph$, равную линейной размерности (мощности базиса Хамеля) E, стремящихся к нулю при $i \to \infty$ (т. е. $|\lambda_i| > 1/n$ лишь на конечном множестве индексов для любого натурального n) и снабженных нормой $\| \lambda_i \| = \max_{i \in I} |\lambda_i|$. Каждое непрерывное линейное отображение подпространства неархимедовски нормированного пространства E в полное неархимедовски нормированное пространство можно продолжить на все E с сохранением нормы. Пространство E^* линейных функционалов на E (т. е. непрерывных линейных отображений E в K) изометрично пространству всех ограниченных функций λ_i на I с указанной выше нормой. Устанавливается условие неархимедовской нормируемости топологического векторного пространства над K.

Д. А. Райков

593. **О собственных элементах линейных операторов в пространствах Банаха. А л ь т м а н М.,** Бюл. Польск. АН, 1954, 2, № 3, 103—105

О собственных элементах линейных операторов в пространствах Банаха. А л ь т м а н (On the characteristic elements of linear transformations in Banach spaces. A l t m a n M.), Bull. Acad. polon. sci., 1954, 2, № 3, 105—107 (англ.)

Рассматривается линейный (т. е. аддитивный и непрерывный) оператор U, преобразующий банахово пространство $\mathfrak{X}$ в себя. Пусть $N(U)$ — подпространство нулей оператора U и $M(U)$ — линейное многообразие элементов вида $x - U(x)$.

Основные результаты:

1. Если $\{U^n(x)/n\}$ слабо сходится к нулю для любого $x \in \mathfrak{X}$ и если существует постоянная C такая, что

$$\Big\| n^{-1} \sum_{k=1}^{n} U^k \Big\| \leqslant C$$

для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, то а) $N(U) \cdot \overline{M(U)} = 0$, б) $p \leqslant q$, где p, q — максимальное число линейно независимых решений уравнения $x - U(x) = 0$, соответственно сопряженного уравнения.

2. Если дополнительно предположить, что последовательность $\{n^{-1} \sum_{k=1}^{n} U^k(x)\}$ для любого x содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу из $\mathfrak{X}$, то а) $\mathfrak{X} = N(U) \otimes \overline{M(U)}$, б) $p = q$.

Доказанные теоремы обобщают некоторые прежние результаты Мазура (Mazur S., Studia Math., 1930, 2, 11—20).

В. И. Соболев

594. **Приведение алгебр конечного типа. Р а й т** (A reduction for algebras of finite type. W r i g h t F r e d B.), Ann. Math., 1954, 60, № 3, 560—570 (англ.)

Рассматриваются нормированные кольца A с инволюцией, удовлетворяющие условиям: 1) всякое множество ортогональных проектирующих элементов (т. е. таких элементов p, что $p^* = p$, $p^2 = p$) имеет верхнюю грань; 2) всякое максимальное коммутативное подкольцо в A порождается своими проектирующими элементами. Такие кольца называются обычно AW^*-алгебрами. AW^*-алгебра A называется алгеброй со следом, если существует отображение $x \to x^t$ кольца A в его центр A^t, обладающее следующими свойствами: 1) $x^t = x$ при $x \in A^t$; 2) $(ux)^t = ux^t$ для $x \in A$, $u \in A^t$; 3) $(x + y)^t = x^t + y^t$ для $x, y \in A$; 4) $(xy)^t = (yx)^t$ для $x, y \in A$; 5) если $x = x^*$, $x \geqslant 0$, то $x^t \geqslant 0$; 6) если

e, f — проектирующие элементы и $e^t=f^t$, то $e\sim f$ (т. е. существует $u\in A$ такой, что $uu^*=e$, $u^*u=f$).

Основные результаты:

1. Существует взаимно однозначное соответствие между пространством $\mathfrak{N}$ максимальных двусторонних идеалов N AW^*-алгебры A и пространством $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов M ее центра A^t. Это соответствие определяется формулой $M=N\cap A^t$ и является гомеоморфизмом пространства $\mathfrak{N}$ со стоуновской топологией в нем и пространства $\mathfrak{M}$ с гельфандовской топологией в нем.

2. Если A есть AW^*-алгебра типа II со следом, а N — ее максимальный двусторонний идеал, то A/N есть AW^*-фактор типа II со следом.

3. Если A — конечная AW^*-алгебра типа I (а значит, C^*-сумма алгебр A_n типа I(n) (Kaplansky I., Ann. Math., 1952, 56, 460—472)), $\mathfrak{N}$ — пространство максимальных двусторонних идеалов A, то A/N есть конечный AW^*-фактор типа I для всех $N\in\mathfrak{N}$, за возможным исключением замкнутого, нигде не плотного множества S в $\mathfrak{N}$. Это исключительное множество S пусто тогда и только тогда, когда число слагаемых $A(n)$ в A конечно. Если S не пусто, то A/N есть AW^*-фактор типа II_1 для всякого $N\in S$.

Этот результат дает новые примеры факторов класса II_1. М. А. Наймарк

595. Кольцевые изоморфизмы банаховых алгебр. Капланский (Ring isomorphisms of Banach algebras. Kaplansky Irving), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 374—381 (англ.)

Кольцевым изоморфизмом автор называет взаимно однозначное отображение $y=\varphi(x)$ кольца A на кольцо B, удовлетворяющее условиям: $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$, $\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$.

Доказывается следующая теорема: Пусть A и B — полупростые полные нормированные кольца (с единицей или без нее), а φ — кольцевой изоморфизм кольца A на кольцо B. Тогда A разлагается в прямую сумму $A=A_1\oplus A_2\oplus A_3$ колец A_1, A_2, A_3 таких, что A_1 конечномерно, а φ линеен на A_2 и сопряженно линеен на A_3 по отношению к умножению на комплексные числа.

В частности, если бесконечномерное кольцо A не имеет конечномерных идеалов, то всякий кольцевой изоморфизм A на B вещественно линеен. Известно, что для конечномерного кольца может существовать бесконечно много кольцевых изоморфизмов, нелинейных по отношению к умножению на скаляры.

М. А. Наймарк

596. О некоторых свойствах непрерывных отображений в бесконечномерных пространствах. Рутман М. А., Сб. матем. отд. физ.-матем. фак. Одесск. ун-та, 1953, 5, 19—26

Обобщение известного принципа Шаудера о существовании неподвижной точки при непрерывном отображении выпуклого тела банахова пространства на свою компактную часть. Именно, доказывается теорема: Пусть M, N_1, N_2, . . . , N_n — выпуклые тела в бесконечномерном банаховом пространстве, причем $N_i\subset M$, $N_i\cap N_j=0$ при $i\neq j$. Тогда при всяком непрерывном отображении $M-U_{i=1}^n N_i$ на его компактную часть имеется неподвижная точка.

Доказательство теоремы опирается на утверждение, что всякое выпуклое тело с n выпуклыми взаимно непересекающимися полостями является взаимно однозначным и непрерывным образом цилиндра с n взаимно непересекающимися сферическими полостями. При этом цилиндром в банаховом пространстве называется множество точек вида $x=tx_0+z$, где z — элемент $(\infty-1)$-сферы S_1, полученной пересечением сферы $S(0,1)$ с гиперплоскостью $f(x)=0$ ($f(x)$ — некоторый линейный функционал), элемент x_0 такой, что $f(x_0)=1$ и $0\leqslant t\leqslant 1$. В. И. Соболев

597. Понятие об эквивалентности норм в векторных пространствах. Кампуш-Феррейра (Sobre a equivalência de normas em espaços vectoriais. Campos Ferreira Jaime), Gaz. mat., 1954, 15, № 58, 5—9 (порт.)

Элементарное изложение первоначальных понятий, относящихся к линейным нормированным пространствам. В частности, рассматривается понятие эквивалентности норм. С. В. Фомин

598. Эквивалентность относительно покрытий и эквивалентность относительно разбиений для функций на абстрактных пространствах и инвариантное интегрирование. Хадвигер (Deckungsäquivalenz und Zerlegungsäquivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration. Hadwiger H.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 115—122 (нем.)

Пусть R — произвольное множество, Γ — абелева группа однозначных отображений R на себя и $F(x)$ — функция на R, принимающая действительные значения. Функции $F(x)$ и $G(x)$ называются конгруэнтными ($F\simeq G$), если существует такое $\alpha\in\Gamma$, что $G(x)=F(\alpha x)$.

Если n — натуральное число, то $n\cdot F$ означает функцию, представимую в виде $\sum_{i=1}^n F_i$ ($F_i\simeq F$). Кроме того, полагается, что $0\cdot F=0$ и $-nF=n(-F)$.

Фиксируем в R некоторое непустое подмножество E, которое назовем единичным множеством, и обозначим $\mathcal{E}(x)$ его характеристическую функцию. Функции F и G называются равносоставленными (zerlegungsgleich), если их можно представить в виде

$$F=\sum_{i=1}^n F_i,\quad G=\sum_{i=1}^n G_i \text{ где } F_i\simeq G_i\ (i=1,2,\ldots,n).$$

Определение 1. Функции F и G называются эквивалентными относительно покрытий (deckungsäquivalent), если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие натуральные n и m, что для соответствующим образом составленных $n\cdot F$, $n\cdot G$ и $m\cdot\mathcal{E}$ выполнено неравенство $|n\cdot F-n\cdot G|<m\mathcal{E}$, причем $m/n<\varepsilon$.

Определение 2. Функции F и G называются эквивалентными относительно разбиений, если для любого $\varepsilon>0$ существуют такие функции F' и G', равносоставленные с F и G соответственно, что $|F'-G'|<\varepsilon\mathcal{E}$.

Основной результат: понятия эквивалентности относительно покрытий и эквивалентности относительно разбиений равносильны между собой.

В заключение устанавливаются некоторые связи между введенными выше понятиями и понятием инвариантного интеграла. С. В. Фомин

599. Пространства измеримых функций. Сибирский К. С., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1954, 11, 49—53

Пусть $f(\varepsilon)$ определена для $\varepsilon\geqslant 0$, непрерывна, не убывает, $f(0)=0$, $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$; $x(t)$ — измерима на $[0,1]$; E_x — множество тех ε, для которых $\operatorname{mes}_I E\{|x(t)|>\varepsilon\}\leqslant f(\varepsilon)$; X — множество тех $x(t)$, для которых E_x непусто; $\rho(x,y)=\inf E_{x-y}$.

Доказывается, что:

1) $\rho(x,y)$ метризует X;

2) при $f(\varepsilon)\equiv 0$ пространство X с метрикой $\rho(x,y)$ совпадает с пространством M с обычной для него метрикой $\operatorname{vrai\,sup}_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$, а при $f(\varepsilon)\equiv\varepsilon$ — совпадает с пространством S сходимости по мере с обычной метрикой;

3) при $f(\varepsilon) \not\equiv 0$ пространство X содержит все измеримые функции, причем все элементы X расположены внутри и на поверхности замкнутой сферы $\overline{S}(\theta, \varepsilon_1)$ с центром в нулевой функции и радиусом ε_1, зависящим только от $f(\varepsilon)$; на поверхности этой сферы находятся те и только те функции, для которых $|x(t)| \geqslant \varepsilon_1$ почти всюду на [0,1], сходимость в X есть сходимость по мере. Ф. В. Широков

600. Символическое исчисление в коммутативных алгебрах. Валбрук (Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives. Waelbroeck L.), J. math. pures et appl., 1954, **33**, № 2, 147—186 (франц.)

Дается подробное изложение результатов, краткие сообщения о которых были опубликованы ранее (РЖМат, 1955, 1381, 1382, 1383). Кроме того, рассматривается также случай, когда аналитическая функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ фактически не зависит от некоторых из своих аргументов. М. А. Наймарк

601. О теореме Бёрлинга — Капланского. Котляр (On a theorem of Beurling and Kaplansky. Cotlar M.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 3, 459—465 (англ.)

Пусть G — локально компактная абелева группа, а $\overline{G}$ — ее группа характеров. Рассматривается кольцо R, состоящее из абсолютно интегрируемых по мере Хаара функций на G, с произведением, понимаемым как свертка

$$f^*\varphi(g) = \int_G f(gh^{-1})\varphi(h)\, dh. \qquad (1)$$

Каждой] такой функции соответствует функция на $\overline{G}$

$$\hat{f}(\chi) = \int \chi(g) f(g)\, dg. \qquad (2)$$

Спектром $S(f)$ функции f автор называет множество характеров, для которых $\hat{f}(\chi)=0$. Спектром совокупности функций называется множество характеров, для которых все $\hat{f}(\chi) = 0$.

В работе дается новое доказательство следующей теоремы Бёрлинга—Капланского, основанное на той же идее, которая применяется для группы G вещественных чисел.

Теорема 1. Если I — замкнутый идеал в R, спектр которого состоит из одной точки, то всякая функция f такая, что $S(f) \supset S(I)$, содержится в идеале I.

Аналогично получается новый результат, являющийся обобщением только что сформулированного.

Теорема 2. Если I — замкнутый идеал в R, граница спектра которого не содержит совершенного множества (т. е. является приводимым множеством), то всякая функция f такая, что $S(f) \supset S(I)$, содержится в идеале I. Ю. А. Шрейдер

602. Спектр матриц Тёплица. Хартман, Винтнер (The spectra of Toeplitz's matrices. Hartman Philip, Wintner Aurel), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 867—882 (англ.)

Пусть $f = (\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots)$ — вектор с комплексными компонентами, длина которого $|f| = (\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f_n|^2)^{1/2} < \infty$ конечна, а $f(\varphi)$, $f^+(\varphi)$ и $f^-(\varphi)$ $(-\pi < \varphi < \pi)$ — функции класса L_2, определенные с помощью рядов Фурье $f(\varphi) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\varphi}$, $f^+(\varphi) \sim \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\varphi}$, $f^-(\varphi) \sim \sim \sum_{n=1}^{\infty} f_{-n} e^{-in\varphi}$. Матрица $F = \| f_{n-m} \|$ $(n, m = 0, 1, 2, \ldots)$ называется матрицей Тёплица. Доказывается, что если $f(\varphi)$ — ограниченная функция, принимающая вещественные значения, а m и M — нижняя и верхняя (существенные) границы функции $f(\varphi)$, то спектр матрицы F совпадает с замкнутым интервалом $[m, M]$. Если $m < M$, то матрица F не имеет точечного спектра. Этот результат связан с разрешимостью уравнения Римана $f(\varphi) x_0^+(\varphi) = 1 + y_0^-(\varphi)$, где $f(\varphi)$ — заданная функция. Если $f(\varphi)$ — вещественная ограниченная измеримая функция, то для разрешимости $(x_0^+(\varphi) \in L_2)$ уравнения Римана необходимо, чтобы функция $f(\varphi)$ $(-\pi < \varphi < \pi)$ сохраняла постоянный знак и функция $1/f(\varphi)$ принадлежала классу L_1. Значительная часть работы посвящена исследованию спектра матрицы Тёплица для неограниченной функции $f(\varphi)$. М. С. Лившиц

603. О спектральной матрице уравнения в частных разностях. Березанский Ю. М., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 4, 573—576

Продолжая предыдущее исследование (РЖМат, 1954, 5659), автор устанавливает для уравнений в частных разностях с вещественными коэффициентами

$$L[u]_{j,k} = a_{j-1,k} u_{j-1,k} + a_{j,k} u_{j+1,k} + b_{j,k-1} u_{j,k-1} + b_{j,k} u_{j,k+1} + c_{j,k} u_{j,k} = \lambda u_{j,k}, \quad a_{j,k} > 0, \qquad (1)$$

рассматриваемого в полуплоскости $j \geqslant 0$ с граничным условием $u_{-1,k} = 0$, ряд новых предложений, сближающих теорию этого уравнения с обычной степенной и матрично-степенной проблемой моментов (Крейн М. Г., Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 2, 125—128).

Бесконечная последовательность называется финитной, если только конечное число ее членов отлично от нуля. Через $\mathfrak{H}_0$ обозначается гильбертово пространство последовательностей $x = (\ldots x_{-1}, x_0, x_1 \ldots)$, для которых $\sum_{-\infty}^{\infty} |x_\alpha|^2 < \infty$, через $H_0 \subset \mathfrak{H}_0$ — линейное множество финитных последовательностей. В гильбертовом пространстве последовательностей $u_{j,k}$ со сходящимся рядом квадратов модулей членов ((j, k) — целочисленная точка правой полуплоскости) на совокупности всех финитных последовательностей при помощи формулы $(Au)_{jk} = L[u]_{jk}$ определяется эрмитов оператор A. Пусть $\mathfrak{U} = (U_0, U_1, U_2, \ldots)$ — финитная последовательность бесконечномерных матриц вида $\| u_{\alpha\beta} \|_{-\infty}^{\infty}$, где $u_{\alpha\beta} = 0$ при $|\alpha - \beta| > \gamma$, γ — некоторое число, свое для каждой матрицы; совокупность таких последовательностей обозначается через M. Положим

$$\mathfrak{U}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j'(z) U_j,$$

$$\{\mathfrak{U}, \mathfrak{V}\} = \sum_{j=0}^{\infty} U_j^* V_j (U_j^* = \overline{U}_j'),$$

где $P_j(z) = \| P_{\alpha\beta} \|_{-\infty}^{\infty}$ — бесконечномерная матрица с элементами $p_{\alpha\beta} = P_{j\alpha}(\beta; z)$ ($P_{j\alpha}(\beta; z)$ — решения уравнения (1), определенные в цитированном выше реферате), а P_j' — матрица, транспонированная к матрице P_j.

Основные результаты:

1. Размерность ортогонального дополнения в $\mathfrak{H}_0$ к линейной совокупности векторов x, для которых

$$\lim_{N \to \infty} \inf_{\mathfrak{U} \in M,\ \mathfrak{U}(z) = E} (\{\mathfrak{U}, \mathfrak{U}\} x^N, x^N) = 0,$$

$$x^N = (\ldots 0, 0, x_{-N}, \ldots, x_N, 0, 0 \ldots),$$

одна и та же для всех точек z регулярного типа оператора A и совпадает с его дефектным числом. При любом комплексном z существует матричный предел $\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} (\sum_{j=0}^{n} P^*(z) P_j(z))$ и $(\Gamma(z) x, x) \leqslant$

$\leqslant \inf_{\mathfrak{U}\in M,\ \mathfrak{U}(\bar{z})=E} (\{\mathfrak{U}, \mathfrak{U}\}x, x)$ $(x \in H_0)$, где $P_j^* = \overline{P_j'}$ $(E = \|\delta_{\alpha\beta}\|_{-\infty}^{\infty}$ — единичная матрица).

Если при некотором z элементы каждой из матриц $P_j(z)$ равномерно ограничены, то при любом $x \in H_0$

$$\inf_{\mathfrak{U}\in M,\ \mathfrak{U}(\bar{z})=E} (\{\mathfrak{U}, \mathfrak{U}\}x, x) = (\Gamma(z)x, x).$$

2. Для того чтобы задача была определенной, достаточно, чтобы при каждом $j = 0, 1, 2, \ldots$ $\inf_k a_{jk} > 0$, $\sup_k |b_{jk}| < \infty$, $\sup_k |a_{j-1,k} + a_{jk} + c_{jk}| < \infty$ и $\sum_{j=0}^{\infty} [\sup a_{ik}]^{-1} = \infty$.

Соответствующие этим двум предложениям теоремы 1 и 2 в реферируемой заметке сформулированы неправильно. Приведенные здесь правильные формулировки этих теорем сообщены референту автором. Часть а) теоремы 2 заметки, по сообщению автора, осталась недоказанной.

Задача построения спектральной функции уравнения (1) называется абсолютно неопределенной, если для каждой конечной области G комплексной плоскости существует такая постоянная γ_G, что

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(z) P_j(z) \right\| \leqslant \gamma_G \quad (z \in G).$$

В некотором смысле абсолютно неопределенный случай следует рассматривать как тот случай, когда у оператора дефектное число «максимально» бесконечно (отметим, что индекс дефекта оператора A состоит из двух равных дефектных чисел, которые, вообще говоря, бесконечны). Для этого случая автор устанавливает описание всех спектральных матриц уравнения (1), аналогичное описанию Р. Неванлинна всех спектральных функций неопределенной проблемы моментов, а также описанию всех спектральных матриц вполне неопределенной матрично-степенной проблемы моментов.

В заключение приводится один достаточный критерий абсолютной неопределенности задачи.

М. Г. Крейн

604. Дифференциальные операторы в гильбертовом пространстве. Липман (Differentialoperatoren im Hilbertraum. Lippmann Horst), Math. Nachr., 1954, 12, № 1—2, 9—28 (нем.)

Оператор дифференцирования d/dx является минимальным линейным замкнутым оператором, удовлетворяющим условиям

$$\frac{d}{dx} e^{inx} = ine^{inx}, \quad \frac{d}{dx} x = e^{i0x} \quad (n = 0, \pm 1, \ldots).$$

Это обстоятельство позволяет построить оператор «дифференцирования» Q в абстрактном гильбертовом пространстве H. С этой целью в H произвольно выбирается ортогональный базис $\{e_n\}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ с условием нормировки $\|e_n\|^2 = 2\pi$ и сначала строится оператор P, как минимальный замкнутый линейный оператор, удовлетворяющий условиям $Pe_n = ine_n$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$. Далее равенством $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \frac{1}{n} e_n$ определяется элемент $x \in H$ и равенством $Q(\alpha x + g) = \alpha e_0 + Pg$ на многообразии $\mathfrak{D}_Q$ элементов f вида $f = \alpha x + g$ $(g \in \mathfrak{D}_P)$ — оператор Q.

Устанавливается, что оператор iP самосопряженный, а для принадлежности элемента $f = \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n e_n$ к $\mathfrak{D}_Q$ необходимо и достаточно выполнение условий: $f \in \mathfrak{D}_P$ и $\alpha_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' (-1)^n \overline{\alpha_n}$.

Далее изучаются вопросы перестановочности P с T и A с Q, где T — замкнутый линейный, а A — замкнутый симметрический операторы; при этом оператор B называется перестановочным с оператором C, если $BC \subset CB$.

Пусть H_2 — ортогональное дополнение одномерного подпространства $H_1 = \{te_0\}$ $(-\infty < t < \infty)$, а P_2 и Q_2 — операторы P и Q на $\mathfrak{D}_P \cap H_2$ и $\mathfrak{D}_Q \cap H_2$ (H_2 инвариантно относительно P, но не инвариантно относительно Q). Операторы P_2 и Q_2 обратимы.

Для перестановочности P с T достаточно выполнения следующих трех условий: 1) если T_2 обозначает T на $\mathfrak{D}_T \cap H_2$, то равенство $T_2 f = 0$ возможно лишь на линейной оболочке F конечного числа элементов последовательности $\{e_n\}$ $(n = \pm 1, 2, \ldots)$ и при этом $T_2 f \neq 0$, если $f \in H_2 \ominus F$, $f \neq 0$, 2) если $S = iP_2^{-1}$, а R есть T_2 на $\mathfrak{D}_{T_2} \cap (H_2 \ominus F)$, то $R^{-1}S \subset SR^{-1}$, 3) $e_0 \in \mathfrak{D}_T$, $Te_0 = \lambda e_0$ и $T_2 f \subset H_2$ для любого $f \in \mathfrak{D}_{T_2}$.

Первые два из указанных условий необходимы для перестановочности P с T.

Для перестановочности A с Q необходимо и достаточно выполнение следующих трех условий: 1) A приводится подпространством H_2, так что $A = A_1 \oplus A_2$, где A_1 — часть A в H_1, а A_2 — часть A в H_2, 2) $e_0, x \in \mathfrak{D}_A$ и $A_1 e_0 = \lambda e_0$, $Ax = A_2 x = \lambda x$, где λ — вещественный скаляр, 3) A_2 есть вещественная функция от оператора S.

В статье отмечается, что из соотношения $AQ \subset QA$, где A — ограниченный линейный оператор, следует, что $A = \lambda I$; остается неясным, существуют ли отличные от λI замкнутые симметрические (не обязательно ограниченные) операторы A, удовлетворяющие этому соотношению.

И. М. Глазман

605. К теории полиномиально зависящих от параметра операторов в гильбертовых пространствах. Харазов Д. Ф., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1954, 20, 297—315

Теория линейных уравнений вида $(E - \lambda A) f = g$ с вполне непрерывным оператором A в гильбертовом пространстве H обобщается на уравнение $(E - \lambda A - \lambda^2 B) f = g$, где A и B — самосопряженные операторы в H с конечными абсолютными нормами и $B > 0$.

Устанавливается, что значения параметра λ, при которых однородное уравнение $(E - \lambda A - \lambda^2 B)\varphi = 0$ имеет решение $\varphi \neq 0$ (λ — характеристическое число, φ — собственный вектор) вещественны. Каждое характеристическое число имеет конечную кратность и множество всех характеристических чисел не имеет конечных предельных точек. Если $\{\lambda_n\}$ есть полная последовательность характеристических чисел (т. е. каждое характеристическое число входит в эту последовательность столько раз, какова его кратность), то соответствующую последовательность собственных векторов $\{\varphi_n\}$ можно считать нормированной условием

$$(\varphi_i, \varphi_k) + \lambda_i \lambda_k (B\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{ik}. \qquad (1)$$

Пусть (e_n) — некоторый ортонормированный базис H, P_m — оператор проектирования на линейную оболочку первых m векторов базиса и $A_m = P_m A P_m$, $B_m = P_m B P_m$. Из ограниченности абсолютных норм операторов A и B следуют предельные соотношения $\lim_{m\to\infty} \|A - A_m\| = \lim_{m\to\infty} \|B - B_m\| = 0$, что дает возможность при получении дальнейших результатов пользоваться предельным переходом.

Применение модифицированного вариационного метода последовательного определения характеристических чисел и собственных векторов к уравнению $(E-\lambda A_m-\lambda^2 B_m)\varphi=0$ с конечномерными операторами в сочетании с предельным переходом при $m\to\infty$ позволяет установить существование характеристических чисел (за исключением случая $A=B=0$) и построить полную последовательность характеристических чисел $\{\lambda_n\}$ в порядке возрастания абсолютных величин. Если $\{\varphi_n\}$ есть соответствующая последовательность собственных векторов, нормированная условием (1), то для любого $f\in H$ в смысле слабой сходимости $Af=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\ \varphi_n)\,\lambda_n^{-1}\varphi_n$ и $Bf=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\ B\varphi_n)\,\varphi_n$. Если число λ не является характеристическим, то при любой правой части $g\in H$ неоднородное уравнение имеет единственное решение f, и в смысле слабой сходимости

$$f=g+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(g,\ \varphi_n)}{\lambda_n-\lambda}\varphi_n.$$

В заключение автор отмечает, что изложенные результаты без труда обобщаются на уравнение вида $(E-A_0-\lambda A-\lambda^3 B)f=g$, если $(A_0 f,\ f)<(f,\ f)$ при любом $f\in H$ и без доказательства приводит обобщение своих результатов относительно интегральных уравнений, ядра которых являются полиномами от λ (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1947, 14, 25—31), на уравнения вида $\varphi-\sum_{k=0}^{r}\lambda^k A_k\varphi=0$, где A_k — самосопряженные вполне непрерывные операторы в H.

И. М. Глазман

606. О применении метода расщепления к многомерным сингулярным краевым задачам. Глазман И. М., Матем. сб., 1954, 35, № 2, 231—245

$\Omega[\sigma,\zeta]$ — область трехмерного пространства, лежащая между замкнутыми поверхностями σ и ζ; σ лежит внутри ζ; ζ может быть целиком удалена в бесконечность; $q(P)$ непрерывна в $\Omega[\sigma,\zeta]$. Изучается непрерывная часть спектра самосопряженных расширений $\tilde{L}$ оператора L, порожденного дифференциальной операцией $l(u)=-\Delta u+q(P)u$ на функциях $u(P)$, дважды непрерывно дифференцируемых в $\Omega[\sigma,\zeta]$ и равных нулю в окрестности границы. Под непрерывной частью спектра понимается совокупность неизолированных точек роста спектральной функции и собственных чисел бесконечной кратности.

В основе работы лежит лемма, которая утверждает, что, если λ принадлежит непрерывной части спектра $\tilde{L}$, то для любой ограниченной области ω, лежащей вместе с замыканием в Ω, найдется ограниченная некомпактная в $L_2(\Omega)$ последовательность функций $\psi_n(P)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty}\|\tilde{L}\psi_n-\lambda\psi_n\|=0$$

и $\psi_n(P)\equiv 0$ при $P\in\omega$ $(n=1,2,\ldots)$.

Каждому расширению $\tilde{L}$ соответствуют краевые условия. Краевые условия называются разделенными, если из принадлежности $u(P)$ к области определения $\mathfrak{D}(\tilde{L})$ оператора $\tilde{L}$ следует принадлежность к $\mathfrak{D}(\tilde{L})$ функции, совпадающей с $u(P)$ в окрестности σ и равной нулю в окрестности ζ. Можно говорить о совпадении на σ или на ζ двух разделенных краевых условий. Пусть τ — поверхность, содержащаяся внутри ζ и охватывающая σ. Разделенные краевые условия являются регулярными на σ, если пуста непрерывная часть спектра оператора, порожденного в области $\Omega[\sigma,\tau]$ операцией $l(u)$ и краевыми условиями, совпадающими с данными на σ и с условием $u(P)=0$ на τ.

Если $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ — два самосопряженных оператора, порожденных операцией $l(u)$ в областях $\Omega[\sigma_1,\infty]$ и $\Omega[\sigma_2,\infty]$ при разделенных краевых условиях, совпадающих в бесконечности, и если краевые условия для $\tilde{L}_1$ на σ_1 регулярны, то непрерывная часть его спектра содержится в непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}_2$. Если же и для $\tilde{L}_2$ краевые условия регулярны на σ_2, то непрерывные части спектров совпадают.

Если во всем пространстве рассмотреть две операции $l_1(u)$ и $l_2(u)$ при различных $q_1(P)$ и $q_2(P)$ таких, что $q_2(P)-q_1(P)$ стремится на бесконечности к нулю, то непрерывные части спектров самосопряженного оператора $\tilde{L}_1$, порожденного операцией $l_1(u)$, и оператора $\tilde{L}_2$, порожденного операцией $l_2(u)$ на области определения $\mathfrak{D}(\tilde{L}_1)$, совпадают.

Выясняется структура непрерывной части спектра оператора, порожденного $l(u)$ во всем пространстве, в случае, когда

$$\lim_{P\to\infty}q(P)=q_0\ \ (>-\infty).$$

Вводится понятие полуограниченности краевых условий на σ. Доказывается теорема, позволяющая устанавливать неограниченность снизу оператора $\tilde{L}_2$, при условии неограниченности оператора $\tilde{L}_1$.

С. Г. Крейн

607. О L^2-решениях волнового уравнения. Мартин (On L^2-solutions of the wave equation. Martin A. I.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 19, 212—227 (англ.)

Изучается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\{\lambda-q(x,\ y)\}\,u=0 \qquad (1)$$

во всей x, y-плоскости. Функция $q(x,\ y)$ непрерывна и действительна. Предполагается, что уравнение (1) для невещественных λ имеет единственную функцию Грина, т. е. соответствующий оператор имеет нулевые дефектные числа (самосопряжен). В этом случае доказывается пять теорем о L^2-решениях уравнения (1). Эти теоремы можно было бы получить, опираясь на абстрактную теорию линейных операторов в пространстве Гильберта. Автор строит изложение независимо от этой теории, в результате чего некоторые теоремы несомненно усложнились. Так, теорема 1 прямо следует из известной теоремы теории линейных операторов; теорема 4 в абстрактных терминах читается так: если A — самосопряженный оператор и B — ограниченный оператор, то $A+B$ — самосопряженный оператор.

Б. М. Левитан

608. Спектральное представление обыкновенных самосопряженных дифференциальных операторов. Коддингтон (The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators. Coddington E. A.), Ann. Math., 1954, 60, № 1, 192—211 (англ.)

Известные результаты теории дифференциальных операторов, излагаемые обычно для самосопряженных дифференциальных операторов четного порядка с вещественными коэффициентами, обобщаются на дифференциальные операторы, порожденные самосопряженным дифференциальным выражением

$$l(y)=p_0 d^n y/dx^n+p_1 d^{n-1}y/dx^{n-1}+\ldots+p_n y$$

произвольного (не обязательно четного порядка) n, причем функции $p_0, p_1, \ldots, p_n$ могут принимать комплексные значения.

Предполагается, что p_k есть $n-k$ раз непрерывно дифференцируемая функция в интервале $a<x<b$ и $|p_0(x)| \neq 0$ в этом интервале. Как обычно, по $l(y)$ строится максимальный оператор T следующим образом. Его область определения $\mathfrak{D}$ есть совокупность всех функций y, непрерывно дифференцируемых $n-1$ раз в интервале (a, b) и таких, что $y^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна в каждом замкнутом конечном подинтервале интервала (a, b) и $l(y) \in L^2(a, b)$; для $y \in \mathfrak{D}$, $Ty = l(y)$.

Доказывается, что T замкнут и что оператор $T_0 = T^*$ есть замкнутый симметрический оператор.

Пусть индекс дефекта оператора T_0 есть (ω, ω). Обобщая известные результаты, автор доказывает, что в этом случае область определения всякого самосопряженного расширения оператора T_0 есть совокупность всех функций u из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих «краевым условиям»

$$\langle u, \alpha_j \rangle = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \omega, \tag{1}$$

где $\langle u, v \rangle$ — билинейная форма в формуле Грина, α_j — фиксированные функции из $\mathfrak{D}$ такие, что $\langle \alpha_j, \alpha_k \rangle = 0$, $j, k = 1, 2, \ldots, \omega$.

Автор отмечает, что если краевые условия имеют вид $Mu(a) + Nu(b) = 0$, где $u = (y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, M, N — матрицы, то эти условия будут самосопряженными тогда и только тогда, когда $MB^{-1}(a)M^* = NB^{-1}(b)N^*$, где $B(x)$ — матрица формы в тождестве Лагранжа.

Далее автор ограничивается рассмотрением только следующих двух случаев:

I. T_0 — самосопряженный оператор ($\omega = 0$).

II. a — конечное число; p_k непрерывны и $|p_0| \neq 0$ в интервале (a, b); n четно и индекс дефекта оператора T_0 есть (n, n). (При $n = 2$ это означает, что имеет место случай предельного круга в a и предельной точки в b.)

Доказывается, что в первом случае T_0 есть замыкание предельного оператора при $\tilde{a} \to a$, $\tilde{b} \to b$ для самосопряженных операторов H_δ в конечном интервале $\delta = [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset a, b)$, определенных тем же выражением $l(y)$ и какими-нибудь самосопряженными краевыми условиями. При этом для соответствующих спектральных функций: $E_\delta(\lambda) f \to E(\lambda) f$ при $\delta \to (a, b)$, если λ не есть собственное значение оператора T_0.

Во втором случае аналогичное утверждение доказывается для любого самосопряженного расширения H оператора T_0 (вместо T_0) и для операторов H_δ, где $\delta = [\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a, b)$, причем краевые условия для H_δ в точке a берутся те же, что и для оператора H.

В заключение, пользуясь результатом Б. М. Левитана (Докл. АН СССР, 1950, 73, 651—654), автор выводит известные выражения для спектральных функций оператора T_0 в первом случае и его любого самосопряженного расширения H во втором — через спектральную матрицу этих операторов, а также равенство Парсеваля и взаимно обратные формулы для этих случаев.

М. А. Наймарк

609. Об операторном интегральном уравнении в абстрактном пространстве Гильберта. Ги (Sur une équation intégrale opératonielle dans un espace abstrait de Hilbert. Guy Roland), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 351—352 (франц.)

Для функционального интегрального уравнения

$$x(t) = x^0(t) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau \tag{1}$$

в абстрактном гильбертовом пространстве $(\mathfrak{y})$ утверждается (при выполнении некоторых условий) существование и единственность решения, получаемого методом последовательных приближений (см. также РЖМат, 1955, 341) с сильной сходимостью приближений к решению в одних случаях и со слабой — в других.

Так, например, если семейство $F(t, \tau)$ операторов является линейным и ограниченным для всех t и τ в $I \times I$ (где I — отрезок вещественной оси) и

$$F(t, \tau_n)\, F(\tau_n, \tau_{n-1}) \ldots F(\tau_2, \tau_1)\, x^0(\tau_1) \in L^1_{(\mathfrak{y})},$$

то уравнение (1) имеет единственное решение, получаемое методом последовательных приближений с сильной сходимостью последовательности приближений к решению. Доказательства не приводятся.

А. Т. Талдыкин

610. О задаче чебышевского приближения в пространстве Гильберта. Зуховицкий (Про задачу чебишовського наближення в просторі Гільберта. Зуховицький С. І.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 1, 7—11 (укр.; резюме русс.)

Пусть $(F_k)_1^n$ — заданные в гильбертовом пространстве H линейные непрерывные операторы, которые зависят равномерно непрерывным образом от параметра $q \in Q$, где Q — некоторый компакт. $\Phi(q)$ — непрерывная вектор-функция со значениями в H.

Задача о наилучшем (чебышевском) приближении вектор-функции в H состоит в отыскании векторов $A_k \in H$ так, чтобы отклонение

$$\max_{q \in Q} \Big\| \sum_{k=}^{n} F_k(q)\, A_k - \Phi(q) \Big\|$$

было наименьшим.

Результаты относятся к случаю $n = 1$ и сформулированы в виде четырех теорем (без доказательства, но с указанием на использование тех или иных известных положений функционального анализа).

Теорема 1 устанавливает некоторые достаточные условия на $F(q)$, обеспечивающие существование вектора A_0 при любой вектор-функции Φ, непрерывной на Q ($n = 1$).

Теорема 2 является точным аналогом теоремы А. Н. Колмогорова для чебышевского приближения в комплексной области (Успехи матем. наук, 1948, 3, № 1). Здесь автор дает необходимый и достаточный признак того, чтобы данная вектор функция $F(q)A$ наименее отклонялась от вектор-функции $\Phi(q)$ на Q.

Теорему 3 можно назвать некоторым обобщением теоремы единственности Хаара (Haar, Math. Ann., 1918, 78); здесь признаки достаточности и признаки необходимости для единственности вектор-функции $F(q)A$ полностью не совпадают.

Теорема 4 дает необходимые условия, которым должен подчиняться оператор $F(q)$, чтобы вектор-функция $F(q)A$ наименее отклонялась от $\Phi(q)$. Эта теорема вытекает из теоремы 2.

Как указывает автор, общий случай $n > 1$ может быть приведен к случаю $n = 1$.

Е. В. Боровковская

611. Критерий компактности в однородном пространстве. Шилов Г. Е., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 1, 12—13

Рассматривается линейное комплексное нормированное пространство R комплекснозначных функций, за-

данных на коммутативной бикомпактной группе G. Предполагается, что если $f(t) \in R$, то $f(t+h) \in R$ при любом $h \in G$, и что

а) $\| f(t+h) \| = \| f \|$ для $f(t) \in R$ и любого $h \in G$,
б) $\lim_{h \to 0} \| f(t+h) - f(t) \| = 0$ для любой $f(t) \in R$.

Доказывается теорема: Для компактности множества $M \in R$ необходимо и достаточно выполнение условий: 1) M ограничено в пространстве R; 2) M равностепенно непрерывно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность U нуля группы G, что из $h \in U$ следует $\| f(t+h) - f(t) \| < \varepsilon$ для любой $f(t) \in M$.

Б. М. Левитан

612. Свойство почти периодичности группы унитарных операторов в гильбертовых пространствах. Маак (Periodizitätseigenschaften unitärer Gruppen in Hilberträumen. Maak Wilhelm), Math. scand., 1954, 2, № 2, 334—344 (нем.)

Подробное изложение результатов, краткое сообщение о которых было опубликовано ранее (РЖМат, 1955, 5953).

613. О полугруппах, порожденных дифференциальными уравнениями Колмогорова. Като (On the semigroups generated by Kolmogoroff's differential equations. Kato Tosio), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 1, 1—15 (англ.)

Рассматриваются произвольная бесконечная матрица (a_{jk}), элементы которой удовлетворяют условиям $a_{jj} < 0$, $a_{ij} \geqslant 0$ $(i \neq j)$, $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 0$, и решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dp_{ik}}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(t)\, a_{jk}, \qquad \frac{dp_{ik}}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} p_{jk}(t), \qquad (0 \leqslant t < \infty)$$

обладающие следующими свойствами:

$$p_{jk}(t) \geqslant 0, \quad p_{ik}(s+t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(s)\, p_{jk}(t),$$

$$\lim_{t \to 0} p_{jk}(t) = p_{jk}(0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Из них выделяется решение, обладающее тем свойством, что полугруппа операторов $P(t) = (p_{jk}(t))$ в пространстве (l) оказывается минимальной (в смысле естественного частичного упорядочения операторов в (l) среди положительных полугрупп, производящие операторы которых G удовлетворяют соотношениям $A_0 \subset G \subset A$ (где A — оператор с матрицей (a_{jk}), а A_0 определяется равенством $A_0 x = Ax$ на линейной оболочке базиса $\{x_1, x_2, \ldots\}$ $[x_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots)]$). Такое минимальное решение единственно и удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(t) \leqslant 1$.

Если для $\lambda > 0$

$$b_{jk}^{(1)}(\lambda) = b_{jk}(\lambda) = (1 - \delta_{jk})\, a_{jk}/(\lambda + a_{jj}),$$

$$b_{jk}^{(n+1)}(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ji}^{(n)}(\lambda)\, b_{ik}(\lambda)$$

(все эти ряды сходятся), то существуют

$$b_j(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{jk}^{(n)}(\lambda),$$

и «минимальное» решение обладает тем свойством, что

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(t) = 1 - \lim_{\lambda \to 0} b_j(\lambda),$$

$$\int_0^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(t) \Big) dt = \lim_{\lambda \to 0} \lambda^{-1} [1 - b_j(\lambda)].$$

Для того чтобы при всех j выполнялось равенство $\sum_{k=1}^{\infty} p_{jk}(t) = 1$, необходимо и достаточно любое из следующих условий: 1) $b_j(\lambda) = 0$ при всех j и всех (или хотя бы одном) $\lambda > 0$; 2) система уравнений $\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \zeta_k = \lambda \zeta_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ при любом (или хотя бы при одном) $\lambda > 0$ имеет только нулевое решение.

Результаты эти получены в терминах теории полугрупп операторов в пространстве (l) и могут быть частично распространены на любое абстрактное (L)-пространство (в смысле Биркгофа). Д. А. Васильков

614. Представления полупростых групп Ли. V. Харш-Чандра (Representations of semisimple Lie groups. V. Harish-Chandra), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, 40, № 11, 1076—1077 (англ.)

Части I, II, III, IV см. в Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1951, 37, 170—173, 362—365, 366—369, 691—694.

Пусть G — связная полупростая группа Ли, g_0 — ее алгебра Ли над полем R вещественных чисел, $x \to Ad(x)$ — присоединенное представление G, A — ее картанова подгруппа, т. е. максимальная связная коммутативная подгруппа в G такая, что g_0 вполне приводима по отношению ко всем операторам $x \to Ad(x)$, $x \in A$. Две картановы подгруппы A_1, A_2 называются сопряженными в G, если $A_2 = xA_1x^{-1}$ при некотором $x \in G$. Результаты И. М. Гельфанда и М. И. Граева (РЖМат, 1953, 1253), а также Баргмана (Bargmann V., Ann. Math., 1947, 48, 568—640) и автора (Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 1952, 38, 337—342) показывают, что существует связь между классами сопряженных картановых подгрупп и различными сериями неприводимых унитарных представлений группы G.

Для каждого класса сопряженных картановых подгрупп автор строит серию унитарных представлений группы G, причем эти представления строятся по неприводимому унитарному представлению некоторой подгруппы M группы G и унитарному характеру некоторой подгруппы A_+ группы G (определение подгрупп M и A_+ ввиду его сложности мы опускаем); неприводимость этих представлений автором не доказана, но он считает ее весьма вероятной.

Если Z — центр группы G, а $x \to T_x$ — произвольное неприводимое унитарное представление группы G в пространстве $\mathfrak{H}$, то при $f \in \mathfrak{H}$ выражение $|(T_x f, f)|$ зависит только от $x^* \in G^* = G/Z$.

Представление $x \to T_x$ автор называет квадратично интегрируемым, если $\int_{G^*} |(T_x f, f)|^2\, dx^* < \infty$ (где dx^* — инвариантная мера в G^*) для всех $f \in \mathfrak{H}$. Имеет место следующее предложение, являющееся аналогом леммы Шура:

Пусть $x \to T_x$, $x \to T'_x$ — два квадратично интегрируемых неприводимых унитарных представления группы G в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$, определяющие один и тот же характер группы Z. Тогда $\int_{G^*} \overline{(T_x \varphi, \psi)} (T'_x \varphi', \psi')\, dx^* = 0$, $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}$; $\varphi', \psi' \in \mathfrak{H}'$, если представления $x \to T_x$,

$x \to T'_x$ неэквивалентны и $\int_{G^*} \overline{(T_x\varphi, \psi)}\,(T'_x\varphi', \psi')\,dx' = c\,(\varphi', U\varphi)\cdot(U\psi, \psi')$, если представления $x \to T_x$, $x \to T'_x$ эквивалентны и U — унитарное отображение $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, переводящее $x \to T_x$ в $x \to T'_x$. При этом c — положительное число, не зависящее от φ, ψ, φ', ψ'.

Доказательства отсутствуют. М. А. Наймарк

615. **Представления полупростых групп Ли. VI. Хариш-Чандра** (Representations of semisimple Lie groups. VI. Harish-Chandra), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S.A., 1954, 40, № 11, 1078—1080 (англ.)

В дополнение к результатам предыдущей заметки (реф. 614) дается способ построения неприводимых унитарных представлений группы M, а также способ построения квадратично интегрируемых представлений, обобщающий конструкцию Баргмана (Bargmann, Ann. Math., 1947, 48, 620) и И. М. Гельфанда и М. И. Граева (РЖМат, 1953, 1253). Доказательства отсутствуют.

М. А. Наймарк

616. **Квадратные корни из операторов. II. Халмош, Лумер** (Square roots of operators. II. Halmos Paul R., Lumer Günter), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 4, 589—595 (англ.)

В части I реферируемой статьи (РЖМат, 1953, 810) установлено существование в гильбертовом пространстве H обратимых операторов, не допускающих извлечения квадратного корня. В части II, как усиление этого результата, устанавливается существование открытого множества таких операторов (заключительная теорема 6).

Анализ части I (смысл обозначений указан в РЖМат, 1953, 810) позволяет заключить, что любой обратимый, определенный на всем H ограниченный оператор A не допускает извлечения квадратного корня, если остаточная компонента $\gamma(A)$ его спектра содержит компактную часть D такую, что: 1) множество $\overline{V\,D}$ связно и 2) ортогональное дополнение многообразия $(A-\lambda E)H$ при $\lambda \in D$ одномерно. Так как множество обратимых операторов открыто, то для доказательства теоремы 6 достаточно показать, что выполнение условий 1) и 2) для обратимого ограниченного оператора A влечет выполнение этих же условий для любого оператора B, удовлетворяющего неравенству $\|A-B\| < \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$.

Вся часть II, предшествующая заключительной теореме 6, посвящена вспомогательным теоремам непрерывности.

Кроме того, имеется еще модифицированное доказательство теоремы об инвариантности дефектного числа в поле регулярности оператора. И. М. Глазман

617. **О коммутаторах операторов. II. Халмош** (Commutators of operators. II. Halmos Paul R.), Amer. J. Math., 1954, 76, № 1, 191—198 (англ.)

В работе изучаются свойства операторов вида $A' = AB - BA$, где A и B — ограниченные операторы в комплексном гильбертовом пространстве. Часть из доказанных результатов справедлива также для случая, когда A и B суть элементы произвольного нормированного кольца.

Теорема 1. Если оператор A' коммутирует с A, то A' является обобщенным делителем нуля (т. е. существует последовательность операторов D_n: $\|D_n\| = 1$ такая, что $\lim_{n\to\infty} \|A'D_n\| = 0$). Отсюда, например, следует, что единичный оператор не может быть коммутатором.

В условиях теоремы 1 замыкание спектра A' содержит ноль.

Нижеследующие результаты характеризуют «густоту» распределения коммутаторов среди остальных операторов.

Теорема 3. В случае бесконечномерного гильбертова пространства множество коммутаторов является всюду плотным в сильной топологии.

Неизвестно, является ли множество коммутаторов плотным в смысле сходимости по норме. В конечномерном пространстве коммутаторы A' всегда отстоят достаточно далеко от единичного оператора E: $\|E - A'\| \geqslant 1$.

В бесконечномерном случае существует такой коммутатор A', что

$$\|E - A'\| \leqslant 0{,}97.$$

Однако, если $A' = AB - BA$, где A — нормальный оператор, то

$$\|E - A'\| \geqslant 1.$$

Важную роль играет лемма 1:

В бесконечномерном случае каждому оператору A соответствуют такие две операторные матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & P \\ 0 & R \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & S \end{pmatrix}, \text{ что } \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = XY - YX.$$

Из нее следуют теоремы:

Теорема 8. Всякий оператор A в бесконечномерном гильбертовом пространстве может быть представлен как произведение $A = PQ$, так что QP есть коммутатор;

Теорема 9. Для всякого компактного множества E на комплексной плоскости, содержащего ноль, существует коммутатор со спектром, совпадающим с E.

Ю. А. Шрейдер

618. **Об одном классе задач о собственных значениях, нелинейно зависящих от параметра. Мюллер** (Über eine Klasse von Eigenwertaufgaben mit nichtlinearer Parameterabhängigkeit. Müller H.), Math. Nachr., 1954, 12, № 3/4, 173—181 (нем.)

Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ заданы вполне непрерывные и самосопряженные операторы A_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$), причем наибольшее собственное значение оператора A_0 меньше единицы. Рассматривается оператор

$$T_\lambda = \lambda^n (I - A_0) - \lambda^{n-1} A_1 - \lambda^{n-2} A_2 - \ldots - A_n.$$

Всякое комплексное значение λ_0, для которого

$$T_\lambda x = 0 \tag{1}$$

имеет нетривиальное решение $x = x_0$, называется собственным значением этого уравнения. Уравнение (1) рассматривалось в работах М. В. Келдыша (Докл. АН СССР, 1951, 77, № 1, 11—14) и Д. Ф. Харазова (РЖМат, 1954, 2232). Пусть K — множество значений α, для которых уравнение

$$(x, T_\alpha x) = 0 \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение $x \in \mathfrak{H}$, а P — подмножество вещественных значений α, для которых уравнение (2) имеет нетривиальные решения. Устанавливаются следующие предложения: 1. Каждая изолированная точка $\lambda \in P$ является собственным значением уравнения (1). 2. Пусть P не пусто и $\underline{\lambda} = \inf P$, $\tilde{\lambda} = \sup P$. Тогда, если $\underline{\lambda} \neq 0$, то $\underline{\lambda}$ является собственным значением уравнения (1). То же самое справедливо и для $\tilde{\lambda}$.

Из этих предложений вытекают две теоремы, установленные Д. Ф. Харазовым в упомянутой работе.

М. М. Вайнберг

619. **О трансцендентных точках в собственных пространствах дискретных линейных полуупорядоченных пространств. Накано** (On transcendental points in proper spaces of discrete semi-ordered linear spaces. Nakano Hidegorô), J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1953, ser. 1, **12**, № 3, 105—110 (англ.)

Устанавливается теорема об общей форме положительного линейного функционала в K-пространствах. Кардинальное число $\mathfrak{M}$ называется сингулярным, если: 1) $\mathfrak{M} > \aleph_0$, 2) $m > n$ влечет $m > 2^n$, 3) для любого множества кардинальных чисел $n_\gamma < m$ $(\gamma \in \Gamma)$, мощность которого меньше m, имеем $\sum_{\gamma\in\Gamma} n_\gamma < m$. Кардинальное число m называется регулярным, если не существует сингулярного кардинального числа $n \leqslant m$.

Теорема. Если X — дискретное расширенное (по терминологии автора, универсально полное) K-пространство и мощность X регулярна, то для каждого положительного линейного функционала F на X существует конечное число попарно дизъюнктных ортов $e_i \in X$ и чисел $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ таких, что при любом $x \in X$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i,$$

где x_i — составляющая элемента x по орту e_i (т. е. $\mathrm{Pr}_{e_i} x = x_i e_i$). По поводу терминологии и обозначений см. Канторович Л. В., Вулих Б. З. и Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., Гостехиздат, 1950. Б. З. Вулих

620. **Абсолютно монотонные функции. Мак-Миллан** (Absolutely monotone functions. McMillan Brockway), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 467—501 (англ.)

Рассматриваются функции $F(x)$, заданные на произвольном множестве X, в котором для каждого $x \in X$ указано некоторое множество конечных наборов элементов $x_i \in X$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, называемых дроблениями x (запись: $x = x_1 + \ldots + x_n$). Множество всех дроблений Π подчинено некоторым простым условиям, в частности множество дроблений каждого фиксированного элемента x оказывается направленным относительно операции «размельчения». Значения функций $F(x)$ принадлежат частично упорядоченному линейному множеству, в котором постулируется существование граней для монотонных направленных подмножеств, но относительно которого не требуется, чтобы оно было структурой. Для таких функций по индукции определяются разности любого порядка:

1) $\Delta^0 F(x_0) = F(x_0)$;

2) если набор $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\} \in \Pi$, то

$$\Delta^{n+1} F(x_0 \mid x_1, \ldots, x_{n+1}) = \Delta^n F(x_0 + x_{n+1} \mid x_1, \ldots, x_n) - \Delta^n F(x_0 \mid x_1, \ldots, x_n)$$

(при этом из свойств Π вытекает, что $\{x_0 + x_{n+1}, x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \in \Pi$). Все аргументы разностей рассматриваются как независимые. Функция $F(x)$, для которой все разности $\Delta^n F(x_0 \mid x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, называется абсолютно монотонной.

Для абсолютно монотонных функций с помощью разностей вводятся операторы, обобщающие операторы дифференцирования, после чего доказывается обобщение следующей теоремы С. Н. Бернштейна: Если вещественная функция $F(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant r)$ абсолютно монотонна, то для $0 \leqslant x < r$ она представима рядом Тейлора

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

(Бернштейн С. Н., Собр. соч., Изд-во АН СССР, М., 1952, т. 1, стр. 313).

Однако в обобщенной формуле, рассматриваемой в работе, вместо знака равенства устанавливается $\geqslant$. Функции, для которых эта формула имеет место со знаком равенства, называются аналитическими абсолютно монотонными. Даются некоторые условия, при которых абсолютно монотонная функция оказывается аналитической. В частности, доказывается, что всякая полиномиальная (т. е. такая функция, для которой все разности, начиная с некоторого порядка, тождественно равны нулю) абсолютно монотонная функция — аналитическая. Как следствие из общих теорем получается теорема С. Н. Бернштейна для функций действительного переменного с абстрактными значениями. Если значения рассматриваемых функций принадлежат K-пространству, а в множестве всех аналитических абсолютно монотонных функций введено частичное упорядочение по правилу: $F \gg G$, если $F - G$ абсолютно монотонна, — то это множество является условно полной структурой, точнее, — положительным конусом некоторого K-пространства.

На примере вещественных функций множества показывается, что существуют неаналитические абсолютно монотонные функции. Б. З. Вулих

621. **Максимум-проблема в гармоническом анализе. Хьюитт, Хершман** (A maximum problem in harmonic analysis. Hewitt Edwin, Hirschman Isidore, Jr.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 4, 839—852 (англ.)

Статья примыкает к предыдущим работам первого из авторов, посвященным обобщению результатов классического гармонического анализа на коммутативные локально-компактные группы.

Пусть G — такая группа, G^* — ее группа характеров; через $f^*(\chi)$ $(\chi \in G^*)$ обозначается преобразование Фурье (по характерам) функции $f(x)$ $(x \in G)$. Рассмотрим пространство $L_p(G)$ $(L_{p'}(G^*))$ функций на группе G (G^*), суммируемых со степенью p (p') относительно меры Хаара; $\|f\|_p$ $(\|f^*\|_{p'})$ — норма в этом пространстве. Известно (Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применения, Изд-во ин. лит., М., 1950, стр. 132), что если $1 < p < 2$ и $f \in L_p(G)$, то $f^* \in L_{p'}(G^*)$, где $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, причем

$$\|f^*\|_{p'} \leqslant \|f\|_p. \qquad (1)$$

Авторы исследуют вопрос, для каких функций f неравенство (1) переходит в равенство. Вводится следующее определение: пусть A — компактная открытая подгруппа G, φ_A — ее характеристическая функция, χ — некоторый характер группы G, α — комплексное число. Функция вида $\psi(x) = \alpha\chi(x)\varphi_A(x)$ $(x \in G)$ называется подхарактером группы G.

Доказывается теорема: Пусть $1 < p < 2$, равенство в (1) имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)$ совпадает с некоторым подхарактером группы G или с его сдвигом (т. е. функцией вида $\psi(xy_0)$, $y_0 \in G$). Если G связна и компактна, то единственной открытой подгруппой является сама G и каждый подхарактер имеет вид $\psi(x) = \alpha\chi(x)$. В частности, если G — группа вращений окружности, то $\psi(x) = \alpha e^{inx}$ $(0 \leqslant x < 2\pi, n = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$; в этом случае теорема

авторов переходит в одну теорему Харди и Литльвуда. Рассмотрены и другие интересные примеры групп G.
Ю. М. Березанский

622. **Свойство крайних точек компактных выпуклых множеств.** Джерисон (A property of extreme points of compact convex sets. Jerison Meyer), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 782—783 (англ.)

Доказывается теорема: пусть $\{K_n\}$ — последовательность выпуклых компактных подмножеств выпуклого компактного множества линейного локально выпуклого топологического пространства E и пусть A_n — совокупность крайних точек K_n.

Обозначим $K = \limsup K_n$ и $A = \limsup A_n$. Тогда K содержится в замкнутой выпуклой оболочке $A^{\blacktriangle}$ множества A. Если K выпукло, то $K = A^{\blacktriangle}$, A содержит все крайние точки K.

Под $\limsup B_n$ для последовательности множеств B_n понимается совокупность всех трех точек x, для которых любая окрестность содержит точки множеств B_n при бесконечном множестве индексов n.

Как показывает автор, теорема легко следует из основных результатов о крайних точках, полученных М. Г. Крейном и Д. П. Мильманом.
С. Г. Крейн

623. **О некоторых конечно-аддитивных мерах.** Мак-Кин (Notes on some finitely additive measures. McKean Henry P., Jr), J. London Math. Soc., 1954, 29, № 4, 440—449 (англ.)

Рассматриваются интервал $S\,(0 \leqslant u < 1)$ с лебеговой мерой m, совокупность $\mathscr{M}$ его m-измеримых подмножеств и сохраняющие меру преобразования α, β интервала S, не оставляющие инвариантным ни одно множество из $\mathscr{M}$ с мерой, отличной от 0 и 1.

Если χ_E — характеристическая функция множества $E \subset S$, то функция множества m_β определяется равенством

$$m_\beta(E) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_E(\beta^k u)$$

для тех E (совокупность их обозначается $\mathscr{M}_\beta$), для которых правая часть конечна и постоянна почти всюду на S.

Доказывается, что: 1) $\mathscr{M}_\beta$ содержит $\mathscr{M}$ в качестве истинного подмножества и замкнуто относительно взятия дополнений и соединений непересекающихся множеств (но не является кольцом); 2) совокупность $\mathscr{N}_\beta$ множеств $E \subset S$, для которых $m_\beta(E) = 0$, содержит совокупность $\mathscr{N}$ множеств m-меры 0 в качестве истинного подмножества; 3) m_β является истинным продолжением меры m, конечно-аддитивна (но не счетно-аддитивна) на $\mathscr{M}_\beta$ и вполне неатомична.

Преобразования α и β такие, что $\alpha\beta u = \beta\alpha u$ для всех $u \in S$, названы слабо зависимыми, если почти всем $u \in S$ соответствуют целые числа $s_1 = s_1(u)$ и $s_2 = s_2(u)$, при которых $\alpha^{s_1} u = \beta^{s_2} u$; α сильно зависит от β, если $s_1 \equiv 1$. Доказывается, что $\mathscr{N}_\alpha = \mathscr{N}_\beta$ тогда и только тогда, когда α и β слабо зависимы, и $\mathscr{M}_\alpha \subset \mathscr{M}_\beta$ тогда и только тогда, когда α сильно зависит от β; $\mathscr{M}_\alpha = \mathscr{M}_\beta$ только в том случае, когда почти всюду $\alpha u = \beta u$.
Д. А. Васильков

624. **Значения функций как граничные интегралы.** Аренс, Сингер (Function values as boundary integrals. Arens Richard, Singer I. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, №5, 735—745 (англ.)

Известно, что всякая функция $f(z)$, аналитическая в области G и непрерывная в $\overline{G}$, достигает максимума модуля на границе области и в любой внутренней точке представляется через граничные значения интегралом Коши. Автор строит обобщение этих фактов для совокупности R комплексных функций $f(s)$ на топологическом T_2-пространстве S. Граница $B \subset S$ определяется как минимальное замкнутое множество, на котором всякая функция $h(s) = |f(s)|$ достигает максимума (впервые дано референтом (Успехи матем. наук, 1946, № 2 (12), 140) для случая функций $x(M)$ на пространстве максимальных идеалов нормированного кольца). Совокупность всех функций $h(s) = |f(s)|$, $f \in R$, обозначается через H.

Достаточные условия существования границы: 1) функции $h(s)$ образуют полугруппу по умножению; 2) множества $\{h(s) \geqslant \varepsilon\}$ компактны, 3) базис окрестностей любой точки $s_0 \in S$ может быть задан неравенствами $\{h_1(s) < \varepsilon, \ldots, h_n(s) < \varepsilon\}$. Если, далее, выполнено: 4) H содержит постоянную k, $0 < k < 1$, то имеет место основная интегральная формула: для каждой точки $s \in S$ можно определить меру $m_s(\sigma)$ на B так, что если $g \in H$ и $1/g \in H$, то

$$\ln g(s) = \int_B \ln g(\sigma)\, dm_s(\sigma). \qquad (1)$$

Эта мера $m_s(\sigma)$ вообще определяется не единственным образом. В случае единственности, для каждого $g \in H$ имеет место аналог неравенства Сеге (Szegö G., Math. Ann., 1921, 84, 232—244)

$$\ln g(s) \leqslant \int_B \ln g(\sigma)\, dm_s(\sigma). \qquad (2)$$

В случае неединственности для каждой функции $g \in H$ можно выбрать такую меру $m_s(x)$, для которой неравенство (2) сохраняется.

Если R — нормированная алгебра функций, то всякий элемент $x(s) \in R$ имеет вид $\ln g(s)$, где $g(s)$ имеет обратный ($g(s) = e^{x(s)}$), поэтому представление (1) для каждого $x(s) \in R$ приводит к формуле

$$x(s) = \int_B x(\sigma)\, dm_s(\sigma).$$

Примечание референта. Повидимому, авторы незнакомы с работой Д. П. Мильмана «Об интегральных представлениях функций многих переменных», Докл. АН СССР, 1952, 87, № 1, 9—11), в которой аналогичные вопросы рассматриваются несколько в иной постановке и где, в частности, указывается критерий единственности меры $m_s(\sigma)$.
Г. Е. Шилов

625. **Топологическая характеристика вполне аддитивной и чисто аддитивной составляющих аддитивной функции множества.** Бауер (Caractérisation topologique de la partie complètement additive et de la partie purement additive d'une fonction additive d'ensemble. Bauer Heinz), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 18, 1771—1773 (франц.)

На булевой алгебре $\mathfrak{B}$ подмножеств A хаусдорфова пространства задана неотрицательная аддитивная функция f. Множества A подвергаются компактификации; функции f соответствует вполне аддитивная функция f^*, заданная на системе $\mathfrak{B}^*$ полученных таким образом компактных множеств A^*. Случаи, когда f вполне аддитивна или чисто аддитивна, описываются свойствами множества «несобственных» элементов множеств A^* по отношению к внутренней мере f_i^* и внешней мере f_e^*, порожденным функцией f^*. (Функция f называется чисто аддитивной, если она аддитивна, а всякая вполне аддитивная функция f_1, удовлетворяющая условию $0 \leqslant f_1(A) \leqslant f(A)$ для всех $A \in \mathfrak{B}$, тождественно равна нулю).
Д. А. Васильков

626. **Эргодическое разложение стационарного линейного функционала.** Умегаки (Ergodic decomposition of stationary linear functional. Umegaki Hisaharu), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 5, 358—362 (англ.)

Непосредственное продолжение более ранней работы автора (Japan J. Math., 1952, 22, 27—50).

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая нормированная комплексная алгебра с инволюцией, с аппроксимативной единицей $\{e_\alpha\}$ и пусть G — группа «движений», т. е. изометрических $*$-автоморфизмов алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть, далее, τ означает «G-стационарный полуслед» алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. линейный функционал на самосопряженной подалгебре $\mathfrak{A}^2$ (порождаемой элементами $\{xy;\ x, y \in \mathfrak{A}\}$), удовлетворяющий следующим условиям: $\tau(x^*x) \geqslant 0$, $\tau(xy) = \overline{\tau(yx)} = \overline{\tau(x^*y^*)}$, $\tau((xy)^*xy) \leqslant \|x\|^2 \tau(y^*y)$, $\tau((e_\alpha x)^* \times e_\alpha x) \underset{\alpha}{\to} \tau(x^*x)$ и $\tau(x^s y^s) = \tau(xy)$ для всех $s \in G$ и всех $x, y \in \mathfrak{A}$.

G-стационарный полуслед τ называется G-эргодическим, если τ нельзя представить как линейную комбинацию, с положительными коэффициентами, других G-стационарных полуследов алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет указанным выше условиям и, кроме того, в $\mathfrak{A}$ существует такое счетное подмножество $\mathfrak{A}_c$, что для любого $x \in \mathfrak{A}$ найдется элемент $y_x \in \mathfrak{A}_c$ (зависящий от x), для которого $x = xy_x$. Пусть $\tau(x)$ — произвольный G-стационарный полуслед на $\mathfrak{A}$. Имеет место следующая теорема:

Существует такая система G-эргодических полуследов π_λ на $\mathfrak{A}$, что

$$\tau(x) = \int \pi_\lambda(x)\, d\sigma(\lambda), \text{ для всех } x \in \mathfrak{A},$$

где λ пробегает действительную числовую прямую, а $\sigma(\lambda)$ — некоторая весовая функция.

Доказательство опирается на известную связь между положительными функционалами и представлениями и на работу Неймана (Neumann J. von, Ann. Math., 1949, 50, 401—485) о разложении колец операторов на факторы.

С. В. Фомин

627. **Анализ структуры трансформационной функции в квантовой механике.** Тани (Analysis of the structure of transformation function in quantum mechanics. Tani Smio), Progr. Theoret. Phys., 1954, 11, № 2, 190—206 (англ.)

Развивается операторное исчисление, позволяющее правильно истолковывать выражения, содержащие некоммутирующие аргументы. Получено уравнение для трансформационных функций (экспоненциального типа).

Рассматривается трансформационная функция, связывающая вектор состояния $\Phi(t)$ в представлении взаимодействия в произвольный момент времени с его начальным значением $\Phi(t_0)$. В общепринятых обозначениях

$$i\frac{d\Phi(t)}{dt} = H'(t)\cdot\Phi(t),$$

где $H'(t) = \exp(iH_0t)\cdot H\cdot\exp(-iH_0t)$. Если $H'(t)$ коммутирует при разных t, то

$$\Phi(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} H'(t)\,dt\right)\cdot\Phi(t_0);$$

в противном случае явное выражение трансформационной функции написать затруднительно.

Излагаемый метод заключается в том, что $H'(t)$ разбивается на части

$$H'(t) = \sum\nolimits_n h_n(t)\cdot M_n,$$

где M_n — операторы, h_n — c-числа. Затем берутся всевозможные коммутаторы M_n друг с другом; базис этой системы $\{\overline{M}_m\}$ является показателем сложности проблемы. Вектор состояния принимает вид

$$\Phi(t) = \exp\left\{\sum g_m(t,t_0)\cdot\overline{M}_m\right\}\cdot\exp(iW(t-t_0))\cdot\Phi(t_0),$$

где W — оператор сдвига уровней, который можно считать диагональным, и g_m — коэффициенты, подлежащие вычислению.

Для оператора $G = -i\sum g_m\overline{M}_m$ получается уравнение

$$\frac{dG}{dt} = \frac{iC_G}{\exp(iC_G)-1}\cdot W - \frac{iC_G\cdot\exp(iC_G)}{\exp(iC_G)-1}\cdot H',$$

где $C_G^n\cdot A = [\cdots[[\underbrace{AG]G]\cdots G}_{n}]$.

Решив последнее уравнение и разложив G по ортам базиса $\overline{M}_m$, можно найти коэффициенты $g_m(t, t_0)$.

Для иллюстрации метода рассмотрены следующие случаи:

а) H' диагонален.

б) H' — постоянный оператор, умноженный на функцию t.

в) H' таков, что $\int^t H'\cdot dt\cdot H'(t) = 0$.

г) H' таков, что $[\int^t H'dt,\ H'(t)]$ есть c-число.

В качестве физических примеров рассмотрены гармонический осциллятор с квадратичным возмущением и трехмерный ротатор, возмущенный моментом, перпендикулярным оси вращения.

В работе также приводятся случаи, когда экспоненциальное представление трансформационной функции неудобно и более выгодным является применение иных представлений.

Д. А. Киржниц

628. **Симметрическая алгебра и вторичное квантование системы бозонов.** Депри (Algèbre symétrique et seconde quantification d'un système de bosons. Deprit André), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1954, 68, ser. 1, № 1—2, 23—33 (франц.)

Рассматриваются тензорные степени $\overset{p}{\otimes}E$ линейного векторного пространства E, так что $\overset{p}{\otimes}E$ есть совокупность всех конечных сумм

$$z = \sum z^{\alpha_1\ldots\alpha_p} e_{\alpha_1}\otimes e_{\alpha_2}\otimes\ldots\otimes e_{\alpha_p},$$

где $\{e_\alpha\}$ — базис в E. Симметрической p-й степенью $\overset{p}{\vee}E$ пространства E называется фактор-пространство пространства $\overset{p}{\otimes}E$ по его подпространству, натянутому на все разности $z - \sigma z$, $z \in \overset{p}{\otimes}E$, $\sigma \in S_p$, где σz обозначает элемент, полученный из z применением ко всем индексам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ подстановки σ, а S_p — симметрическая группа порядка p. При этом имеется естественный изоморфизм между пространством $\overset{p}{\vee}E$ и пространством контравариантных симметрических тензоров порядка p. Из отображения $(Z, Z^1) \to Z\otimes Z^1$ пространства $(\overset{p}{\otimes}E)\times(\overset{q}{\otimes}E)$ в $\overset{p+q}{\otimes}E$ получается при переходе к соответствующим фактор-пространствам по $S_p(E)$, $S_q(E)$ и $S_{p+q}(E)$ отображение пространства $(\overset{p}{\vee}E)\times(\overset{q}{\vee}E)$ на $\overset{p+q}{\vee}E$; образ $u\times v$, $u \in \overset{p}{\vee}E$, $v \in \overset{p}{\vee}E$

при этом отображении обозначается через $u \vee v$ и называется симметрическим произведением элементов u и v. Идентификация этих элементов с их образами при естественном изоморфизме в пространстве контравариантных симметрических тензоров приводит к определению симметричного произведения контравариантных симметрических тензоров.

Далее рассматривается прямая сумма $\vee E$ всех $\overset{p}{\vee} E$, $p \geqslant 0$, и операторы в $\vee E$:

$$e_{r_1} \vee e_{r_2} \vee \ldots \vee e_{r_p} \to \sqrt{n_r' + 1}\, e_r \vee e_{r_1} \vee e_{r_2} \vee \ldots \vee e_{r_p}$$

и

$$e_{r_1} \vee e_{r_2} \vee \ldots \vee e_{r_p} \to$$

$$\to \begin{cases} 0 \text{ при } r \neq \text{ ни одному } r_k, \ k = 1, \ldots, p; \\ \sqrt{n_r'}\, e_{r_1} \vee \ldots \vee e_{r_{k-1}} \vee e_{r_{k+1}} \vee \ldots \vee e_{r_p} \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

обозначаемые через e_r и e_r^* соответственно и удовлетворяющие перестановочным соотношениям $[e_r, e_s] = [e_r^*, e_s^*] = 0$, $[e_r^*, e_s] = \delta_{rs}$; всякий линейный оператор в $\vee E$ выражается в виде линейной комбинации произведений операторов e_r и e_s^*.

Пространство $\vee E$ физически интерпретируется как пространство возможных состояний системы частиц, подчиняющихся статистике Бозе—Эйнштейна, а e_r и e_r^* — как операторы рождения и аннигиляции частицы в состоянии e_r.

В заключение дается физическая интерпретация операторов в $\vee E$, приводимых каждым подпространством $\overset{p}{\vee} E$. Это описание вторичного квантования близко к описанию, данному ранее Рашевским П. К. (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу, 1949, 7, 362—380); Фридрихсом (РЖМат, 1954, 2248) и Куком (РЖМат, 1954, 2249). М. А. Наймарк

629 К. Теория представлений бесконечных групп и почти периодические функции. Мак (Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen. Maak Wilhelm. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. I1, 16. Band I. Algebra und Zahlentheorie. 1. Teil. B. Algebra. Heft 7, Teil 1. Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1953, 26 pp., 3.00 DM) (нем.)

Беглый обзор с наметками доказательств основных фактов, касающихся почти периодических функций на группе и их связи с конечномерными ограниченными представлениями группы. Общая теория с включением некоторых недавних исследований автора описана в первых двадцати параграфах (часть А). В параграфе 18 рассматривается эквивалентность между этой теорией и теорией Хаара-Петера-Вейля непрерывных функций на компактной группе, при этом основной является точка зрения теории почти периодических функций. Часть В (параграфы 21—23) посвящена различным обобщениям теории: почти периодические функции Вейля, ω почти периодические функции, почти периодические функции со значениями в векторном топологическом пространстве и почти периодические функции на полугруппах. В последней части С (параграфы 24—30) рассматриваются различные специализации и применения теории: почти периодические функции Бора, сферические гармоники, компактные группы, теоремы двойственности Понтрягина и Таннака и т. д.

G. W. Mackey

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 397

См. также: 9, 10, 12, 228, 305, 331 К, 341, 360, 420 Д, 439, 441, 442, 443, 446 К, 751

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

630. Глобальная форма центральной предельной теоремы. Агнью (Global versions of the central limit theorem. Agnew Ralph Palmer), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, **40**, № 9, 800—804 (англ.)

Рассматривается последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин $\{\xi_k\}$, имеющих конечную дисперсию. Доказывается, что, помимо хорошо известного результата, что при $n \to \infty$

$$F_n(x) = P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k - M\xi_k) < x\right\} \to$$

$$\to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz,$$

при любом $p > 1/2$ имеют место также соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - \Phi(x)|^p\, dx = 0. \qquad (1)$$

Доказывается также в некотором смысле обратный результат: Пусть $\Phi_0(x)$ — непрерывная функция распределения и последовательность функций распределения $\Phi_n(x)$ такова, что при $n \to \infty$ и некотором $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_n(x) - \Phi_0(x)|^p\, dx = 0;$$

тогда равномерно относительно $x\ (-\infty < x < \infty)$ $\Phi_n(x) \to \Phi_0(x)$.

Примечание референта. Результат (1) имеет место также при условии, что рассматриваемые случайные величины принадлежат области притяжения нормального распределения или же удовлетворяют условию Линдеберга. Использование некоторых результатов, изложенных в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова «Предельные распределения для сумм независимых случайных величин» (М. — Л., Гостехиздат, 1949), позволяет аналогичную теорему высказать для областей притяжения к устойчивым законам. Б. В. Гнеденко

631. О колебаниях сумм случайных величин. Андерсен (On the fluctuations of sums of random variables. Andersen Erik Sparre), Math. scand., 1953, 1, № 2, 263—285 (англ.)

Пусть $S_0 = 0$, $S_i = X_1 + \cdots + X_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, где $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин. Вводятся следующие обозначения: L_n — номер, при котором впервые S_i принимает максимальное значение $\max(S_0 = 0, S_1, \ldots, S_n)$, M_n — номер, при котором S_i $(i \leqslant n)$ в последний раз принимает минимальное значение $\min(S_0, S_1, \ldots, S_n)$, N_n — число положительных сумм среди $S_1, \ldots, S_n$, K_n — любая из величин L_n, M_n, N_n.

Чжун и Феллер (Chung K. L., Feller W., Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1949, **35**, 605—608) и Липшуц (Lipschutz Miriam, Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 659—670) обнаружили, что условное распределение N_n при условии $S_n = 0$ приближается к равномерному при $n \to \infty$, если величины X_i независимы, одинаково распределены, целочисленны и удовлетворяют некоторым условиям регулярности. Автор получает ряд результатов для конечного n, а также доказывает асимптотическую равномерность K_n при условии $S_{n+1} = 0$ для более широкого класса величин. А. А. Юшкевич

632. Об усиленном законе больших чисел. К у д о (On the strong Law of large numbers. K u d ô A k i o), Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1953, сер. A., **7**, № 2, 69—80 (англ.)

Устанавливается несколько предложений, дающих достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел (у. з. б. ч.) к последовательности случайных величин

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, \qquad (1)$$

связанных линейной регрессией

$$M(x_m \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = A^{(1)}_{n,m} x_1 + \cdots + A^{(n)}_{n,m} x_n \ (m > n). \qquad (2)$$

Т е о р е м а. Если последовательность случайных величин (1), $Mx_k = 0$, $Mx_k^2 = \sigma_k^2$, связанных условием (2), удовлетворяет соотношению

$$Ms_n^2 + 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} \sum_{l=k+1}^{N} A^{(r)}_{k,l} \ \sigma_r \sqrt{Ms_k^2} = O(n^{2-\varepsilon}), \qquad (3)$$

где $s_k = x_1 + \cdots + x_k$, ε — какое-нибудь положительное число, то к ней применим у. з. б. ч.

Доказательство теоремы проводится известным методом А. Н. Колмогорова. Следует отметить, что условие (3) допускает очевидное усиление: достаточно потребовать, чтобы агрегат, стоящий слева в (3), имел порядок $O(n^2/\varphi_n)$, где φ_n — какая-нибудь монотонная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию $\Sigma_{n=1}^{\infty}(1/n\varphi_n) < +\infty$. Доказательство получается, если использовать прием, употребленный референтом для аналогичной цели (I ЖМат, 1954, 2637). Таким же образом может быть усилена другая теорема, дающая достаточные условия для того, чтобы с вероятностью 1 имело место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} x_k = 0,$$

где x_k взаимно независимы, $a_k^{(n)}$ — последовательность действительных чисел, подчиненных некоторым условиям. В заключение автор использует отмеченные результаты для элементарного доказательства известной теоремы о применимости у. з. б. ч. к стационарной последовательности случайных величин с конечной дисперсией, связанных в цепь Маркова (не обязательно простую). А. А. Бобров

633. Броуновское движение с $n = 2p + 1$ параметрами. Л е в и (Le mouvement brownien à $n = 2p + 1$ paramètres, L é v y P a u l), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 19, 1181—1183 (франц.)

Автор (C. r. Acad. sci., 1945, **220**, 420) определил броуновское движение с n параметрами как случайную функцию $X(A)$, где A — точка n-мерного евклидова пространства, такую, что: 1) совместное распределение любого конечного числа величин $X(A_1) - X(O)\ldots$ $\ldots, X(A_n) - X(O)$, где точка O — начало координат, является нормальным, 2) разность $X(A') - X(A'')$ имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией, равной расстоянию между A' и A''.

Вводится случайная функция $M(t)$, определяемая как

$$M(t) = \frac{1}{\mu(s_t)} \int_{s_t} [X(A) - X(O)] \, d\mu,$$

где s_t — сфера радиуса t с началом в O, $d\mu$ — элемент площади сферы, а $\mu(s_t)$ — площадь всей сферы. Функция $M(t)$ является, очевидно, гауссовой случайной функцией с нулевым средним. Изучается корреляционная функция $l(t, t')$ величины $M(t)$. Оказывается, что при $n = 2p + 1$ функция $M(t)$ является p раз дифференцируемой и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению p-го порядка. Вектор $(M(t), M'(t), \ldots, M^{(p)}(t))$ образует марковский процесс. Изучение проводится в основном на примере случаев $p=1$ и $p = 2$. Изучаются также предельные закономерности при $p \to \infty$ (случай $p \to \infty$ означает, что A — точка гильбертова пространства). Доказательства лишь намечены. Р. Л. Добрушин

634. Броуновское движение с $n = 2p + 1$ параметрами. II. Л е в и (Le mouvement brownien à $n = 2p + 1$ paramètres. II. L é v y P a u l), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 23, 1584—1585 (франц.)

Часть I см. реф. 633. В частности, указывается, что корреляционная функция $l(t, t')$ имеет $n - 1$ непрерывных производных, а ее n-я производная имеет разрыв при $t = t'$. Указывается явная форма стохастического дифференциального уравнения для любого p. Делаются некоторые замечания, показывающие, что для четного n положение становится более сложным. Р. Л. Добрушин

635. Исправление одной теоремы о броуновском движении с p параметрами. Л е в и (Rectification à un théorème sur le mouvement brownien à p paramètres. L é v y P a u l), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 22, 2140—2141 (франц.)

Автор указывает, что формула (38) на стр. 290, указанная им в книге «Processus stochastiques et mouvement brownien» (Paris, 1948), ошибочна и что при $p \to \infty$ должно $\sigma_p^2 \to 1 - 1/\sqrt{2}$. В связи с этим замечанием требуются исправления к пп. 2° и 3° параграфа 64 этой же книги. Отмечается также, что в п. 1° указанного параграфа можно получить более сильные результаты относительно функции $X(A)$. В заключение автор высказывает недоумение в связи с тем, что никто не продолжил его исследования по броуновскому движению с p параметрами, и ставит две задачи. Б. В. Гнеденко

636. О приближении характеристической функции с помощью ее ряда Фурье. Д ю г е (Sur l'approximation d'une fonction caractéristique par sa série de Fourier. D u g u é D a n i e l), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 2, 151—152 (франц.)

Доказывается теорема: Ряд Фурье характеристической функции сходится равномерно к этой функции, за исключением концов интервала, где сумма ряда равна полусумме значений функции в этих концах. Если соответствующая функция распределения имеет конечный момент первого порядка, то после вычисления $2n+1$ первых членов ряда остаток имеет порядок $1/n$. А. Я. Хинчин

637. Некоторые применения теории вероятностей в анализе. О ф ф о р д (Some applications of the theory of probability in analysis. O f f o r d A l b e r t C y r i l), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 151 (англ.)

638. Семи-марковские системы с не более чем счетным множеством возможных состояний. Леви (Systèmes semi-markoviens à au plus une infinité dénombrable d'états possibles. Lévy Paul Pierre), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 294—295 (франц.)

639 Д. Некоторые экстремальные задачи теории сложения независимых случайных величин. Петров В. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

640. Оценки наибольшего правдоподобия и доверительные множества для неизвестных параметров стационарного гауссовского процесса марковского типа. Лувсанцерен Ш., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 5, 723—726

После сообщения двух сложно формулируемых теорем об асимптотических свойствах оценок наибольшего правдоподобия рассматривается задача об оценке параметров марковского нормального стационарного процесса $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, с параметрами $a = M\xi_k$ (математическое ожидание); $\sigma^2 = D\xi_k$ (дисперсия); $\lambda = R(\xi_k, \xi_{k+1})$ (коэффициент корреляции). Эта задача, поставленная А. Н. Колмогоровым в 1948 г., рассматривалась референтом (Линник Ю. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1950, 14, № 6); им были построены доверительные множества, годные для малых выборок, но не оптимальные. Для случая $a = 0$, $\sigma = 1$ автор рассматривает оценки наибольшего правдоподобия λ_n (для λ). Утверждается, что функция распределения статистики $(n-1)^{1/2}(1+\lambda^2)^{1/2}(1-\lambda^2)^{-1}(\lambda_n - \lambda)$ при $n \to \infty$ стремится к нормальному закону с параметрами [0; 1] равномерно по $\lambda \in (-1,1)$. Строятся доверительные интервалы для λ и $\varphi(\lambda) = \int_0^\lambda (1+\lambda^2)^{1/2}(1-\lambda^2)^{-1} d\lambda$, асимптотически экстремальные в смысле Уилкса (Wilks S. S., Ann. Math. Statistics, 1938, 9, 166). Далее рассматриваются оценки наибольшего правдоподобия для a при известных λ и σ^2, и совместные оценки этого типа для λ и a, при известном σ.

Ю. В. Линник

641. О некоторых асимптотических свойствах оценок максимального правдоподобия и соответствующих оценок Байеса. Ле-Кам (On some asymptotic properties of maximum likelihood estimates and related Bayes estimates. Le Cam Lucien), Univ. Calif. Publs Statist., 1953, 1, № 11, 277—329 (англ.)

Изучается понятие асимптотической эффективности статистических оценок для параметров, от которых зависит функция распределения данной случайной величины. Оценка T' параметра θ считается более эффективной (асимптотически, при неограниченном увеличении объема выборки n), чем оценка T, если дисперсия $\sigma_n'^2(\theta)$ оценки T' асимптотически не превосходит дисперсии $\sigma_n^2(\theta)$ оценки T и оказывается асимптотически меньше $\sigma_n^2(\theta)$ хотя бы при одном значении θ. Используется также более общее определение эффективности, причем вместо дисперсии вводится широкий класс характеристик концентрации распределения вероятностей оценки. Пусть $W(t, \theta)$ — «функция успеха», численно характеризующая успех статистика, предложившего для оцениваемого параметра значение t, в то время как «истинное» значение параметра равно θ. Тогда для сравнения качества оценок T' и T используется выражение

$$A(T', T, \theta) = \lim_{n\to\infty} \inf [M\{W(T', \theta) \mid \theta\} - M\{W(T, \theta) \mid \theta\}].$$

Оценка T' будет более эффективной, чем T, если $A(T', T, \theta) \geqslant 0$ при всех θ, причем хотя бы при одном значении θ имеет место неравенство.

Оценка T' называется суперэффективной, если она более эффективна, чем оценка максимального правдоподобия T. При этом множество S значений θ, при которых $A(T', T, \theta) > 0$, называется множеством суперэффективности оценки T'.

Доказывается, что среди асимптотически-нормальных оценок не существует такой, дисперсия которой была бы асимптотически абсолютно наименьшей. Именно, пусть T — любая состоятельная асимптотически-нормальная оценка одномерного параметра θ, S — заданное счетное замкнутое множество значений θ, γ — любое число, удовлетворяющее условию $0 < \gamma \leqslant 1$. При условии существования такой невозрастающей последовательности чисел α_n, что $\alpha_n \to 0$ и $[\alpha_n / \sigma_n(\theta)] \to \infty$ при $n \to \infty$ и всех θ, строится состоятельная асимптотически-нормальная оценка T', дисперсия которой при $n > N(\theta)$, удовлетворяет соотношениям: $\sigma_n'(\theta) = \sigma_n(\theta)$ при $\theta \notin S$ и $\sigma_n'(\theta) = \gamma\sigma_n(\theta)$ при $\theta \in S$.

Дается пример оценки T', которая на плотном счетном множестве S значений параметра θ является «лучшей», чем оценка максимального правдоподобия T, в том смысле, что для T' выражение $F_{T'}(u, \theta) = \lim_{n\to\infty} P\{\sqrt{n}\,|T' - \theta| \leqslant u \mid \theta\}$ при всех $u \geqslant 0$ оказывается не меньше, чем для T и $F_{T'}(u, \theta) > F_T(u, \theta)$ хотя бы при одном значении u. Дается пример оценки, множество суперэффективности которой несчетно. Доказывается, что множество суперэффективности любой регулярной оценки есть множество первой категории, имеющее нулевую меру Лебега. Используемые при этом условия регулярности включают требование, чтобы плотность вероятности $f(x, \theta)$ изучаемой случайной величины была дважды непрерывно дифференцируемой по компонентам оцениваемого векторного параметра.

Оказывается, что суперэффективные оценки не удовлетворяют некоторым требованиям, которые интуитивно следовало бы предъявлять к наилучшим оценкам. Именно, при выполнении условий регулярности, если T — оценка максимального правдоподобия, а T' — суперэффективная оценка, и $\theta_0 \in S$, то существует такая последовательность $\theta_n \to \theta_0$, что

$$\liminf_{n\to\infty} [M\{W(T', \theta_n) \mid \theta_n\} - M\{W(T, \theta_n) \mid \theta_n\}] < 0.$$

Доказывается, что при некоторых условиях регулярности оценки максимального правдоподобия являются в определенном смысле асимптотически-достаточными. Независимо от вида априорного распределения параметра θ оценки максимального правдоподобия оказываются состоятельными и асимптотически-нормальными.

А. С. Монин

642. Замечание о t-критерии для парных выборок. Бхапкар (A note on t- test for paired samples. Bhapkar V. P.), Calcutta Statist. Assoc. Bull., 1954, 5, № 19, 142—147 (англ.)

Пусть (x_{1l}, x_{2l}), $l = 1, \ldots, n+1$ — независимые наблюдения двумерной нормальной случайной величины (ξ_1, ξ_2). Предполагается, что $M\xi_1 = \mu_1$, $M\xi_2 = \mu_2$, $D\xi_1 = D\xi_2 = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \rho\sigma^2$. Для проверки гипотезы о том, что $\mu_1 = \mu_2$, используются два критерия: t-критерий и w-критерий, основанные на статистиках

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_1)\sqrt{n+1}}{\sqrt{s_{11} + s_{22} - 2s_{12}}}, \quad w = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)\sqrt{n+1}}{\sqrt{s_{11} + s_{22}}},$$

где $s_{ij} = n^{-1}\sum_{l=1}^{n+1}(x_{il} - \bar{x}_i)(x_{jl} - \bar{x}_j)$, $i, j = 1, 2$. Известно, что t имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы, а w — распределение Стьюдента (с $2n$ степенями свободы) только при $\rho = 0$. Автор исследует свойства w-критерия для $\rho \neq 0$ и сравнивает мощности t и w-критериев. Л. Н. Большев

643. Распределения критериев t и F и коэффициентов корреляции и регрессии в стратифицированных выборках из нормальных совокупностей с различными средними значениями. Вейбулль (The distributions of t-and F-statistics and of correlation and regression coefficients in stratified samples from normal populations with different means. Weibull Martin), Skand. aktuarietidskr., 1953, suppl. 1—2, 106 pp. (англ.)

В монографии рассматривается случай, когда выборочные значения x_i суть независимо измеренные значения нормальных случайных величин u_i с одинаковыми дисперсиями λ, но различными средними значениями ξ_i. Такая выборка называется стратифицированной относительно средних значений. Для оценки значимости характеристик стратифицированной выборки используются обобщенные статистические критерии χ^2, t, F.

Пусть случайные величины u_i имеют p-мерное нормальное распределение со средними значениями ξ_i, дисперсиями единица и коэффициентами корреляции ρ_{ik}. Пусть $P = \mathrm{Det}\,\|\rho_{ik}\|$, P_{ik} — алгебраическое дополнение ρ_{ik} в P и $\rho^{ik} = P_{ik}/P$. Тогда величина $\chi^2 = \sum_{i,k}\rho^{ik}u_iu_k$ имеет нецентральное распределение χ^2 с p степенями свободы, плотность вероятности которого представляется в виде ряда, зависящего от параметра нецентральности $\beta^2 = \sum_{i,k}\rho^{ik}\xi_i\xi_k$. Если u — нормальная случайная величина со средним значением ξ, не зависимая от u_i, то величина $t = u\sqrt{p}/\sqrt{\chi^2}$ имеет нецентральное распределение t. Если χ_1^2 и χ_2^2 — две независимые величины, имеющие нецентральные распределения χ^2 с p_1 и p_2 степенями свободы соответственно, то величина $F = p_2\chi_1^2/p_1\chi_2^2$ имеет нецентральное распределение F. Для плотностей вероятности нецентральных распределений t и F указываются выражения в виде двойных рядов. Нецентральные распределения χ^2, t, F детально изучаются и приводится таблица наиболее важных для практического использования значений нецентрального распределения F.

Знание нецентральных распределений χ^2, t, F позволяет автору указать точные выборочные распределения для характеристик стратифицированной выборки s^2, $\bar{x}\sqrt{n}/s$, для нормированной разности средних значений и для отношения дисперсий двух независимых стратифицированных выборок, для нормированной линейной комбинации средних значений нескольких стратифицированных выборок.

Особо изучается случай, когда средние значения ξ_i случайных величин u_i суть линейные функции $\xi_i = \sum_{k=1}^{r}a_{ki}x_{ki}$ заданных параметров $x_{ki}, k = \overline{1, r}$ (выборка, стратифицированная относительно коэффициентов регрессии a_{ki}). Вводятся «коэффициенты регрессии» a_k, находимые из уравнений $\sum_i x_{il}(x_i - \sum_k a_k x_{ki}) = 0$, $l = \overline{1, r}$, и «остаточная дисперсия» $s_0^2 = \sum_i(x_i - \sum_k a_k x_{ki})^2/(n-r)$, где n — объем выборки. Изучаются распределения вероятностей для ряда функций от a_k и s_0^2 для одной и нескольких стратифицированных выборок.

В случае двумерной нормальной выборки, стратифицированной относительно средних значений, выводятся точные выборочные распределения для средних значений $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ и для вторых моментов (m_{11}, m_{12}, m_{22}). Эти составные случайные величины оказываются независимыми друг от друга, причем первая из них имеет двумерное нормальное распределение, а вторая — так называемое нецентральное распределение Вайсхарта, являющееся двумерным обобщением нецентрального распределения χ^2. Полученные результаты позволяют автору указать точные выборочные распределения для нормированной разности средних значений $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$, коэффициента корреляции и нормированных коэффициентов регрессии. Все выводы автор сопровождает подробными, в большинстве громоздкими выкладками. Библ. 60 назв. А. С. Монин

644. О некоторых доверительных контурах для функций распределения. Мальмквист (On certain confidence contours for distribution functions. Malmquist Sten), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 523—533 (англ.)

Пусть $W(t)$ — винеровский процесс. Используя результаты Дуба (Doob, Ann. Math. Statistics, 1949, 20, № 3), автор находит условную вероятность выполнения неравенств $W(t) \leqslant at + b$, $|W(t)| \leqslant at + b$ для всех $t \in [x, y]$ при гипотезе $W(x) = s_1$, $W(y) = s_2$ (для вероятности второго неравенства соответствующая формула приводится без доказательства). Полученные формулы применяются для определения предельной при $N \to \infty$ вероятности события $\sqrt{N}\,[F_N^*(U) - F(U)] \in D$, где $F_N^*(U)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по N независимым измерениям случайной величины с непрерывным распределением $F(U)$, а D — область в плоскости (U, X) специального вида, например, область, определяемая соотношениями

$$X < (a-b)F(U) + b, \quad -\infty < U \leqslant U^*,$$

$$X \leqslant (b-a)F(U) + a, \quad U^* \leqslant U < \infty, \text{ где } F(U^*) = 1/2.$$

Приводятся некоторые приближенные результаты о мощности критериев согласия, основанных на доверительной области D. Кроме того, найдено предельное совместное распределение координаты точки и значения максимума функции $\sqrt{N}\,[F_N^*(U) - F(U)]$. И. И. Гихман

645. О характеризации распределения Пуассона. Лукач (Sur une caractérisation de la distribution de Poisson. Lukacs Eugène), 1954, 239, № 18, 1114—1116 (франц.)

Рассматриваются одинаково распределенные независимые случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Предполагается, что эти случайные величины неотрицательны и имеют конечный момент третьего порядка. Доказывается теорема: Для того чтобы случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ были распределены по закону Пуассона, необходимо и достаточно, чтобы регрессия S по L была постоянной. S и L — статистики, определяемые следующим образом:

$$L = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$S = \frac{1}{n}\sum_i x_i^3 - \frac{3}{n(n-1)}\sum_{i \neq j} x_i^2 x_j + \frac{12}{n(n-1)(n-2)}\sum_{i \neq j \neq k} x_i x_j x_k - \frac{1}{n}\sum_i x_i.$$

В. П. Скитович

646. О распределении отношения i-го наблюдения в упорядоченной выборке из нормальной совокупности к независимой оценке стандартного отклонения. Пиллаи, Рамачандран (On the distribution of the ratio of the i th observation in an ordered sample from a normal population to an independent estimate of the standard deviation. Pillai K. C. S., Ramachandran K. V.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 565—572 (англ.)

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ — упорядоченная выборка из нормально распределенной совокупности со средним значением 0 и стандартным отклонением 1, $q_i = x_i / s$, $u_n = |x_n / s|$, где s — независимая от x_i оценка стандартного отклонения с ν степенями свободы, имеющая плотность вероятности

$$P(s) = [2(\nu/2)^{\nu/2} / \Gamma(\nu/2)]\, s^{\nu-1} e^{-\nu s^2/2}.$$

Даются выражения (в виде разложений в ряды) для плотностей вероятности величин q_i, $|x_n|$, u_n. Приводятся таблицы величин q_n^α, определяемых соотношением $P(q \geqslant q_n^\alpha) = \alpha$, для $\alpha = 0{,}05$ и $n \leqslant 8$ и величин u_n^α, определяемых соотношением $P(u \geqslant u_n^\alpha) = \alpha$, для $\alpha = 0{,}05$, $n \leqslant 8$ и $\alpha = 0{,}95$, $n \leqslant 10$ при различных значениях ν. А. А. Петров

647. О статистическом спектральном анализе. Гренандер, Розенблатт (Comments on statistical spectral analysis. Grenander Ulf, Rosenblatt Murray), Skand. aktuarietidskr, 1953, № 3—4, 182—202 (англ.)

После краткого обзора основных понятий статистического анализа стационарных временных рядов рассматривается вопрос об оценке (интегральной) спектральной функции $F(\lambda)$ стационарного случайного ряда $\{x_n\}$. В качестве оценки используется функция

$$F_N^*(\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi} c_0 + \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{N-1} c_\nu \frac{\sin \nu\lambda}{\nu} \quad ; \quad c_\nu = \sum_{n-1}^{N-\nu} x_n x_{n+\nu},$$

причем доверительные пределы для $F(\lambda)$ предлагаются в виде

$$F_N^*(\lambda) \pm \alpha \sqrt{2\pi G^*(\pi)} / \sqrt{N};$$

$$G^*(\pi) = \left[c_0^2 + \sum_{\nu-1}^{[N^\alpha]} c_\nu^2\right] / 4\pi N^2.$$

Для соответствующих доверительных вероятностей $\Delta(\alpha)$ дана таблица. А. С. Монин

648. Статистический анализ выборок из литературных текстов. Фукс (On nahordnung and fernordnung in samples of literary texts. Fucks Wilhelm), Biometrika, 1954, **41**, № 1—2, 116—132 (англ.)

Продолжение работы автора (Biometrika, 1952, **39**, 122), посвященной статистическому анализу стиля литературных текстов. Рассматриваются различные статистические характеристики выборки из текста вроде среднего числа $\bar{i}$ слогов в слове, энтропии $S = -k\Sigma p_i \log p_i$ (где p_i — доля слов, имеющих заданное число i слогов) и т. п. Выбираемые таким образом характеристики лишь в очень слабой степени отражают особенности сравниваемых текстов. А. А. Петров

649. Некоторые теоремы о квадратичных формах, применяемые при изучении различных проблем дисперсионного анализа. I. Эффект неравенства дисперсий в одновидовой классификации. Бокс (Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problems. I. Effect of inequality of variance in the one-way classification. Box G. E. P.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 290—302 (англ.)

Даются приближенные распределения вероятностей для некоторых неотрицательных квадратичных форм от одинаково распределенных независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение и нулевые математические ожидания. Эти приближенные распределения вероятностей довольно просто выражаются через χ^2-распределение.

В. П. Скитович

650. Некоторые теоремы о квадратичных формах, применяемые при изучении различных проблем дисперсионного анализа. II. Эффекты неравенства дисперсии и корреляции ошибок в двухвидовой классификации. Бокс (Some theorems on quadratic forms applied in the study of analysis of variance problem. II. Effects of inequality of variance and of correlation between errors in the two-way classification. Box G. E. P.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 484—498 (англ.)

Результаты, полученные ранее автором (реф. 649), применяются при изучении некоторых вопросов дисперсионного анализа. В. П. Скитович

651. Теория многомерных распределений. Олкин, Рой (On multivariate distribution theory. Olkin I., Roy S. N.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 2, 329—339 (англ.)

Даются матричные методы для получения распределений некоторых статистик при выборке из многомерной нормальной генеральной совокупности.

В. П. Скитович

652. Обобщенные распределения Коши. Райдер (Generalized Cauchy distributions. Rider Paul Reece), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 300 (англ.)

653. Несколько замечаний о применении последовательных методов в дисперсионном анализе. Джонсон (Some notes on the application of sequential methods in the analysis of variance. Johnson N. L.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 4, 614—623 (англ.)

654. Совпадающие линии регрессии. Жиро (Droites de régression confondues. Girault Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 20, 1266—1267 (франц.)

Известно, что если двумерное распределение на плоскости (OX, OY) имеет моменты второго порядка и линия регрессии x по y совпадает с линией регрессии y по x, то все распределение сосредоточено на линии регрессии, а x и y связаны функционально. Дармуа поставил вопрос, будет ли это утверждение справедливо, если не предполагать существования конечных моментов у рассматриваемого распределения. В работе приведен пример, на основании которого на этот вопрос дается отрицательный ответ. В. П. Скитович

655. Упорядоченные выборки из биномиальной и пуассоновской генеральных совокупностей. Солиман Хассан Абдель-Ати (Ordered variables in binomial and Poisson samples. Soliman Hassan Abdel-Aty), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 273 (англ.)

656. Методы представления одномерных распределений математическими кривыми. Мишра (On alternative methods of representing univariate distributions by mathematical curves. Mishra M. A. Chakradhar), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 297 (англ.)

657. К вопросу о выборе кривых распределения случайных величин. Гейликман А. И., Тр. Тульск. механ. ин-та, 1955, № 7, 14—35

658. Среднее значение и коэффициент изменчивости

размаха в малых выборках из ненормальных популяций. Кокс (The mean and coefficient of variation of range in small samples from non-normal populations. Cox D. R.), Biometrika, 1954, **41**, № 3—4, 469—481 (англ.)

Производятся некоторые подсчеты, относящиеся к распределению размаха в малых (объема $\leqslant 8$) выборках для ряда ненормальных совокупностей.

А. А. Петров

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

659. **Об определении энтропии в теории информации. Тортра** (Sur la définition de l'entropie en théorie de l'information. Tortrat Albert), Ann. télécommuns, 1955, **10**, № 2, 39—47 (франц.)

Излагаются хорошо известные трудности, связанные с определением энтропии в теории информации, главным образом в случае непрерывных передач. Для дискретных источников автор ограничивает область применимости понятия энтропии источниками марковского типа. Повидимому, от его внимания ускользнула работа Макмиллана (РЖМат, 1954, 1731), где дается полноценное определение энтропии для любого стационарного источника. По традиции большей части рассмотрений подобного рода, формальное сходство выражений энтропии в теории вероятностей и в физике (сходство, которое в свое время и побудило Шеннона назвать это выражение энтропией) дает автору повод неоднократно сопоставлять между собою эти два выражения и дискутировать имеющиеся между ними сходства и различия.

А. Я. Хинчин

660. **Об эквивалентности выражений энтропии для временной и частотной областей. Прайс** (On entropy equivalence in the time- and frequency-domains. Price Robert), Proc. I. R. E., 1955, **43**, № 4, 484—485 (англ.)

Как известно, Шеннон для энтропии дискретного стационарного гауссова временного ряда нашел два различных выражения — одно для временной, другое для частотной области. Приравнивание этих двух выражений приводит, как показывает автор, к нетривиальному предельному соотношению, содержащему детерминанты типа Грама бесконечно высокого порядка, составленные из значений автокорреляционной функции. Это предельное соотношение уже давно было найдено и использовано рядом авторов, но до теории информации не имело прямого физического истолкования. Автор показывает также, что расчет условной энтропии члена ряда при заданных значениях предшествующих членов может быть связан с теоремой Колмогорова — Винера об экстраполяции стационарных временных рядов и дает прямую физическую интерпретацию некоторым величинам, встречающимся в этой теории.

А. Я. Хинчин

661. **О некоторых аспектах теории информации. Валле** (Quelques aspects de la théorie de l'information. Vallée Robert), Rev. gén. électr., 1954, **63**, № 11, 698—706 (франц.)

Краткий популярный сильно упрощенный обзор некоторых понятий и выводов теории информации, без претензий на полноту.

А. Я. Хинчин

662. **Минимально обнаруживаемое изменение средней мощности шумов на входе радиоприемника. Лампард** (The minimum detectable change in the mean noise input-power to a radio receiver. Lampard D. G.), Proc. Instn. Electr. Engrs, 1954, **101**, № 6, part 4, 118—128 (англ.)

Используя метод корреляционных функций, автор выводит точные формулы для минимально обнаруживаемого изменения средней мощности шумов на входе радиоприемника, построенного по схеме фильтр — детектор — фильтр. В эти выражения входят характеристики обоих фильтров и характеристика детектора. Детекторы рассматриваются трех типов:

1) Полупериодный ν-й степени:

$$I(t) = \begin{cases} [v(t)]^\nu, & \text{когда } v > 0, \\ 0, & \text{когда } v \leqslant 0. \end{cases}$$

2) Двухполупериодный степенной ν-й степени:

$$I(t) = \begin{cases} [v(t)]^\nu, & \text{когда } v > 0, \\ [-v(t)]^\nu, & \text{когда } v \leqslant 0. \end{cases}$$

3) Пиковый для огибающей.

В качестве примера приводится расчет случая, в котором фильтр до детектора является одиночным контуром, а фильтр после детектора — простым RC-интегратором.

Я. И. Хургин

663. **Очереди с многофазным обслуживанием. Джэксон** (Queueing systems with phase type service. Jackson R. R. P.), Operat. Res. Quart., 1954, **5**, № 4, 109—120 (англ.)

Рассматриваются системы массового обслуживания, складывающегося из нескольких последовательных фаз. Автор ограничивается простейшими предположениями: одно обслуживающее устройство в каждой фазе, пуассоновское распределение числа появляющихся клиентов, показательное распределение времени обслуживания (с различными параметрами в различных фазах), обслуживание клиентов в порядке их появления в данной фазе. Искомыми являются распределения чисел клиентов в различных фазах. Рассматривается как случай неограниченного числа клиентов в системе, так и случай, когда это число не может превосходить некоторой заданной границы.

Решение задачи проводится классическим путем и не вызывает каких-либо трудностей. Для искомых вероятностей составляется система разностно-дифференциальных уравнений, совершается переход к стационарному случаю («принцип статистического равновесия» Эрланга), без каких-либо попыток обоснования; получающаяся система алгебраических уравнений легко решается и дает простые и элементарные выражения для всех искомых величин.

В общей части статьи рассматриваются лишь двухфазные системы. Во всех случаях уравнения задачи приводятся без вывода; все эти пробелы с легкостью могут быть восстановлены читателем по классическим образцам.

А. Я. Хинчин

664. **Процесс, связанный с некоторыми оптическими явлениями. Копленд** (A process related to certain visual phenomena. Copeland Sr. Arthur H.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 284 (англ.)

665. **Вероятностная теория скоплений галактик и гипотеза расширяющейся Вселенной. Нёйман** (Probabilistic theory of clustering of galaxies with particular reference to the hypothesis of an expanding Universe. Neyman Jerzy), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 298—299 (англ.)

666. **Отыскание оптимальных условий. Хантер** (Searching for optimum conditions. Hunter John Stuart), Trans. N. Y. Acad. Sci., 1954, **17**, № 2, 124—132 (англ.)

667. **Номографические методы для контроля качества. Фишер, Либшер** (Nomographische Methoden bei der Qualitätskontrolle. Fischer Johannes, Liebscher Ulrich), Textil-und Faserstofftechnik, 1954, **4**, № 10, 577—580 (нем.)

Излагаются различные приемы вычисления характеристик выборочного распределения при помощи вероятностной бумаги и прибора, аналогичного логарифмической линейке. Результаты иллюстрируются примерами, относящимися к применению статистического контроля в текстильной промышленности.
Л. Н. Большев

668. **Математическая теория прогноза.** Когава (予報についての數學的論理. 小河原正巳), 數學 (Кагаку). 1954, 24, № 10, 489—495 (япон.)

См. также: 9, 11, 12, 119, 143, 144, 146, 613

ГЕОМЕТРИЯ

669. **Симпозиум по дифференциальной геометрии.** Бехари (Symposium on differential geometry. Behari Ram), Math. Student, 1954, 22, № 1, 27—29 (англ.)
Краткий отчет о конференции по дифференциальной геометрии, происходившей под председательством Бехари.
В. В. Рыжков

670. **Этапы развития геометрии. По статье «Геометрия» в Большой советской энциклопедии** (Etapele de desvoltara a geometriei. După articolul «Geometria» din Marea Enciclopedie Sovietică), Rev. mat. şi fiz., 1953, 4, № 10, 245—247 (рум.)

671. **Математика групп крови человека и алгебраическая конгруэнция прямых.** Бернштейн (The mathematics of the human bloodgroups and the algebraic linecongruences. Bernstein Felix), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 199—200 (англ.)

672. **О множестве прямоугольных треугольников плоскости или пространства.** Лоран (Sur un ensemble de triangles rectangles du plan ou de l'espace. Lorent H.), Anais Fac. cienc., Porto, 1953, 37, 5—36 (франц.)

673. **Элементарно-геометрические модели в дифференциальной геометрии.** Зауэр (Elementargeometrische Modelle zur Differentialgeometrie. Sauer R.), Elem. Math., 1954, 9, № 6, 121—131 (нем.)
Статья является первой частью работы, имеющей целью дать краткий обзор результатов попыток наглядно представить элементарногеометрические модели разностной геометрии, из которых путем соответствующих предельных переходов получаются соотношения дифференциальной геометрии. Указаны возможности, возникающие из аппроксимации псевдосфер, во-первых, треугольными сетями, что удобно для наглядной интерпретации гауссовой кривизны и теоремы Гаусса — Бонне, и, во-вторых, плоскими четырехугольными сетями — для теории изгибания.
А. Гаршвек

674. **Геометрия бумажной развертки. II. Модели тетраэдра.** Тригг (Geometry of paper folding. II. Tetrahedral models. Trigg C. W.), School Sci. and Math., 1954, 54, № 9, 683—689 (англ.)
Устанавливаются различные плоские конфигурации, состоящие из 4, 7, 9, 10 треугольников, с помощью которых можно получить модели тетраэдра как правильного, так и неправильного. Даются некоторые практические указания по изготовлению таких моделей из бумаги или картона.
В. Ф. Рогаченко

675. **Угол между прямыми на сферической евклидовой плоскости.** Лауффер (Winkel von Geraden in der orientierten, euklidischen Ebene. Lauffer R.), Math.-phys. Semesterber., 1954, 4, № 1/2, 82—89 (нем.)

676. **О прямых Эйлера в ортоцентрических четырехугольниках.** Горрессен (Sur les droites d'Euler d'un quadrangle orthocentrique. Gorrissen L.), Mathesis, 1954, 63, № 3—5, 123—126 (франц.)
Известно, что треугольники ортоцентрического четырехугольника имеют общую окружность девяти точек, в центре которой O_9 пересекаются прямые Эйлера этих треугольников.
Отсюда выводится ряд теорем: 1) четырехугольник $OO_aO_bO_c$, образованный центрами окружностей, описанных около треугольников данного четырехугольника $ABCH$, симметричен последнему относительно O_9; 2) четырехугольник $LD_aD_bD_c$, образованный барицентрами треугольников $HABC$, гомотетичен последнему с центром в O_9 и коэффициентом $k = -\frac{1}{3}$ и т. д.

677. **Параболы, связанные с треугольником.** Рау (Parabolas related to a triangle. Rau P. S.), Math. Gaz., 1954, 38, № 326, 253—257 (англ.)
Пусть D, E, F — середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, в плоскости которого даны две пересекающиеся прямые L и L'. Если построить параллелограммы, диагоналями которых являются стороны треугольника ABC, со сторонами, параллельными прямым L и L', то их вторые диагонали пересекаются в конечной точке $P(L, L')$. Имеют место теоремы:
1. Множество точек $P(L, L')$ для всех L и L' состоит из точек D, E, F и точек открытых областей D', E', F', где D' — открытая область, ограниченная отрезком EF и продолжениями отрезков LE и DF. Аналогично получаются области E' и F'.
2. Если L зафиксирована, то точка $P(L, L')$ описывает параболу, проходящую через D, E, F с осью, параллельной L.
3. Если $L \perp L'$, то точка $P(L, L')$ описывает окружность, проходящую через D, E, F.
Попутно получаются еще два результата, относящихся к параболам, проходящим через три точки.
В. Ф. Рогаченко

678 К. **Координаты в геометрии.** Фордер (Coordinates in geometry. Forder H. G. Auckland, Auckland University College, 1953, 32 p.) (англ.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

679. **Новое основание геометрии окружностей.** Эвальд (A new foundation of the geometry of circles. Ewald Günther), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 213—214 (англ.)
Ван дер Варден и Смид (L. J. Smid) отметили аналогию между аксиоматическим построением проективной геометрии на плоскости и построением геометрии окружностей. В первой к обычным аксиомам надо добавить теорему Паппа или Дезарга (из первой вытекает вторая, но не наоборот); в конформной геометрии такую же роль играет теорема Майкела (Miquel) и «теорема пучка». Автор отмечает, что эта последняя по существу есть геометрия плоского сечения выпуклой поверхности. С другой стороны, обычную геомет-

рию окружностей можно получить присоединением аксиом «ортогональности». Р М. Гейдельман

680. О геометрических построениях на плоскости Лобачевского. Гиршович М. В., Уч. зап. Калининск. пед. ин-та, 1953, 16, 7—38

Дается развернутое изложение результатов, опубликованных автором ранее (Докл. АН СССР, 1948, 60, № 5). В первой главе даются геометрические построения на плоскости Л. (Лобачевского) в интерпретации Пуанкаре, выполненные циркулем и линейкой Е. (Евклида). Во второй главе доказывается общая теорема:

Геометрические построения на плоскости Л., выполненные расширенным комплексом чертежных инструментов: линейка, циркуль, гиперциркуль и орицикуль,— могут быть выполнены только линейкой и циркулем Л.

В качестве приложения доказывается, что теорема Гаусса о делении окружности на n частей справедлива и в геометрии Л., что трисекция угла и отрезка на плоскости Л. в общем случае неразрешима циркулем и линейкой Л. и др.

На черт. 31 точки A и A' должны быть передвинуты к центру O по радиусу OA, с линий T и T' на линии L и L'. На стр. 16 в строке 4 снизу следует читать Γ_2; на стр. 33 в строке 9 снизу — T'.

Н. М. Несторович

681. Упражнения в стереографической проекции. Феслер (Exercices en projection stereographique. Faessler Carl), Naturaliste canad., 1953, 80, № 10—11, 221—273 (франц.)

Построение стереографической проекции двух групп кристаллов: гексоктаэдрического класса кубической системы и пинакоидального класса триклинной системы. Статья рассчитана на лиц, знакомых с принципами построения стереографической проекции кристаллов. Построение ведется без применения стереографической сетки Вульфа и с применением таковой. Цель построения проекции гексоктаэдров: 1) определение точного положения плоскостей, 2) определение зональных отношений.

При построении стереографической проекции триклинных кристаллов автором рассматриваются задачи, имеющие чисто теоретический интерес — это построение проекций по минимуму данных. Задача решена способом последовательных приближений.

Указывается, что стереографическая проекция дает полное представление о морфологических и оптических свойствах кристалла в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа. Путем преобразования можно придать стереографической проекции любую ориентацию и проследить свойства кристалла в любом направлении. В. Н. Журавлева

682. Проективная геометрия. Клайн (Projective geometry. Kline Morris), Scient. Amer., 1955, 192, № 1, 80—86 (англ.)

683 К. Новая начертательная геометрия, чертежи пространственных фигур. Саламон (Nouvelle géométrie descriptive, tracés à 3 dimensions. Tome 1. Salamon Pierre, Toulouse, 1954, 267 p., 2000 fr.), Bibliogr. France, 1954, 143, № 47, part. 1, 1039 (франц.)

684 К. Проективная геометрия. Прюфер (Projektive Geometrie. 2-te Aufl. Prüfer Heinz, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft, 1953, VII+314 p., 9.00 DM) (нем.)

685 К. Проективная геометрия. Четверухин Н. Ф. Изд. 6-е, переработанное, М., Учпедгиз, 1953, 350 стр., 8 р. 05 к.

Книга предназначается в качестве учебника для педагогических институтов, поэтому автор ставит задачей дать упрощенное изложение основ проективной геометрии, отправляясь непосредственно от тех понятий и предложений, которые знакомы студентам из курса элементарной геометрии.

Опираясь на параллельное проектирование, автор дает понятие о простейшем, перспективно-аффинном преобразовании фигур и его свойствах, затем переходит к определению и изучению общего аффинного преобразования. Считая целесообразным в первой части курса дать больше фактического материала, он наряду с изложением общих свойств аффинного преобразования вводит исследование эллипса как линии аффинно-соответственной окружности и эллипсоида как поверхности аффинно-соответственной сфере.

В гл. II — Построение проективного пространства — после краткой характеристики евклидова пространства в отношении свойств инцидентности элементов и порядка расположения точек на прямой и плоскости автор переходит к методу центральной проекции и целесообразного введения несобственных элементов Здесь автор излишне категорично утверждает, что применение метода центральной проекции невозможно без устранения указанных им затруднений; подобные неточности встречаются в книге не один раз. Далее автор переходит к отношениям инцидентности и порядка элементов проективного пространства, аксиоме непрерывности, перечислению основных геометрических форм, принципу двойственности, наконец рассматриваются теоремы и конфигурации Дезарга.

В гл. III — Основные понятия проективной геометрии — дается алгебраическое определение (как частного двух простых отношений) ангармонического отношения четырех точек на прямой и четырех лучей пучка, доказывается их неизменяемость для перспективных рядов, затем проективность двух форм первой ступени определяется по Штейнеру; вводится гармонизм по значению сложного отношения, доказываются свойства полного четырехвершинника и полного четырехсторонника, затем изучаются проективные ряды с общим носителем и инволюция в них. В конце приводится проективное преобразование и инволюция в координатах.

Гл. V посвящена проективной теории кривых второго порядка.

Гл. VI — Коллинеации и корреляции — начинается с определения проективности Штаудта и доказательства его эквивалентности определению Штейнера; далее определяется коллинеация двух плоских полей как взаимно однозначное их соответствие с сохранением коллинеарности точек и инцидентности элементов и показывается ее проективный характер, рассматриваются частные виды коллинеации и условий ее определяющих. Здесь же вводятся проективные координаты и аналитическое изображение коллинеарного преобразования; двойные элементы коллинеации исследуются синтетически и параллельно аналитически. Далее изучаются коррелятивное и полярное соответствия, выводится уравнение линии второго порядка в проективных координатах в его простейшем виде и исследуется общее уравнение второй степени в однородных проективных координатах.

Глава заканчивается рассмотрением проективных пучков плоскостей и образованием линейчатых поверхностей 2-го порядка.

Гл. VI дает характеристику проективной, аффинной и метрической геометрии, каждой по основной группе; особенно подробно рассматривается метрическая группа, теория конгруэнтности фигур с проективной точки зрения и в связи с группой движения. Дается понятие о группе проективных преобразований пространства, ее подгруппах, о построении аффинной и метрической геометрии пространства с проективной точки зрения. Глава заканчивается разъяснением построения геометрии Лобачевского с проективной точки зрения.

После каждой главы книги даны хорошо подобранные упражнения и задачи, которые частью помогают усвоению курса, частью дополняют изложение в тексте. Книга сопровождается кратким историческим очерком развития проективной геометрии и обзором работ русских ученых в области проективной геометрии. Изложение в книге в общем синтетическое, но параллельно дается и аналитическое. С. С. Бюшгенс

686 Д. **Построение и применение изображений в курсе стереометрии средней школы.** Семушина А. Д. Автореф. дисс. канд. пед. н., Н.-и. ин-т методов обучения Акад. пед. наук РСФСР, М., 1955

687 Д. **Метод прямоугольного проектирования на две плоскости, пересекающиеся не под прямым углом, как обоснование нового способа преобразования проекций.** Левин В. П. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Л., 1955

688 Д. **Аксонометрические изображения и применение их для исследования многокомпонентных систем.** Червикова В. Н. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1955

689 Д. **Построение теней на архитектурных деталях с помощью гиперболоидов вращения.** Иодковская Н. К. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. инж.-строит. ин-т, Л., 1955

Д. **Аксонометрические проекции конических сечений и поверхностей 2-го порядка.** Нестеренко А. П. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Новосибирск, 1955

91 Д. **Вопросы использования коллинеарных преобразований в задачах начертательной геометрии.** Вальков К. Я. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. инж.-строит. ин-т, Л., 1955

692 Д. **Исследование и геометрическое обоснование графических способов построения кривых поверхностей.** Хомутов К. М. Автореф. дисс. канд. техн. н., Ленингр. технол. ин-т им. Ленсовета, Л., 1955

693 Д. **Некоторые вопросы геометрических построений в трехмерном гиперболическом пространстве.** Дыманов Р. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск. ун-т, Ростов-на-Дону, 1955

694 Д. **Геометрические свойства моторных преобразований.** Чернова М. Л. Автореф дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

695 Д. **Поверхности с направляющей плоскостью.** Бубенников А. В. Автореф. дисс. канд. техн. н., Всес. заоч. политех. ин-т, М., 1955

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

696. **Характерный метод доказательства в алгебраической геометрии.** Кизини (Un caratteristico procedimento dimostrativo della geometria algebrica. Chisini Oscar), Univ. e Politecnico Torino. Rend. Sem. mat., 1953, 12, 21—36 (итал.)

Эта статья является лекцией автора, в которой ряд известных геометрических теорем доказан применением аналитической теоремы о том, что рациональная функция, не имеющая полюсов, равна постоянной.

J. A. Todd

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 8, 739

697. **Алгебраические и аналитические кривые.** Сантало (Curvas algebraicas y curvas analiticas. Santalo), Rev. Univ. nac. Eva Peron, 1953, 4, № 5, 494—506 (исп.)

Пусть $x_k\,(k=0,\ 1,\ 2)$ — однородные координаты на комплексной плоскости. Тогда три функции комплексного переменного $t: x_k = x_k(t)$ можно рассматривать как уравнения кривой на комплексной плоскости. Такие «кривые» исследованы Г. Вейлем.

Картан показал, что если координаты кривой нормированы, т. е. $\sum_{k=0}^{2} x_k(t)\overline{x}_k(t) = 1$, то абсолютное значение двойного интеграла:

$$G = \frac{1}{2\pi i}\int \sum_{k=0}^{2} [dx_k d\overline{x}_k]$$

по алгебраической кривой равен степени этой кривой. Так как этот интеграл имеет смысл не только для алгебраической кривой и инвариантен относительно параметризации и положения кривой на плоскости, то его величину можно положить в основу определения степени аналитической кривой и степени части алгебраической кривой.

В реферируемой работе доказывается теорема, являющаяся обобщением теоремы Безу для алгебраических кривых, что подтверждает закономерность и целесообразность введенного обобщения степени кривой.

Теорема. Пусть C_1 и C_2 — две аналитические кривые (или части алгебраических кривых), G_1 и G_2 — соответственно их степени. Если C_1 занимает фиксированное положение на плоскости, C_2 — переменное положение, то среднее значение меры точек пересечения кривых равно произведению их степеней.

Доказательство теоремы сводится к вычислению интеграла

$$\frac{1}{\sigma_u}\int_u N(C_1 \wedge uC_2)\, d\sigma_u,$$

где u — унитарная группа, $N(C_1 \wedge uC_2)$ — количество точек пересечения кривых C_1 и uC_2, $d\sigma_u$ — элемент инвариантного объема группы; интегрирование производится по всей унитарной группе.

Приводятся два замечания проф. Биггери:

1. Степень кривой можно выразить с помощью интеграла по контуру Г, ограничивающему область изменения t

$$G = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma} \frac{\sum(\beta_k d\alpha_k - \alpha_k d\beta_k)}{\delta^2},$$

где $x_k = \alpha_k + i\beta_k$; $\delta^2 = (x\overline{x})$.

2. Понятие «части» кривой и ее степени с помощью лишь ограничения области изменения параметра недостаточно, так как степень оказывается тогда не инвариантной относительно параметризации.

А. И. Нахимовская

698. **Циркулярные аналлагматические кривые третьего порядка с взаимными или изогональными точками.** Друссан (Cubiques circulaires anallagmatiques par points réciproques ou isogonaux. Droussent Lucien), Mathesis, 1953, 62, 204—215 (франц.)

699. **Кривые, ассоциированные с четырехсторонником.** Гийотен (Courbes associées à un quadrilatère. Guillotin M. R.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 6—7, 327—340 (франц.)

Четырехсторонник $PQRS$, определяемый проекциями некоторой точки M на стороны данного полного четырехсторонника $ABCD$, называется подерным.

Геометрическое место точек M плоскости, для которых подерный четырехсторонник относительного данного $ABCD$ является описуемым, есть, в общем случае, кривая восьмого порядка, циклические точки которой четырехкратны. Когда четырехсторонник $ABCD$ вписуем, указанное геометрическое место сводится к двум циркулярным кривым третьего порядка Γ_1 и Γ_2.

Исследуются факты, связанные со свойствами кривых Γ_1 и Γ_2. Во второй части работы устанавливаются условия вписуемости подерного четырехугольника и

изучаются свойства связанных с ним геометрических мест. См. РЖМат, 1955, 913. Г. С. Бархин

700. Об отображении кубической поверхности на плоскость и о получающемся отсюда бирациональном преобразовании. Годо (Sur la représentation plane de la surface cubique et sur une transformation birationnelle qui s'en déduit. Godeaux Lucien), Mathesis, 1954, **63**, № 3—5, 97—102 (франц.)

Излагается одна из лекций автора по высшей геометрии, которая касается известного бирационального преобразования. Интересен только метод изложения.

701. Многообразие пространства S_5, определяемое упорядоченной парой алгебраических кривых комплексной плоскости. Спампинато (Le varietà dell' S_5 determinate da una coppia ordinata di curve algebriche del piano complesso. Spampinato Nicolò), Ricerca, Napolli, 1953, **4**, № 3—4, 3—11 (итал.)

702. Об одном частном типе линейных комплексов плоскостей пространства S_{3r-1}. Лонго (Su un tipo particolare di complessi lineari di piani in S_{3r-1}. Longo Carmelo), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 150—153 (итал.)

Линейный комплекс плоскостей проективного пространства S_n над полем комплексных чисел задается уравнением

$$a_{ijk}p^{ijk} = 0, \quad i, j, k = 0, 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где p^{ijk} — плюккеровы координаты плоскости, а тензор a_{ijk} кососимметрический относительно всех своих индексов (тривектор).

Прямая называется особой по отношению к комплексу (1), если любая проходящая через нее плоскость принадлежит комплексу; подпространство S_t пространства S_n, все прямые которого — особые, называется особым относительно комплекса. Рассматривается тот случай, когда $n = 3r - 1$ (r — целое) и уравнение (1) может быть приведено проективным преобразованием к виду

$$\sum_{t=0}^{r-1} p^{3t,\,3t+1,\,3t+2} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) приводимо к виду (2), если существует $r-1$ подпространств S_3, которые проходят все через одну точку P, не имея (при $r > 2$) попарно других общих точек, так что особые подпространства наивысшей размерности, проходящие через P, суть S_{r-1}, пересекающие одно из этих S_3 по прямой.

Это условие эквивалентно следующему: линейный комплекс принадлежит типу (2), если он допускает в качестве особых подпространств наивысшей размерности $\infty^{3(r-1)}$ подпространств S_{r-1} таких, что через каждую точку общего положения пространства S_{3r-1} проходит одно и только одно S_{r-1}. Г. Б. Гуревич

703. Еще об аналитических многолинейчатых многообразиях V_3. Мураккини (Ancora sulle varietà V_3 analitiche pluririgate. Muracchini Luigi), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 3, 262—265 (итал.)

Дополняется опубликованное автором (РЖМат, 1955, 2854) доказательство предложения: аналитические дважды линейчатые V_3, принадлежащие S_n, суть при $n > 10$ геометрические места ∞^1 квадрик S_3. Л. Л. Вербицкий

704. Об алгебраических поверхностях порядка $2n$, имеющих (по крайней мере) двойную конику в бесконечности (обобщенные квадрики). Розина (Sulle superficie algebriche di ordine $2n$ con und conica (almeno) doppia all'infinito (quadriche generalizzate). Rosina B. A.), Ann. Univ. Ferrara, 1953, Отд. 7, **2**, 141—149 (итал.)

Поверхность F^{2n}, заданная в декартовых координатах уравнением

$$\varphi^n + \varphi^{n-1} f_1 + (\text{члены порядка} \leqslant 2n-2) = 0,$$

где φ — квадратичная, а f_1 — линейная формы от координат, пересекает бесконечно удаленную плоскость по n-кратной конике; коника эта на поверхности будет по крайней мере двойной. Показывается, что диаметральные свойства поверхности в известной мере аналогичны тем же свойствам квадрики ($n = 1$). Диаметральная плоскость определяется (Piazzolla — Beloch, Atti IV congr. Unione mat. ital., 1951, **2**, Taormina, Perella, Roma, 1953, 425—430; Math. Revs, **15**, 249) как полярная плоскость бесконечно удаленной точки (место центров наборов пересечений поверхности семейством параллельных прямых) и главные диаметральные плоскости — как плоскости, перпендикулярные соответствующему семейству прямых; все диаметральные плоскости F^{2n} проходят через одну точку и в общем случае три из них, перпендикулярные друг другу, являются главными; если φ — произведение двух линейных множителей, то диаметральные плоскости все параллельны некоторой прямой и могут все проходить через нее, а две из них, перпендикулярные друг другу, являются главными; если φ — точный квадрат, то диаметральные плоскости все параллельны между собой и одна из них — главная; если $\varphi = kf_1^2$, то все они совпадают.

Так же, как и для квадрики, случаи эти связываются с «дискриминантным» детерминантом Δ порядка 4, состоящего из дискриминанта φ, окаймленного коэффициентами f_1, причем последнее место занимается постоянным членом уравнения. Этот член не входит ни в какие выкладки, зависящие в действительности только от первых трех рядов Δ и, хотя поверхность названа «собственной» или «специализированной», согласно тому, $\Delta \neq 0$ или $\Delta = 0$, но этой специализации не дается никакой геометрической характеристики.

P. Du Val

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 463.

705. О сингулярных абелевых функциях. Конфорто (Sulle funzioni abeliane singolari. Conforto Fabio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 6, 754—759 (итал.)

Рассматриваются действительные нулевые системы римановых матриц. Дается новое, более простое, доказательство, принадлежащее Скорца (Scorza, G., Mem. della Soc., Ital. delle Scienze, 1916, **19**, 139—183) необходимого и достаточного условия того, что индекс сингулярности рассматриваемой матрицы Римана имеет заданное значение. А. И. Узков

706. Об одномерной группе кручения алгебраического многообразия. Андреотти (Sopra il gruppo della torsione unidimensionale delle varietà algebriche. Andreotti Aldo), Univ. e Politecnico Torino. Rend. Sem. mat., 1953, **12**, 239—264 (итал.)

После некоторых предварительных замечаний, относящихся к фундаментальной группе алгебраического многообразия (M), автор доказывает следующую теорему. Пусть V_d — неособенное алгебраическое M с иррегулярностью q, $\theta_1(V_d)$ — его одномерная группа кручения и $\theta_1(W_d)$ — произвольная подгруппа группы $\theta_1(V_d)$. Тогда существует алгебраическое M W_d, пикарово M которого совпадает с пикаровым M для V_d, а одномерная группа кручения — с группой $\theta_1(W_d)$.

W_d несет инволюцию порядка, равного индексу $\theta_1(W_d)$ в $\theta_1(V_d)$; инволюция эта порождена абелевой группой бирациональных преобразований, изоморфной фактор-группе $\theta_1(V_d)/\theta_1(W_d)$ и рационально отображает W_d на V_d.

Затем автор переходит к вычислению группы кручения для некоторых специальных M (поверхность Энриквеса 6-го порядка, поверхность Куммера, M Виртингера). Далее он показывает, как построить M с заданными размерностью, иррегулярностью и группой кручения. Метод состоит в следующем: сначала строится регулярная поверхность с циклической группой кручения заданного порядка. Конструированием произведения нескольких таких поверхностей и пикарова M размерности q получается M U с заданной группой кручения и иррегулярностью q. Общее двумерное сечение U имеет ту же самую иррегулярность и группу кручения. Образуя его произведение с линейным пространством соответственно выбранной размерности, можно получить M любой заданной размерности с теми же иррегулярностью и группой кручения.

Работа завершается определением порядка группы кручения эллиптических поверхностей с эллиптической связкой кривых жанра три, недавно изученных Конфорто и Герарделли (Conforto, Gherardelli Ann. mat. pura ed appl., 1952, **33**, 273—351; Math. Revs, 14, 681).

J. A. Todd

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 739.

707. О группе кручения абелева многообразия ранга два. Герарделли (Sul gruppo della torsione delle varietà abeliano di rango due. Gherardelli Francesco), Univ. e Politecnico Torino. Rend. Sem mat., 1953, **12**, 293—300 (итал.)

Автор определяет группу абелева многообразия ранга два — образа инволюции, порожденной преобразованием $u \to -u$ многообразия Пикара. Если p — ранг ассоциированной матрицы Римана, то порядок этой группы равен 2^{2p+1}; исключение представляют: а) все дивизоры матрицы Римана равны 1; тогда порядок группы равен 2^{2p} и б) $\gamma\,(\gamma > 0)$ дивизоров равны 1, а остальные $p-\gamma$ равны двум; тогда порядок равен $2^{2p+1} - 2^{2(p-\gamma)}$.

J. A. Todd

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 738.

708. Замечания о дифференциальных формах первого рода на алгебраических многообразиях. Кавахара (Remarks on the differential forms of the first kind on algebraic varieties. Kawahara Yûsaku), Nagoya Math. J., 1953, **6**, October, 37—40 (англ.)

Дифференциальная форма ω, определенная на многообразии (M) U^n, называется формой первого рода, если она конечна в каждой простой точке любого M, бирационально эквивалентного U. Доказывается, что форма ω первого рода, если общее поле определения k для U и ω совершенно (или содержит совершенное подполе, являющееся полем определения для U) и форма $\omega(P)$ (где P — производящая точка U над k) первого рода. Для M в проективном пространстве доказывается предложение: ω первого рода, если U неособенное и форма ω', индуцированная ω в производящем гиперплоскостном сечении U, первого рода. Последний результат, как указывает автор, был получен ранее Кощуми.

В. В. Морозов

709. О кремоновых преобразованиях пространства, связанных с пучком поверхностей 6-го порядка. Дервидюэ (Sur des transformations crémoniennes de l'espace liées à un faisceau de surfaces du sixième ordre. Derwiduć L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, № 3—4, 143—147 (франц.)

Доказывается: 1) существуют кремоновы преобразования, оставляющие неизменными каждую поверхность пучка и допускающие любую из них в качестве фундаментальной поверхности, будет ли приводимой или неприводимой эллиптическая кривая T_9, имеющая четыре тройных точки и принадлежащая всем поверхностям пучка, 2) произведение двух таких преобразований с одной и той же фундаментальной поверхностью F_6 имеет пару присоединенных фундаментальных прямых второго рода. Кратко рассматривается для пучка $|F_6|$ геометрическое место шестерок прямых, принадлежащих каждой из поверхностей пучка.

С. С. Бюшгенс

710 К. Некоторые новые свойства кривых на алгебраической поверхности. Холле (Quelques propriétés nouvelles des courbes tracées sur une surface algébrique. Nollet L., Bruxelles, Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, Mémoires, tome 28, Fascicule 3, 1953, 40 p., № 16417, 40 francs), Nature, 172, № 4387, 1953, 1012 (франц.)

711 Д. Свойства алгебраических кривых и поверхностей в связи с обобщением теоремы Карно и теоремы, ей взаимной. Федорова Н. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск. ун-т, Ростов-на-Дону, 1955

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

712. О натуральном уравнении $R(s) = \mu a(\lambda + \cos s/a)$. Клеппер (Über die natürliche Gleichung $R(s) = \mu a(\lambda + \cos s/a)$. Klepper W.), Elem. Math., 1954, **9**, № 3, 56—63 (нем.)

Изучается поведение кривой L, заданной натуральным уравнением

$$R(s) = \mu a\left(\lambda + \cos\frac{s}{a}\right). \qquad (1)$$

Пусть $\alpha_1/2$ — угол между двумя последовательными нормалями в вершинах кривой L (точки относительного экстремума $R(s)$). Кривая L — замкнутая овальная линия, если $m\alpha_1 = 2\pi$ ($m > 1$, целое). Соотношение $\mu = m/\sqrt{\lambda^2 - 1}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы (1) было натуральным уравнением овальной линии. Эта овальная линия при $\lambda \to \infty$ вырождается в окружность, которая является единственной кривой постоянной ширины из рассматриваемого класса кривых. Если $m = \sigma/\tau$ — рациональное число ($m > 1$), то L — замкнутая самопересекающаяся кривая, причем число оборотов главной нормали L при полном ее обходе равно τ. В остальных случаях главная нормаль совершает бесконечно много оборотов. При $\lambda = 1$ уравнение (1) является уравнением двойной симметричной спирали с двумя асимптотическими точками.

Э. Г. Позняк

713. Об интегрировании уравнения Дарбу—Риккати в случае общей винтовой линии. Керавала (On the integration of the Darboux — Riccati equation for the general helix. Kerawala Sulaiman), Math. Student, 1954, **22**, № 3, 145—147 (англ.)

Указывается известный способ приведения уравнений Френе — Серре к уравнению Риккати и интегрирование последнего в случае общей винтовой линии.

М. В. Потоцкий

714. Кривые, порожденные двумя семействами плоских линий, зависящих от двух параметров. Лоран (Courbes engendrées par deux ensembles de lignes planes à deux paramètres. Lorent H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, № 6—7, 317—326 (франц.)

Заданы два семейства плоских линий, зависящих от параметров a и b. Рассматривается задача об определе-

нии геометрического места точек пересечения двух кривых различных семейств, соответствующих одним и тем же значениям параметров a и b.

Приводится решение задачи с подробным исследованием случаев, когда линии семейств заданы следующими уравнениями:

1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и $x^2/b^2 - y^2/a^2 = 0$;

2) $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ и $a^2x^2 - b^2y^2 = a^2b^2$;

3) $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$; и $a^2/x^2 + b^2/y^2 = 1$;

4) $a^2/x^2 + b^2/y^2 = \alpha$ и $a^2/x^2 - b^2/y^2 = \beta$.

В. П. Белоусова

715. О некоторых основных формулах интегральной геометрии (II). Дринфельд Г. И., Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, **40**, Зап. матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва, **23**, 61—71

В статье, кроме новых результатов, получены другим способом результаты того же автора (Зап. Харьковск. матем. о-ва, 1950, 22).

Группа преобразований в плоскости (x, y)

$$x' = a + x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y' = b + x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{G_2}$$

переводит прямую

$$ux + vy = 1 \tag{1}$$

в прямую

$$Ux + Vy = 1. \tag{2}$$

Группе G_2 соответствует группа преобразований в плоскости Плюккера (u, v)

$$U = \frac{u\cos\alpha + v\sin\alpha}{1 - au - bv}, \qquad V = \frac{v\cos\alpha - u\sin\alpha}{1 - au - bu}. \tag{$\overline{G}_2$}$$

Мера множества прямых (1), инвариантная относительно группы G_2, совпадает с мерой множества точек (u, v), инвариантной относительно группы $\overline{G}_2$.

Необходимое и достаточное условие инвариантности интеграла $\int M\,du\,dv$ относительно группы $\overline{G}_2$ приводит к системе уравнений $X_1(M) = 0$, $X_2(M) + 3uM = 0$, $X_3(M) + 3vM = 0$, где $X_1(f)$, $X_2(f)$ и $X_3(f)$ — инфинитезимальные операторы группы $\overline{G}_2$. Для меры множества прямых (1), инвариантной относительно группы G_2, получается известная формула Картана

$$\iint \frac{du\,dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}.$$

Аналогичными рассуждениями автор находит инвариантную относительно евклидовой группы движений G_3 в пространстве меру множества плоскостей $ux + vy + wz = 1$ и прямых $x = uz + \xi$, $y = v\cdot z + \eta$ соответственно в виде

$$\int \frac{du\,dv\,dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2} \quad \text{и} \quad \int \frac{du\,dv\,d\eta\,d\xi}{(1 + u^2 + v^2)^2}.$$

Кинематическую плотность в пространстве можно рассматривать как плотность множества точек N и пар (u, v), проходящих через них взаимно перпендикулярных прямых.

Обозначая координаты точки N через ξ, η, ζ и косинусы углов прямых u, v с осями соответственно через l, m, p; l_1, m_1, p_1, автор получает следующее выражение для кинематической плотности

$$\int \frac{dl\,dm\,dl_1}{\sqrt{1 - l^2 - m^2}} \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{\left|1 - l^2 - l_1^2\right|}}.$$

Эти результаты распространяются на двумерное и трехмерное гиперболические пространства.

И. Н. Григорьев

716. Новое доказательство теоремы Рибокура. Цыганков И. В., Уч. зап. Молотовск. ун-та, 1954, **8**, № 8, 47—48

Приводится доказательство теоремы Рибокура: средняя огибающая изотропной конгруэнции есть минимальная поверхность.

Коэффициенты первой квадратичной формы средней огибающей Σ сравниваются с линейным элементом сферического отображения этой поверхности.

В. П. Белоусова

717. Об одном характеристическом свойстве циклид Дюпена и поверхностей вращения. Шемин (Sur une propriété caractéristique des cyclides de Dupin et des surfaces de révolution. Şemin Ferruh), Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul., 1953, **A18**, № 3, 288—297

На действительной поверхности S трехмерного евклидова пространства рассматриваются кривые Дарбу — кривые, соприкасающиеся сферы которых в каждой их точке касаются поверхности.

Пусть P — регулярная неомбилическая точка поверхности S и C — геометрическое место центров кривизны кривых Дарбу, проходящих через P. Для того чтобы кривая C была сферической во всех регулярных неомбилических точках P поверхности S, необходимо и достаточно, чтобы поверхность S была либо циклидой Дюпена, в частности — тором, либо поверхностью вращения, отличающейся от поверхности второго порядка. В обоих указанных случаях на поверхности имеются кривые, для точек которых кривые C являются не сферическими, а плоскими. В случае циклид Дюпена (в частности — тора) кривая C является инверсом эллипса относительно единичной сферы с центром в соответствующей точке P. Ортогональная проекция этого эллипса на плоскость, касающуюся поверхности в точке P, является окружностью, проходящей через P. Для поверхности вращения, отличающейся от поверхности второго порядка, C является инверсом плоской кривой третьего порядка по отношению к той же сфере. Ортогональная проекция этой кривой на плоскость, касающуюся поверхности в точке P, есть циклическая кривая третьего порядка.

И наконец: в случае циклиды Дюпена без двойных точек или тора четыре центра окружностей, проходящих через точку P — двух кругов кривизны и двух кругов Вилярсо,— и точка P лежат на одной сфере. Четыре прямые, касательные к этим окружностям в точке P, образуют гармоническую четверку.

М. А. Акивис

718. Основные теоремы метрической геометрии жестких сетей: теоремы 1,2,3 и 4. Гонсалес-дель-Вальe (Los teoremas fundamentales de la geometria métrica de las redes rigidas: teoremas, 1°, 2°, 3° y 4°. González del Valle A.), Rev. Cálculo automát. y cibernét., 1954, **2**, № 6, 18—19; **3**, № 7, 14—17 (исп.; резюме англ.)

719. О существовании поверхности постоянной средней кривизны при наперед заданном контуре. Хейнц (Über die Existenz einer Fläche konstanter mitlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung. Heinz Erhard Rudolf Walter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 121 (нем.)

Тезисы доклада по работе того же названия (РЖМат, 1955, 1449).

720. Обобщенная эволюта в пространствах Клейна. Курита (Generalized evolute in Klein spaces. Kurita Minoru), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 3—4, 355—364 (англ.)

В пространстве Клейна с фундаментальной группой Ли G и ее замкнутой подгруппой H берётся фигура F — однопараметрическая совокупность точек однородного пространства G/H. К каждой точке этой фигуры присоединяют репер Френе. Пусть такой репер в точке $A \in F$ есть S_aR (R — основной репер, $S_a \in G$) и в соседней точке — $S_{a+da}R$. Преобразование S_t переводит эти реперы соответственно в S_aS_tR и $S_{a+da}S_tR$. Инфинитезимальное относительное смещение между S_aS_tR и $S_{a+da}S_tR$ дается посредством $(S_aS_t)^{-1} \times (S_{a+da}S_t) = S_t^{-1}(S_a^{-1}S_{a+da})S_t$. Пусть S_t зависит от параметра a, так что $S_t^{-1}(S_a^{-1}S_{a+da})S_t$ есть элемент некоторой подгруппы $\mathfrak{K}$ группы G для всех a ($\mathfrak{K}$, вообще говоря, не единственная). Элемент однородного пространства $G/\mathfrak{K}$, принадлежащий S_aS_tR, называется центральной фигурой. В каждой точке фигуры F определена центральная фигура; совокупность всех таких центральных фигур называется эволютой E фигуры F. Инфинитезимальное смещение репера S_aS_tR, присоединенного к E, дается посредством $(S_aS_t)^{-1}(S_{a+da}S_{t+dt}) = S_t^{-1}(S_a^{-1}S_{a+da}) \times S_tS_t^{-1}S_{t+dt}$. В случае кривых на евклидовой плоскости указанный процесс приводит к классическим теоремам об эволютах. Далее автор получает эволюты кривой линии и линейчатой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве и эволюты кривых на аффинной и проективной плоскостях. В заключение дано обобщение теоремы Эйлера—Савари (кривизна рулетты, описываемой точкой P, выражается через кривизну базы, кривизну катящейся кривой и полярные координаты точки P относительно репера Френе при точке касания) на случай любого пространства Клейна и показано применение этого обобщения к случаю кривых на аффинной плоскости и линейчатых поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. В. Т. Базылев

721. Проективно-дифференциальная геометрия пар плоских кривых. Чжун Тун-дэ (某種平面曲線對的射影微分幾何學. 鍾同德), 數學學報, (Шуюэ сюэбао), 1953, 2, № 3, 157—166 (кит., резюме англ.)

Проективно-дифференциальная геометрия некоторых пар плоских кривых изучалась Сюном (Hsiung C. C., Duke Math. J., 1943, 10, 539—546; Bull. Amer. Math. Soc., 1943, 49, 786—792). Цель настоящей заметки применить тот же метод к изучению проектно-дифференциальной геометрии пар плоских кривых в следующих случаях: 1) две кривые на плоскости, пересекающиеся в точке перегиба; 2) две кривые на плоскости, имеющие общую касательную в двух точках перегиба. В настоящей работе мы даем подробные исследования кривых в первом случае, в то время как теория кривых во втором случае легко получается из предыдущего. В первом случае получен проективный инвариант, определяемый окрестностью пятого порядка кривых в исследуемой точке; применяя соприкасающиеся кривые Бомпьяни (Bompiani, Boll. Unione mat. ital., 1926, 5, 118—120) к линиям в рассматриваемой точке, мы даём проективному инварианту простую геометрическую характеристику. Кроме того, подходящим ковариантным выбором единичной точки координатной системы, мы получили каноническое разложение в степенные ряды для кривых в рассматриваемой точке. В зависимости от того, обращается найденный инвариант в нуль или нет, мы имеем четыре различных типа. В разложениях каждого типа дается истолкование абсолютного инварианта в терминах некоторого сложного отношения.

Резюме автора.

722 К. Сочинения. Том II. Наложимость и проблема изгибания. Бианки (Opere. Vol. II. Applicabilità e problemi di deformazione. Bianchi Luigi, 337 p., Roma, Edizioni Gremonese della Casa Editrice Perrella, 1953, 3000 Lire), Math. Revs, 1954, 15, № 7, 591 (итал.)

723 Д. Дополнение p-сопряженных систем до полной системы n измерений в n-мерном пространстве. Бурмистрова В. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1955

724 Д. Метрическая теория пар T конгруэнций. Редозубова О. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1955

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

725. О некотором виде уравнений Голомба. Рубель Т. Г., Biul Wojsk. akad. techn. Prace mat., 1953, 2, № 6, 101—108

Для кривой, расположенной на поверхности v_2 в евклидовом пространстве R_3, справедливы уравнения Бонета — Ковалевского:

$$\frac{d\mathbf{t}_1}{ds} = \alpha\,\mathbf{t}_2 + \gamma\,\mathbf{t}_3,$$

$$\frac{d\mathbf{t}_2}{ds} = -\alpha\,\mathbf{t}_1 + \beta\,\mathbf{t}_3,$$

$$\frac{d\mathbf{t}_3}{ds} = -\gamma\,\mathbf{t}_1 + \beta\,\mathbf{t}_2,$$

где $\mathbf{t}_i$ ($i = 1, 2, 3$) — последовательно единичные векторы касательной к кривой, нормали к поверхности, нормали к плоскости ($\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$); α — геодезическая кривизна, γ — нормальная кривизна, β — геодезическое кручение кривой.

Эти уравнения были обобщены Голомбом для регулярной кривой, расположенной на регулярной гиперповерхности v_{n-1} в n-мерном римановом пространстве R_n и имели следующий вид:

$$D\mathbf{t}_1 = \sum_{\lambda=2}^{n-1} \alpha_\lambda \mathbf{t}_\lambda + \gamma\,\mathbf{t}_n,$$

$$D\mathbf{t}_\mu = -\alpha_\mu \mathbf{t}_1 + \beta_\mu \mathbf{t}_n, \quad \mu = 2, \ldots, n-1, \qquad (1)$$

$$D\mathbf{t}_n = -\gamma\,\mathbf{t}_1 - \sum_{\lambda=2}^{n-1} \beta_\lambda \mathbf{t}_\lambda,$$

где $\mathbf{t}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) образуют ортонормированную систему, $\alpha = \sum_{\lambda=2}^{n-1} \alpha_\lambda \mathbf{t}_\lambda$ — вектор геодезической кривизны, $\beta = \sum_{\lambda=2}^{n-1} \beta_\lambda \mathbf{t}_\lambda$ — вектор геодезического кручения, γ — нормальная кривизна.

В реферируемой работе доказано, что формулы Голомба (1) можно записать в однообразном виде: $D\mathbf{t}_i = [\mathbf{L}, \mathbf{t}_i]$ (скобки означают векторное произведение). Вектор $\mathbf{L}$ является линейной комбинацией простых n — 2-векторов, каждый из которых получен как векторное произведение (n — 2)-х векторов из $\mathbf{t}_i$. В n-мерном евклидовом пространстве производные векторы $D\mathbf{t}_i$ лежат в двумерной плоскости, когда: 1) векторы α и β одновременно исчезают, а $\gamma \neq 0$ или 2) α и β коллинеарны. Производные векторы лежат в четырехмерной плоскости, если α и β неколлинеарны. Г. Г. Бикматова

726. О существовании решений системы квадратных уравнений и ее геометрическом приложении. Оцуки (On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application. Otsuki Tominosuke), Proc. Japan Acad., 1953, 29, 99—100 (англ.)

Автор доказывает следующую теорему, высказанную референтом и Куипером (Kuiper N. H., Ann. Math., 1952, 56, № 2, 422—430):

Пусть $\psi_\alpha(x) \equiv \Sigma_{i,j} A_{\alpha ij} x^i x^j = 0$ есть система квадратных уравнений относительно x^i. Если

$$\sum_{i,j,h,k=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{N} (A_{\alpha ih} A_{\alpha jk} - A_{\alpha ik} A_{\alpha jh}) x^i y^j x^h y^k \leqslant 0$$

для любых x^i, y^j, система квадратных уравнений имеет нетривиальное вещественное решение $\{x^i\}$ при $N < h$. Эта теорема имеет следующее геометрическое значение.

Пусть M — компактное риманово многообразие, обладающее тем свойством, что в каждой его точке существует q-мерное линейное подпространство касательного пространства, вдоль плоских элементов которого кривизны сечений неположительны.

Тогда M нельзя изометрично вложить в евклидово пространство размерности $n + q - 1$. S. Chern

Перевод из Math. Revs. 1954, 15, № 7, 647.

727. Об изгибании касательных параболоидов гиперповерхностей евклидова пространства. Далла-Вольта (Sulle calotte deformabili di ipersuperficie in uno spazio euclideo. Dalla Volta Vittorio), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 313—316 (итал.)

Называя шапочкой (calotta) касательный параболоид к гиперповерхности, автор формулирует понятие:

Пусть дана шапочка σ порядка h, которая при соответствующем выборе системы ортогональных декартовых координат может быть представлена уравнением

$$z = \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{j!} \varphi_j(x^1, \ldots, x^n) + [h+1],$$

где φ_j — формы порядка j, $[h+1]$ — члены высшего порядка, чем h. По определению, шапочка σ допускает изгибание порядка $l \geqslant h$, если существует другая шапочка σ' порядка $h' \geqslant l$ такая, что σ и σ' изометричны порядка l, т. е. по крайней мере с точностью до членов порядка $(l-1)$ включительно.

Автор рассматривает случаи $l \leqslant 5$, устанавливая при этом, что получаемые признаки изгибаемых шапочек носят проективный характер, так что, если данная шапочка изгибаема, то изгибаема также всякая шапочка, получаемая из данной проективным преобразованием.

Формулируются следующие результаты:

1. Всякая шапочка допускает изгибание порядка 1, 2.

2. Шапочка порядка 2 допускает изгибание порядка 3 тогда и только тогда, когда асимптотический конус в центре шапочки распадается на пару плоскостей S_{n-1}.

Кроме того, такие шапочки изометричны тогда и только тогда, когда произведения двух радиусов главных кривизн в центре шапочек равны между собой.

Результаты автора, относящиеся к шапочкам 4-го порядка, носят более сложный характер. Н. Н. Яненко

728. О формулах Дини и Леви-Чивита для геодезических отображений. Цянь Дуань-чжуан (論測地映像的笛尼及列維齊維塔公式. 錢端壯), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 2, № 3, 144—156 (кит.; резюме нем.)

В этой работе доказаны следующие теоремы:

1. Если между двумя поверхностями установлено отображение, которое отображает оба семейства изотропных линий первой поверхности на два семейства комплексных геодезических линий второй поверхности, и одновременно оба семейства изотропных линий второй поверхности отображает на два семейства комплексных геодезических линий первой поверхности, то отображение является геодезическим. Фундаментальные формы обеих поверхностей допускают приведение к классической формуле Дини.

2. Пусть два римановых пространства имеют общую ортогональную систему отнесения и установлено отображение обоих пространств друг на друга, которое отображает некоторую систему 2^{n-1} изотропных конгруэнций кривых первого пространства на 2^{n-1} комплексных геодезических конгруэнций нормалей второго пространства, и одновременно некоторую систему 2^{n-1} изотропных конгруэнций кривых второго пространства отображает на 2^{n-1} комплексных геодезических конгруэнций нормалей первого пространства. Тогда отображение является геодезическим. Фундаментальные тензоры обоих пространств допускают приведение к классической формуле Леви — Чивита. Резюме автора.

729. Замечание к проблеме эквивалентности для аффинного и метрического пространств. Сунь Цзэ-ин (關於遠交及度量聯絡空間之同質性應問題. 孫澤瀛), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 2, № 3, 133—138 (кит.; резюме англ.)

Аналитическое доказательство эквивалентности двух аффинных пространств и двух метрических пространств в терминах их тензоров кривизны было дано в предыдущей статье (Journ. Chinese Math. Soc., 1, № 4) с использованием известных теорем из теории дифференциальных уравнений смешанных систем. В настоящей заметке мы дали доказательство той же теоремы без приложения отмеченных выше теорем, вместо которых используются некоторые тождества между тензором кривизны и его ковариантными производными. Резюме автора.

730. О пространствах V_4, обладающих стационарной группой G_4. Вранчану (Sur les espaces V_4 ayant comme groupe de stabilité un G_4. Vranceanu G.), Publs mathematical, 1953, 3, № 1—2, 24—32 (франц.)

Показывается, что стационарная подгруппа G_4 относительно точки $O(x^1 = x^2 = x^3 = x^4 = 0)$ групп движений G_8 (они необходимо транзитивны) риманова пространства V_4 $(ds^2 > 0)$ может быть определена следующими операторами:

$$X_{12},\ X_{34},\ X_{13} + X_{24},\ X_{14} - X_{23}, \qquad (1)$$

где $X_{ij} = x^i (\partial f / \partial x^j) - x^j (\partial f / \partial x^i)$. Входя операторы сдвигов (операторы нулевого порядка), автор определяет на основании групповых свойств операторов структуру искомых групп движений G_8, причем коммутаторы операторов сдвигов (при специальном выборе последних) разлагаются только по операторам (1), коммутаторы операторов сдвигов с операторами стационарной подгруппы разлагаются только по операторам сдвигов.

Определенные по теореме Картана этой структурой группы G_8 пространства V_4 являются единственными пространствами, обладающими группой движений G_8, и совпадают с симметрическими пространствами, которые были рассмотрены автором (Studii şi cercetări mat., 1951, 2, 57). И. П. Егоров

731. О римановых пространствах, допускающих инфинитезимальное конформное преобразование. Фрис (Über Riemannsche Räume, die infinitesimale konforme Transformationen gestatten. Vries Hans Ludwig), Math. Z., 1954, 60, № 3, 328—347 (нем.)

Пригодится к каноническому виду метрика риманова (собственно римановa или псевдориманова) пространства V_n, допускающего инфинитезимальное конформное преобразование (k-преобразование) для неизотроп-

ного и изотропного векторного поля ξ^i, порождающего k-преобразование. Выясняется дальнейшее упрощение вида линейного элемента в случае, если траектории k-преобразования образуют конгруэнцию геодезических (gk-преобразование) или нормальную конгруэнцию. Далее решается задача получения канонического вида линейного элемента риманова пространства V_n, допускающего r независимых gk-преобразований $(1 \leqslant r \leqslant n)$. И. П. Егоров

732. Применение исследования аффинных преобразований к теории однородных римановых пространств. Номидзу (Application de l'étude des transformations affines aux espaces homogènes riemanniens. Nomizu Katsumi), Cr. r. Acad. sci., 1953, 237, № 22, 1386—1387 (франц.)

Рассматривается в целом однородное риманово пространство V со знакоположительной метрикой. Группа его движений G предполагается связной и транзитивной группой Ли; группа изотропии (стационарная группа) $H \subset G$ компактна (и, вообще говоря, не связна).

Утверждается, что если группа изотропии H, действующая в касательном пространстве данной точки, неприводима, то V или локально-эвклидово, или неприводимо (риманово пространство называется приводимым, если приводима его группа, голономии).

Далее, если G проста, то V неприводимо (и не локально-евклидово), и всякая форма в V с нулевой ковариантной производной инвариантна относительно G. П. К. Рашевский

733. Классификация пространств P_2 с проективной связностью. Петреску (Clasificarea spațiilor P_2 cu conexiune proiectivă. Petrescu Șt.), Bul. ştiinţ. Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 4, 485—491 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматриваются двумерные пространства проективной связности P_2, отнесенные к системе координат: $ds^a = \lambda^a_i(x^1, x^2)\,dx^i$, $ds^0 = dx^0 + \lambda^0_i(x^1, x^2)\,dx^i$ $(a,b,i,j = 1,2)$.

Проводится классификация пространств P_2 с отличной от нуля кривизной по группам сохраняющих связность проективных преобразований:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^a &= c^a_b(x^1, x^2)\,ds^b, \\ d\bar{s}^0 &= ds^0 + c^0_b(x^1, x^2)\,ds^b \end{aligned} \qquad (1)$$

(случай P_2 с кручением, но без кривизны рассмотрен автором ранее (studii şi cercetări mat., 1952, № 3—4, 529—558)). При отвлечении от общего случая, когда группа (1) является тождественной, получаются следующие пространства P_2 (выписываются только ненулевые коэффициенты проективной связности):

1. Аффинное кручение $t^a_{bc} \neq 0$: a) $\Gamma^2_{12} = 1$, $\Gamma^2_{11} = (\mu - \rho)x^2$, $\Gamma^0_{11} = \mu$, b) $\Gamma^1_{11} = 4x^2$, $\Gamma^2_{11} = (\mu' + \rho)x^2$, $\Gamma^2_{12} = \mu + 2x^2 - 1$, $\Gamma^2_{21} = \mu + 2x^2$, $\Gamma^0_{11} = \lambda - 12(x^2)^3$, $\Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = 1$.

Если входящие сюда функции $\mu(x^1)$, $\rho(x^1)$, $\lambda(x^1)$ суть константы, то указанные P_2 допускают группу движений (автоморфизмов), зависящую от 4, соответственно от 3, параметров, в противном случае — группу с 3, соответственно 2, параметрами.

2. $t^a_{bc} = 0$, но проективное кручение $t^0_{12} \neq 0$:

a) $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -x^1$, $\Gamma^1_{22} = 1$, $\Gamma^2_{22} = -2x^1$, $\Gamma^0_{21} = -1$, $\Gamma^0_{22} = (x^1)^2$,

b) $\Gamma^0_{12} = 1$,

c) $\Gamma^1_{11} = \frac{1}{A}(1 - 2B)\,e^{2Ax^2}$, $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -A$,

$$\Gamma^2_{11} = \frac{\sigma - 1}{4A}\,e^{4Ax^2}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2A}(1 - 2B)\,e^{2Ax^2},$$

$$\Gamma^2_{22} = -A, \quad \Gamma^0_{11} = e^{4Ax^2}\left[1 + \left(\frac{2B-1}{4A}\right)^2\right],$$

$$\Gamma^0_{12} = -\Gamma^0_{21} = \frac{1}{2}\,e^{2Ax^2}.$$

A, B — постоянные, $\sigma = \sigma(x^1)$.

Эти пространства допускают группу автоморфизмов, зависящую от 5 (в первом случае) и от 3 параметров.

3. Кручение нулевое:

a) $\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -A$, $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{2A}\,e^{4Ax^2}\left(\varepsilon - \frac{2}{3}\sigma\right)$,

$$\Gamma^2_{22} = -A, \quad \Gamma^0_{11} = \frac{1}{2A}\,\sigma e^{4Ax^2}, \quad \Gamma^0_{12} = \Gamma^0_{21} = \frac{1}{6}\,e^{2Ax^2},$$

b) $\Gamma^2_{11} = \left(\frac{5}{6}\varepsilon - \frac{2}{3}\sigma\right)e^{4x^2}$, $\Gamma^2_{22} = \frac{1}{2}$, $\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2}\,\sigma e^{4x^2}$,

c) $\Gamma^2_{11} = (1 - \sigma)x^2$, $\Gamma^0_{11} = \sigma$,

$A = \text{const}$, $\sigma = \sigma(x^1)$, $\varepsilon = \pm 1$.

Если $\sigma = \text{const}$, то указанные пространства допускают группу движений с 3 (в первых двух случаях) и 4 параметрами. Г. И. Кручкович

734. Обобщенные инвариантные дифференциальные формы на многообразиях с общей связанностью. Сасаяма (On the generalized invariant differential form on manifolds with general connection. Sasayama Hiroyoshi), Tôhoku Math. J., 1953, 5, № 2, 122—127 (англ.)

Известные теоремы Картана об инвариантных дифференциальных формах переносятся на случай многообразий с координатами в банаховом пространстве, в которых введена общая связанность с данной группой преобразований. М. М. Постников

735. Об однородных келеровых многообразиях. Лихнерович (Sur les espaces homogènes kähleriens. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 14, 695—697 (франц.)

Так называются однородные пространства с группой G и стационарной подгруппой H, допускающие инвариантную относительно группы келерову метрику.

Теорема 1. Если G имеет недискретный центр, однородное келерово пространство (ОКП) есть риманово и топологическое произведение двух пространств, одно из которых локально-унитарно (имеет нулевую кривизну).

Теорема 2. Если ОКП не локально унитарно, а группа G компактна, его связная группа изотропии имеет недискретный центр. Идея доказательства: предположение, что группа изотропии принадлежит $SU(n)$, приводит к равенству нулю тензора Риччи. Известно, что для однородных компактных пространств это равносильно обращению в нуль тензора кривизны. Подгруппа группы $U(n)$, не содержащаяся в $SU(n)$, имеет недискретный центр. Теорема 1 сводит изучение ОКП с компактной G к случаю полупростой G со связной H. При этих предположениях имеет место

Теорема 3. H есть связная компонента единицы своего централизатора в G. В частности, H — подгруппа максимального ранга.

Теорема 4. Всякое ОКП со связной H, компактной G, есть топологическое и риманово произведение таких же пространств с простыми G.

Детальные доказательства будут опубликованы автором позднее. А. М. Васильев

736. Продолжения дифференцируемого многообразия. Эресман (Les prolongements d'une variété différentiable. Ehresmann Charles), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 317—325 (франц.)

Это сообщение является введением в дифференциальную геометрию, изучающую проблемы локального характера и в целом. Фундаментальным элементом дифференциальной геометрии берется инфинитезимальная струя порядка r. Вводится понятие продолжений дифференцируемого многообразия, т. е. пространств некоторых инфинитезимальных элементов, присоединенных к дифференцируемому многообразию. Понятие продолжений приводит к общей теории псевдогрупп Ли.

Атласом A топологического пространства E на E' называется совокупность взаимно однозначных наложений f областей $U \subset E$ на части E', цели которых $f(U)$ покрывают E'. К $f_i \in A$, $f_j \in A$ присоединяется φ_{ji} такое, что $f_i(x) = f_j(x')$ эквивалентно $x' = \varphi_{ji}(x)$. Атлас называется согласованным с псевдогруппой Γ, если все $\varphi_{ji} \in \Gamma$.

Атлас числового пространства R^n, на V_n, согласованный с псевдогруппой Λ_n^r всех гомеоморфизмов r раз непрерывно дифференцируемых областей R^n на области R^n всюду ранга n, определяет на V_n структуру r-многообразия.

Пусть V_n и V_m — два r-многообразия. Наложение f окрестности точки $x \in V_n$ в V_m называется r-наложением в x, если с помощью допустимых локальных координат в окрестности x и соответственно $f(x)$ оно выражается функциями $\overline{f}_i$, имеющими в окрестности x непрерывные частные производные каждого вида до порядка r.

Пусть f и f' — два r-наложения в x, элементы (f, x) и (f', x) называются одного r-класса, когда $f(x) = f'(x)$ и функции $\overline{f}_i$ и $\overline{f}'_i$ имеют в x равные частные производные каждого вида до порядка r. Совокупность (f, x) одного r-класса называется инфинитезимальной r-струей с началом x и целью $f(x)$. Обозначения: $C_x^r(V_n, V_m)$ — совокупность (f, x), где f — r-наложение в x окрестности $x \in V_n$ в V_m; $j_x^r f$ — струя, определенная (f, x). Элементы $(f, x) \in C_x^r(V_n, V_m)$ и $(g, f(x)) \in C^r f(x)(V_m, V_p)$ допускают композицию $(gf, x) \in C_x^r(V_n, V_p)$, где V_p — третье r-многообразие. Отсюда закон композиции $j_x^r(gf) = (j_{f(x)}^r g)(j_x^r f) = g(j_x^r f) = (j_{f(x)}^r g)(f, x)$. Струя, изотропная в $x \in V_n$ — струя с началом и целью x ранга n, обычного ранга в x элемента струи. L_n^r обозначает группу, составленную r-струями, изотропными в $O \in R^n$. $H^r(V_n)$ — совокупность r-струй с началом $O \in R^n$ и целью в V_n ранга n — называется главным продолжением порядка rV_n.

Атлас AR^n на V_n, определяющий структуру r-многообразия на V_n, допускает продолжение, составляющее аглас $A'R^n \times L_n^r$ на $H^r(V_n) : (x, s) \to h_x s$, где $x \in R^n$, $s \in L_n^r$, $h_x = g j_0^r(t_x^{-1})$, $g \in A$, t_x — перенос в R^n, переводящий x в 0.

Пусть L_n^r — группа операторов пространства F и пусть на E определена структура символа $E(V_n, F, L_n^r, H^r(V_n))$.

Такая структура определяется атласом $\overline{A}R^n \times F$ на E, согласованным с псевдогруппой преобразований: $(x, y) \to (\varphi(x), s_x y)$, где $x \in R^n$, $y \in F$, $\varphi(x) \in \Lambda_n^r$, $s_x \in L_n^r$.

Атласу A' соответствует атлас $A'' R^n \times F$ на E (совокупность наложений атласа $\overline{A}$, определенных струями h_x), который согласован с псевдогруппой преобразований: $(x, y) \to (\varphi(x), \varphi_x^r y)$, где $\varphi_x^r = j_0^r(t_{x'} \varphi t_x^{-1}) \in L_n^r$, $x' = \varphi(x)$.

Атлас A'' определяет на E структуру продолжения порядка rV_n. Эта структура подчинена структуре символа $E(V_n, F, L_n^r, H^r(V_n))$, так как атлас A согласован с подпсевдогруппой псевдогруппы преобразований $(x, y) \to (\varphi(x), S_x y)$.

Например, $I^r(V_n, V_m)$ (совокупность r-струй из V_n в V_m) допускает 3 расслоенные структуры, определяющие $I^r(V_n, V_m)$ как продолжение порядка r соответственно V_n, V_m и $V_n \times V_m$. Н. Б. Шенфельд

737. Псевдокелерова геометрия. II. Гуггенхеймер (Geometria pseudo-kählériana. Nota II. Guggenheimer Heinrich), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 5, 271—274 (итал.)

Первая статья опубликована там же (РЖМат, 1953, 1384). Пусть C — основной линейный оператор псевдокомплексного многообразия ($C^2 = -E$). Для любого целого k существуют операторы C_k такие, что $C_k^k = C$ (верхний значок — показатель степени). Например, оператор

$$\sin\frac{\pi}{2k} C + \cos\frac{\pi}{2k} E. \qquad (1)$$

Наряду с оператором $\overline{d} = CdC$ (d — символ внешнего дифференцирования), вводятся операторы $d_k^l = C_k^{2k-l} d C_k^l$, а с их помощью еще целый ряд линейных и дифференциальных операторов, обобщающих введенные ранее при помощи оператора $\overline{d}$. Обобщаются и соотношения между этими операциями. Доказывается, что из выполнения соотношения $dd_k^l + d_k^l d = 0$ всегда следует выполнение $d\overline{d} + \overline{d}d = 0$. Для операторов (1) верно и обратное. А. М. Васильев

738. О проективном соответствии двух псевдоэрмитовых пространств. Яно (Sur la correspondance projective entre deux espaces pseudo-hermitiens. Yano Kentaro), C. r. Acad. sci., 1954, 239, № 21, 1346—1348 (франц.)

Находится условие проективного соответствия (соответствия, при котором геодезические линии соответствуют друг другу), двух псевдоэрмитовых пространств при различных видах определяемой ими аффинной связности. Б. А. Розенфельд

739. О группах автоморфизмов некоторых келеровых многообразий. Лихнерович (Sur les groupes d'automorphismes de certaines variétés kähleriennes. Lichnerowicz André), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 21, 1344—1346 (франц.)

Доказывается, что если V_{2n} — келерово многообразие (РЖМат, 1955, 5282) с ненулевым тензором Риччи $\|R_{ij}\| \neq 0$, то максимальная связная группа изометрических преобразований этого пространства сохраняет его аналитическую структуру, а если E_{2n} — компактное келерово многообразие, являющееся пространством Эйнштейна (его тензор Риччи R_{ij} и метрический тензор g_{ij} связаны соотношением $2R_{ij} = \lambda_0 g_{ij}$), то алгебра Ли группы автоморфизмов этого пространства является

алгеброй, определенной в пространстве решений уравнения $\Delta\varphi = \lambda_0\varphi$ на этом пространстве.

Б. А. Розенфельд

740. О полных пространствах из алгебраических систем пространств. Капуто (Sugli spazi totali dei sistemi algebrici di spazi. Caputo Michele), Ann. Univ. Ferrara, 1953, Отд. 7, **2**, № 45—52 (итал.)

Подсчитывается размерность системы полных пространств размерности t, принадлежащих к системе h-пространств в S_r, определенной путем приравнивания нулю m общих форм в грассмановых координатах. Метод основан на принципе подсчета постоянных, причем рассуждение зависит от некоторого числа утверждений о полноте линейных систем, неясных рецензенту.

W. V. D. Hodge

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 7, 645.

741. Обобщенные аффинные пространства и относительные структурные свойства. Пермутти (Spazi affini generalizzati e relative proprietà reticolari. Permutti Rodolfo), Ricerche mat., 1953, **2**, 192—203 (1954) (итал.)

Обобщенное аффинное пространство S^* получается из проективного пространства S конечной размерности n тем же самым способом, что и обычное аффинное пространство, за тем исключением, что здесь выделяется не «бесконечно удаленная гиперплоскость», а теоретико-множественное объединение множества подпространств S_i, на размерность которых не наложено никаких ограничений, кроме того, что оставшееся множество S^* должно содержать n независимых точек. Находится, что в S^* имеют место многие свойства обычных аффинных пространств. Подпространства пространства S^* необходимо образуют полудедекиндову сверхструктуру с относительными дополнениями (т. е. матроидную структуру), длина которой равна размерности n пространства S^*. Для $n = 3$ (точкам приписывается размерность 1) эти условия также и достаточны для того, чтобы структура была структурой подпространств обобщенной аффинной плоскости, которая в сущности может быть построена из точек структуры. Обычная аффинная плоскость характеризуется добавлением постулата параллельности.

P. M. Whitman

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 735.

742. Обобщения тензорного исчисления и их приложения. Кавагучи (Generalizzazioni del calcolo tensoriale e delle sue applicazioni. Kawaguchi Akitsugu), Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 5, 255—261 (итал.)

Обзор обобщений тензорного исчисления — исчисления экстензоров, построенного Крэгом (Graig H.V., Amer. J. math., 1937, 59), автором (J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1940, **9**, 1), сыном автора (Kawaguchi M., Tensor, нов. сер., 1952, **2**; 1953, **3**) и др., исчисления P-тензоров, построенного Хомбу и Сугури (Hombu H., Suguri T., Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., 1941, A2), исчисления P-экстензоров, построенного автором (J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 1941, **10**, 1), исчисления R-экстензоров, являющегося дальнейшим обобщением исчисления P-экстензоров, а также приложений этих исчислений к теории дифференциальных уравнений с частными производными и к геометрии пространств аффинной связности.

Б. А. Розенфельд

743. Об истинном значении принципа инвариантности в современной физике. Гомеш (O verdadeiro sentido do princípio da invariância da física moderna. Gomes Ruy Luís), Gaz. mat., 1953, **14**, № 55, 1—3 (порт.)

В статье находит отклик происходящая в последние годы в физике дискуссия о так называемом принципе общековариантности в общей теории относительности. Автор примыкает к точке зрения Фока. (Некоторые приложения идей неевклидовой геометрии Лобачевского в физике, М., Гостехиздат, 1950, 69).

Обозначая группу галилеевых преобразований через G, группу лоренцовых преобразований через L и группу $x^\alpha = \varphi^\alpha(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)$, где φ^α — дважды непрерывно дифференцируемые функции, через T, автор отмечает, что основные уравнения механики Галилея—Ньютона инвариантны относительно группы G, для специальной теории относительности допустимой группой будет L и в общей теории относительности — группа T. Инвариантность уравнений понимается здесь в смысле сохранения их формы. Если к некоторой из этих механик применить преобразования группы, соответствующей другой механике, то основные уравнения перейдут в эквивалентные, но другой формы, а новая система координат не будет допускать естественного физического истолкования.

Отсюда вывод: принцип инвариантности означает лишь эквивалентность различных систем координат, допускаемых группой T в смысле тождественности математического описания и не содержит ничего специфически характерного для общей теории относительности.

А. З. Петров

744. Необходимая единая теория поля как неголономная параболическая геометрия Ли в трехмерном декартовом пространстве и связанная с ней квантовая механика. Такасу (A necessary unitary field theory as a non-golonomic parabolic Lie geometry realized in the three-dimensional Cartesian space and its quantum mechanics. Takasu Tsurusaburo), Yokohama Math. J., 1953, **1**, № 2, 263—273 (англ.)

Строится разновидность единой теории поля на основе построенной автором неголономной параболической геометрии Ли, являющейся обобщением «высшей геометрии сфер Ли» (Клейн Ф., Высшая геометрия, М.— Л., ОНТИ, 1939, 109); группа преобразований сфер Ли трехмерного евклидова («декартова») пространства изоморфна группе движений 5-мерного неевклидова пространства индекса 2 (при этом сферы изображаются точками абсолюта, а касающиеся сферы — точками одной прямолинейной образующей абсолюта); введенная Такасу «параболическая геометрия Ли», являющаяся предельным случаем геометрии Ли, определяется группой преобразований, изоморфной группе движений 5-мерного псевдоевклидова пространства, а «неголономная параболическая геометрия Ли» является геометрией однородной связности, соответствующей «параболической геометрии Ли».

Б. А. Розенфельд

745 Д. О гиперкомплексе прямых в четырехмерном проективном пространстве. Гринцевичюс К. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

746. Однозначная определенность полных открытых поверхностей с положительной кривизной. Гротемейер (Kongruenzsätze für isometrische, offene vollständige Flächen Positiver Krümmung. Grotemeyer Karl Peter), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 223—224 (нем.)

Содержится без доказательства утверждение: однозначная определенность бесконечных трижды непрерывно дифференцируемых выпуклых поверхностей с полной кривизной 2π может быть установлена с помощью интегральной формулы Герглотца для изометричных поверхностей.

Автору, повидимому, неизвестно, что именно таким образом этот вопрос был решен референтом ранее. (РЖМат., 1954, 4177)

А. В. Погорелов

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

747. Элементарное доказательство теоремы о невозможности отображения с сохранением длин куска сферической поверхности на плоскость. Крейсиг (Ein elementarer Beweis des Satzes, daß sich kein Teil der Kugeloberfläche längentreu in die Ebene abbilden läßt. Kreyszig Erwin), Math.-phys. Semesterber., 1954, 4, № 1/2, 101—105 (нем.)

748. Решение проблемы Банга о покрытии. Ли Цзэ-чжи, Линь Чжэнь-шэн, Дун Гуан-чан, Чжан Мин-юн (管楝氏漸子問題. 厲則治, 林振聲, 董光昌, 張鳴鏞), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1955, 2, № 3, 139—143 (кит.; резюме англ.)

Решая проблему о покрытии, Банг в конце своей статьи (Bang T. Proc. Amer. Math. Soc., 1951, 2, 990—993) отметил, что следующая более глубокая проблема все еще не решена: Будет ли сумма относительных ширин полос всегда больше или равна 1, когда выпуклое тело в n-мерном евклидовом пространстве целиком покрыто этими полосами? При этом полосой ширины h мы называем часть пространства, расположенную между двумя параллельными гиперплоскостями, расстояние между которыми равно h, а относительной шириной полосы — отношение этой ширины к ширине в том же направлении покрываемого выпуклого тела. Мы даем здесь утвердительный ответ на этот вопрос.

Резюме автора.

749. Пример проективной плоскости с конечным числом элементов, в которой некоторые, но не все, четырехвершинники имеют коллинеарные диагональные точки. Ленц (Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalpunkte haben. Lenz H.), Arch. Math., 1953, 4, № 4, 327—330 (нем.)

В поле Галуа GF_{16} из 16 элементов (которое можно считать порожденным первообразным корнем α 15-й степени из единицы), удерживая обычным образом определяемое сложение, введем второе действие, определяемое правилами: $0 \circ a = a \circ 0 = 0$, $\alpha^r \circ \alpha^t = \alpha^{r+t}$, если $r \not\equiv 2 \pmod 3$, и $\alpha^r \circ \alpha^t = \alpha^{r+4t}$, если $r \equiv 2 \pmod 3$. Так называемая декартова группа $\mathfrak{G}$, определенная полем GF_{16} с упомянутым законом умножения, приводит к недезарговой аффинной плоскости π, содержащей четырехвершинники с коллинеарными диагональными точками. В частности, в этой плоскости всякий параллелограмм имеет коллинеарные диагональные точки. Однако не все четырехугольники таковы. Примем за α примитивный корень 15-й степени из единицы, удовлетворяющий уравнению (по модулю 2) $x^4 + x + 1 = 0$. Рассмотрим четырехвершинник $O(0, 0)$, $A(\alpha^2, 0)$, $B(\alpha^5, 1)$, $C(0, 1)$. Можно показать, что $OB \times AC \equiv P(\alpha^6, \alpha^4)$ и $OC \times AB \equiv D(0, \alpha)$. Так как P и D имеют различные ординаты, то они неколлинеарны с третьей (несобственной) диагональной точкой $OA \times BC$.

Н. М. Бескин

750 К. Размещения в плоскости, на сфере и в пространстве. Фейеш-Тот (Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Fejes Tóth L. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band 65, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1953, X + 197 S, DM 24.00; bound DM 27.00.) (нем.)

Излагаются современные работы, выполненные Хадвигером, Ван дер-Варденом, автором и др., по задачам наибольшего заполнения и наименьшего покрытия в плоскости, на сфере и в пространстве и по многим другим экстремальным задачам. Рассматриваются односвязные области в пространстве двух или трех измерений.

Гл. I содержит доказательства геометрических теорем, используемых в дальнейших частях работы и представляющих самостоятельный интерес. Даются прямое и косвенное доказательства следующей теоремы. Пусть r и R — внутренний и внешний радиусы выпуклого n-угольника площади F и периметра L. Тогда

$$nr^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leqslant F \leqslant \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{2\pi}{n};$$

$$2nr \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \leqslant L \leqslant 2nR \sin \frac{\pi}{n},$$

где равенство во всех четырех случаях имеет место только для правильного многоугольника. Таким образом среди всех выпуклых n-угольников, вписанных в данную окружность (описанных около нее), правильный n-угольник имеет наибольшие (наименьшие) площадь и периметр. Доказываются различные интересные неравенства, относящиеся к треугольникам. Например, если R_1, R_2, R_3 — расстояния от произвольной точки O до трех вершин треугольника, площади Δ, то $R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2 \cdot 3^{1/4} \Delta^{1/2}$, где равенство имеется только, если треугольник равносторонний и O — его центр. Краткое рассмотрение правильных и архимедовых многогранников (включающее доказательство формулы Эйлера) сопровождается четкими изображениями этих тел.

В гл. II рассматривается задача аппроксимации выпуклых областей вписанными и описанными многоугольниками. Пусть T будет выпуклая область (ее площадь), а T_n — вписанный n-угольник наибольшей площади. Показывается, что $T_n \geqslant T \frac{n}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{n}$, где равенство имеется только, если T — эллипс. Таким образом аппроксимация площади выпуклой области вписанными многоугольниками будет наихудшей, когда область является эллипсом. Соответствующая задача для описанных многоугольников не решена. Однако для больших n показано, что экстремальная кривая приближается к окружности. (В оригинале «external curve», повидимому, опечатка вместо «extremal curve». Так как задача о площади аффинная, то неясно, почему говорится об окружности, а не об эллипсе. *Прим. перев.*)

Аналогичная задача аппроксимации границы выпуклой области вписанными (описанными) многоугольниками не решена, но доказано следующее неравенство. Для любой выпуклой области существуют вписанный и описанный многоугольники периметров L_n и l_n таких, что $(L_n - l_n)/L_n \leqslant 2 \sin^2 \pi/2n$. Гл. II содержит также изложение понятия аффинной длины дуги кривой по Бляшке.

Пусть счетное множество единичных кругов размещено на плоскости (т. е. расположено без перекрытий). Пусть $N(R)$ — число этих кругов, целиком помещающихся в большом круге радиуса R с центром в O. Плотность заполнения d определяется как $d = \lim\limits_{R \to \infty} N(R) \cdot \pi / \pi R^2 = \lim\limits_{R \to \infty} (N(R)/R^2$. Если круги расположены так, что они покрывают плоскость (т. е. так, что каждая точка плоскости помещается внутри или на границе по крайней мере одного круга), то указанный предел определяет плотность D покрытия. Гл. III содержит доказательства того, что $d \leqslant \pi/\sqrt{12} = 0{,}9069\ldots$, $D \geqslant 2\pi/\sqrt{27} = 1{,}209\ldots$ В обоих случаях равенство получается лишь, если центры кругов (в оригинале сказано «сфер». *Прим. перев.*) являются вершинами решетки, образованной равносторонними треугольниками.

Рассматривается задача наилучшего покрытия конечной выпуклой области и показывается, что если T —

выпуклая область (ее площадь) с границей L, то $\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}T+\frac{2}{\pi\sqrt{3}}L+1\right]$ единичных кругов достаточно для покрытия области. Выводится аналогичная формула для наибольшего числа единичных кругов, которые могут быть помещены в выпуклую область.

Устанавливаются неравенства для границ плотности заполнения кругами n различных радиусов. Также рассматривается более общая задача помещения конгруэнтных выпуклых областей в большую выпуклую область. Следующее неравенство кажется особенно интересным. Если n конгруэнтных выпуклых областей G помещено в выпуклый шестиугольник площади S, то $n \leqslant S/s$, где s — площадь наименьшего шестиугольника, описанного около G.

Пусть P будет фундаментальным параллелограммом (его площадью) решетки, порожденной группой переносов. Если области, полученные приложением этих переносов к области (с площадью) G, не перекрываются, то плотность такого заполнения решеткой (lattice packing) равна G/P. Если области, расположенные указанным образом, покрывают плоскость, то это отношение определяет плотность покрытия решеткой (lattice covering). Пусть $d(G)$ и $D(G)$ будут плотности плотнейшего заполнения решеткой G и минимального покрытия решеткой G. В гл. IV рассматривается задача отыскания границ этих плотностей. Показывается, что если G выпукла, то $d(G) \geqslant 2/3$, $D(G) \leqslant 3/2$, где равенство в обоих случаях имеется только, когда G — треугольник. Если G центрально симметрична и выпукла, то положение изменяется. В этом случае показано, что $D(G) \leqslant 2\pi\sqrt{27}$, с равенством только для случая, когда G — эллипс. Наименьшее значение $d(G)$ не устанавливается. Для эллипса оно равно $\pi/2\sqrt{3} = 0{,}9069\ldots$, но для правильного восьмиугольника — $4(3-\sqrt{2})/7 = 0{,}90616\ldots$, а для «сглаженного» восьмиугольника (чертеж на стр. 104) — $(9-4\sqrt{2}-\log 2):(2\sqrt{2}-1) = 0{,}9024\ldots$ Автор присоединяется к предположению Малера, что эта плотность — экстремальная.

Гл. V содержит многочисленные теоремы, устанавливающие экстремальные свойства правильных и полуправильных многогранников. Например, доказываются следующие три теоремы.

1) Если $n \geqslant 3$ конгруэнтных сферических шапочек размещены на поверхности сферы и если d — плотность заполнения, то $d \leqslant \frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{cosec} w_n\right)$, где $w_n = \frac{2}{n-2}\cdot\frac{\pi}{6}$.

2) Если $n \geqslant 3$ конгруэнтных сферических шапочек покрывают поверхность сферы и D — плотность покрытия, то $D \geqslant \frac{n}{2}(1-3^{-1/2}\operatorname{ctg} w_n)$. В (1) и (2) равенство случается только, если $n = 3, 4, 6, 12$ и центры шапочек являются вершинами равностороннего треугольника (вписанного в большой круг), правильного тетраэдра, октаэдра или икосаэдра. (3) Пусть V — объем, а e, f и k — числа вершин, граней и ребер многогранника, содержащего единичную сферу. Тогда

$$V \geqslant \frac{k}{3}\sin\frac{\pi f}{k}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k}-1\right),$$

где равенство имеется только, если многогранник правильный и описанный около сферы.

Обсуждается изопериметрическая задача и решение ее дается в следующей форме (принадлежащей М. Гольдбергу): если выпуклый многогранник имеет объем V и поверхность F, то $F^3/V^2 \geqslant 54(n-2)\operatorname{tg} w_n(4\sin^2 w_n - 1)$. Как нужно разместить n точек на поверхности единичной сферы, чтобы минимальное расстояние между $\frac{1}{2}n(n+1)$ парами точек было наибольшим? Вышеприведенная теорема 1) решает этот вопрос для $n = 3, 4, 6, 12$. Гл. VI содержит недавние результаты Ван-дер-Вардена, Хабрихта и Шютте для других значений n. Для $n = 5, 7, 8, 9$ задача решена. Соответствующие конфигурации более или менее неправильные и методы, применяемые для решения задачи при определенном n, могут не помогать ее решению для других n. Для $n = 10, 11, 13, 14, 15, 16, 32$ автор приводит предположения Шютта и Ван-дер-Вардена о наилучших конфигурациях.

Гл. VII содержит обсуждение задач плотнейшего размещения равных сфер и наименьшего покрытия пространства равными сферами. Задачи эти решены при наложении условия, что центры сфер образуют решетку: наилучшая плотность заполнения равна $\pi/\sqrt{18} = 0{,}74048\ldots$ и получается, если центры сфер являются вершинами «of a face-centered cubic lattice», а наименьшая плотность покрытия равна $5^{3/2}\pi/24 = 1{,}464\ldots$ и получается, когда центры образуют «a body-centred cubic lattice». Хотя считается вероятным, что $\pi/\sqrt{18}$ — наибольшая плотность и без ограничения об образовании центрами сфер решетки, это никогда не было доказано. Блихфельд (Blichfeldt, Math. Ann., 1929, **101**, 605—608) показал, что $d < 0{,}835$, а Ранкин (Rankin, Ann. Math., 1947, 48, 1062—1081) улучшил результат до $d < 0{,}828$. Автор дает доказательство (отличное от доказательства Блихфельда) того, что $d < 0{,}835$, и нестрогое доказательство того, что $d < 0{,}7545$, но отмечает, что придется преодолеть большие технические трудности раньше, чем будет доказано предположение $d \leqslant \pi/\sqrt{18}$.

Каждая глава начинается с описания обсуждаемых проблем и заканчивается историческим очерком, в котором автор приводит источники теорем и доказательств. Имеется превосходная библиография (включающая работы вплоть до 1952 г.). Автор указывает направления дальнейших исследований. Исключительно ясное изложение множества задач и 124 прекрасных чертежа делают книгу в высшей степени привлекательной.

W. O. Moser

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 248.

См также: 9, 10, 11, 12, 18, 34, 36, 41 К, 58, 141, 229, 253, 273, 275, 277, 285, 300, 311, 489, 492, 588

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

751. Применение общей теории приближенных методов к исследованию сходимости метода Галеркина для некоторых граничных задач математической физики. Даугавет И. К., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 6, 897—899

В области B m-мерного пространства рассматривается решение уравнения $\Delta x - \lambda a(T)x = y(T)$, $T \in B$, при условии $x(T) = 0$, $T \in \Gamma$. Решение разыскивается методом Галеркина в виде

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{k_1+\ldots+k_m=k} C_k^{(k_1,\ldots,k_m)}\varphi_k^{(k_1,\ldots,k_m)}(T),$$

где $\varphi_k^{(k_1,\ldots,k_m)}(T) = \Omega(T)\,t_1^{k_1}\ldots t_m^{k_m}$ ($\Omega = 0$, когда

$T \in \Gamma$), а $c_k^{(k_1,\ldots,k_m)}$ определяются из системы:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{k_1+\ldots+k_m=k} c_k^{(k_1,\ldots,k_m)} \int_B (\Delta\varphi_k^{(k_1,\ldots,k_m)} - \lambda a \varphi_k^{(k_1,\ldots,k_m)}) \psi_i^{(i_1,\ldots,i_m)}\, dB = \int_B y \psi_i^{(i_1,\ldots,i_m)}\, dB$$

$$(i = 0,1,\ldots,n;\ i_1 + \ldots + i_m = i),$$

$\psi_i^{(i_1,\ldots,i_m)}$ — некоторая фиксированная система функций.

1) Полагая $\psi_k^{(k_1,\ldots,k_m)} = \varphi_k^{(k_1,\ldots,k_m)}$, на основании дифференциальных свойств функций $a(T)$ и $y(T)$, автор указывает порядок сходимости приближенных решений к точному по метрике $[x_1, x_2] = -\int_B \Delta x_1 \cdot x_2 dB$, откуда при известных условиях можно сделать вывод о равномерной сходимости.

2) При $m = 2$, полагая $\psi_k^{(k_1,\ldots,k_m)} = \Delta\varphi_k^{(k_1,\ldots,k_m)}$, $a(T) \equiv 0$, автор получает равномерную сходимость метода наименьших квадратов. В. П. Ильин

752. Об уравнении теплопроводности. Мейман Н. Н., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 2, 209—212

Рассматривается задача Коши в полупространстве $t \geqslant 0$ для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - A\frac{\partial u}{\partial x} - Bu - Q = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты D, A, B и Q, зависящие от x, t и даже u, предполагаются равномерно непрерывными в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < +\infty$ и ограниченными:

$$0 \leqslant D \leqslant d,\ |A| < a,\ |B| < b,\ |Q| < q \qquad (2)$$

(d, a, b, q — постоянные).

Задача Коши решается методом конечных разностей, причем

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\Delta t},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{\Delta x} \text{ при } A_m^n > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{\Delta x} \text{ при } A_m^n < 0,$$

где $u_m^n = u(n\Delta t,\ m\Delta x)$; $n = 0, 1, 2, \ldots$, $m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, Δt и Δx таковы, что $0 < \eta < \leqslant \Delta t / \Delta x^2 < 1/(2d)$. Для D, A, B, Q, зависящих только от t и x (линейный случай), приводятся две теоремы:

1. Пусть в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < +\infty$ коэффициенты линейного уравнения (1) ограничены (2) и равномерно непрерывны и начальная функция $\varphi(x)$ и ее первые две производные ограничены и равномерно непрерывны. Тогда задача Коши имеет не более одного регулярного решения u (т. е. решения, ограниченного и равномерно непрерывного вместе со всеми производными, входящими в (1)). Если такое решение существует, то решение соответствующего разностного уравнения при $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$ равномерно во всей полосе сходится к этому решению.

2. Пусть в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < +\infty$ коэффициенты линейного уравнения (1) ограничены (2) и равномерно непрерывны. Если все коэффициенты и начальная функция имеют ограниченные производные по x первых трех порядков и третьи производные удовлетворяют условию Липшица с ограниченными константами, то задача Коши имеет в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$, $-\infty < x < +\infty$ единственное регулярное решение. При условиях гладкости на единицу меньшего порядка существует обобщенное решение (т. е. предел некоторой последовательности решений разностного уравнения) с непрерывной производной по x; при условиях гладкости на две единицы меньшего порядка существует обобщенное решение.

Для D, A, B, Q, зависящих от u так, что удовлетворяется (2) (нелинейный случай), справедлива теорема.

3. Пусть в полосе $0 \leqslant t \leqslant T \leqslant +\infty$ коэффициенты нелинейного уравнения (1) ограничены (2), имеют ограниченные частные производные по x и u первых трех порядков и производные третьего порядка удовлетворяют по x и u условию Липшица с ограниченными константами. Пусть начальная функция имеет три первых ограниченных производных и третья производная удовлетворяет условию Липшица с ограниченной константой. Тогда задача Коши имеет единственное регулярное решение в некоторой, может быть, более узкой полосе $0 \leqslant t \leqslant T_1 \leqslant T$ и решение разностного уравнения при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$ сходится к этому решению.

Доказательство теорем опирается на оценку: если Δt таково, что $2d\frac{\Delta t}{\Delta x^2} + a\frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ и $|u_m^{n_0}| < M_0$ ($n_0 = t_0/\Delta t$), то

$$|u_m^n| < M_0 e^{b(t-t_0)} - \frac{q}{b} e^{b(t-t_0)} \qquad (b \neq 0),$$

$$|u_m^n| < M_0 + q(t - t_0) \quad (b = 0), \text{ где } n = t/\Delta t;\ t > t_0$$

(u_m^n — решение соответствующего (1) разностного уравнения). Л. И. Камынин

753. Новый метод определения температуры цилиндрического тела конечной длины. Шалаи (Die Ermittlung der Temperaturverteilung in einen endlich langen zylindrischen Körper mittels eines neueren Verfahrens. Szalay L. v.), Frequenz, 1954, 8, № 10, 302—304 (нем.)

Обычным методом разделения переменных решается уравнение теплопроводности, имеющее в цилиндрических координатах (r, φ, z) вид: $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{W}{\lambda}$ (рассматривается случай круговой симметрии), где искомая температура $u = u(r, z, t)$ удовлетворяет начальному $u(r, z, t = 0) = 0$ и граничному $\lambda\frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0$ при $r = r_0$ и $z = \pm z_0$ условиям; a, λ, W и h — известные физические постоянные.

В. К. Саульев

754. Асимметрические конечно-разностные сетки для тензора проводимости. Тасный-Часный (Asymmetrical finite difference network for tensor conductivities. Tasny-Tschiassny L.), Quart. Appl. Math., 1955, 12, № 4, 417—420 (англ.)

Решается краевая задача для уравнения $\nabla \cdot \{\sigma[\varepsilon] \cdot \nabla\Phi\} + \tau = 0$, где Φ — электрический потенциал двумерного континуума, τ — плотность тока, σ — проводимость континуума в определенном направлении и $[\varepsilon]$ — неоднородный тензор проводимости; при этом скаляры τ, σ и тензор $[\varepsilon]$ являются функциями положения. Для решения в данной области выбирается произвольным образом достаточно много точек — узлов, которые соединяются «физически реализуемыми» электрическими сопротивлениями (метод «триангуляции»), так что значение потенциала в узлах сети приближенно равно искомой функции Φ. См. РЖМат, 1954, 4914.

В. К. Саульев

755. Применение метода Чаплыгина к решению задачи Дирихле для одного частного типа эллиптических дифференциальных уравнений. Мысовских И. П., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 1, 13—15

В работе метод Чаплыгина применяется к решению задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = f(x, y, u)$, заданного в односвязной ограниченной области D с достаточно гладкой границей S. Предполагая, что $f_u \geqslant 0$ при $(x, y) \in \bar{D}$ и всех конечных u, автор доказывает существование верхних и нижних функций, т. е. функций, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам $\Delta U - f(x, y, U) \leqslant 0$, $\Delta V - f(x, y, V) \geqslant 0$ и граничному условию $U|_S = V|_S = 0$.

Дается алгоритм построения верхних и нижних функций в двух случаях: 1) $f_u \geqslant 0$ и 2) $f_u > 0$ и $f_{u^2} \geqslant 0$, и доказывается его равномерная сходимость. Показывается, что предельные функции построенных последовательностей удовлетворяют уравнению $\Delta u = f(x, y, u)$ и граничному условию $u|_S = 0$. В случае $f_u > 0$ и $f_{u^2} \geqslant 0$ последовательность верхних функций $\{u_n(x, y)\}$ определяется уравнениями:

$$\Delta(u_n - u_{n-1}) = f_u(x, y, u_{n-1})(u_n - u_{n-1}) + f(x, y, u_{n-1}) - \Delta u_{n-1},\ u_0 \equiv 0,\ (u_n - u_{n-1})|_S = 0\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Быстрота сходимости функций $u_n(x, y)$ к искомому решению $u(x, y)$ характеризуется неравенством

$$|u - u_{m-1+s}| \leqslant \frac{2l}{K} q^{2^s}\ (s = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $0 < q < 1$, а m выбрано так, что $|u - u_{m-1}| < \frac{2l}{K} q$, $l = \min f_u$, $K = \max f_{u^2}$ в области $(x, y) \in \bar{D}$ и $V \leqslant u \leqslant u_1$, V — решение уравнения $\Delta V = P$ при условии $V|_S = 0$, P — постоянная, удовлетворяющая условию $P \geqslant \max\limits_{(x,y) \in D} |f(x, y, 0)|$.

Последовательность нижних функций $\{v_n(x, y)\}$ определяется (в обоих случаях) из уравнений

$$\Delta(v_n - v_{n-1}) = L(v_n - v_{n-1}) + f(x, y, v_{n-1}) - \Delta v_{n-1},\quad v_0 = V,\ v_n|_S = 0\ (n = 1, 2, \ldots),$$

где $L = \max f_u(x, y, u)$ в области $(x, y) \in \bar{D}$ и $V \leqslant u \leqslant U$. Здесь V и U — соответственно нижняя и верхняя функции. Результат случая 1) для обыкновенных уравнений известен (РЖМат, 1955, 223).

Следует отметить, что на стр. 14 работы в нескольких соотношениях вместо f_u напечатано f.

Б. Н. Бабкин

756. Об одном достаточном условии применимости метода Чаплыгина к уравнениям высших порядков. Азбелев Н. В., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 4, 493—494

Рассматривается уравнение

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$y^{(k)}_{(x_0)} = y^{(k)}_0\ (k = 0, 1, \ldots, n-1). \qquad (2)$$

Предполагается, что функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной K в области D, определенной неравенствами $x_0 < x < X$, $a_k < y^{(k)} < b_k$, причем $a_k < y^{(k)}_0 < b_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Пусть $z = z(x)$ — верхняя (нижняя) функция сравнения для уравнения (1) с условиями (2) относительно области D, т. е. функция n раз непрерывно дифференцируемая на отрезке $[x_0, X]$ и удовлетворяющая неравенствам

$$z^{(n)} - f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) \geqslant 0\ (\text{или} \leqslant 0)$$

$$a_k < z^{(k)} < b_k,\ z^{(k)}(x_0) - y^{(k)}(x_0) \geqslant 0\ (\text{или} \leqslant 0)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

С помощью функции $z(x)$ определяется функция $u(x) = z(x) - \xi(x)$, где $\xi(x)$ есть решение уравнения $\xi^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \xi^{(k)} + [z^{(n)} - f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})]$ с начальными условиями $\xi^{(k)}(x_0) = z^{(k)}(x_0) - y^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Автор утверждает, что $u(x)$ будет нижней (верхней) функцией сравнения, если $a_k < u^{(k)} < b_k$ $(x_0 < x < X,\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$, и имеет место следующее основное положение: Для того чтобы в данном промежутке (x_0, X) имели место неравенства $z^{(k)} > y^{(k)}$ $(z^{(k)} < y^{(k)})$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, достаточно, чтобы в этом промежутке выполнялось неравенство $|z^{(n)} - f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})| \geqslant |u^{(n)} - f(x, u, u', \ldots u^{(n-1)})|$. Здесь $y(x)$ — решение уравнения (1) при условиях (2). В заключение автор рассматривает последовательность $\{z_i(x)\}$ функций, определенных равенствами $z_{i+1} = z_i - \xi_i$ $(i = 0, 1, \ldots)$, где $z_0(x)$ — какая-нибудь функция сравнения, а $\xi_i(x)$ — решение уравнения $\xi_i^{(n)} = K \sum_{k=0}^{n-1} \xi_i^{(k)} + (z_i^{(n)} - f(x, z_i, z_i', \ldots z_i^{(n-1)}))$ при начальных условиях $\xi_i^{(k)}(x_0) = z_i^{(k)}(x_0) - y^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. Если для всех i выполняются неравенства $a_k < z_i^{(k)} < b_k$ на промежутке (x_0, X), то последовательность $\{z_i\}$ равномерно сходится к решению уравнения (1), причем, начиная с некоторого N, будут выполняться неравенства $z_i^{(k)} > y^{(k)}$ $(z_i^{(k)} > y^{(k)})$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ на всем промежутке (x_0, X).

В одном из уравнений для определения ξ_i в работе напечатано R вместо постоянной Липшица K.

Б. Н. Бабкин

757. Решение краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения разностными формулами. Абдуллаев Т. Г., Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, № 3, 35—45

Дано уравнение

$$y^{(n)} + X_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + X_n(x) y = q(x)\ (0 \leqslant x < l), \quad (1)$$

где функции $x_1, \ldots, x_n$ непрерывны, а $q(x)$ имеет точки разрыва первого рода.

Используется вид общего разрывного решения (1) (Микеладзе Ш. Е., Докл. АН СССР, 1945, 55, № 9, 801—804) для приближенного решения двухточечных граничных задач при помощи формул численного интегрирования. Исследуется погрешность, получающаяся при решении алгебраической системы уравнений, связывающей неизвестные значения $y^{(k)}(0)$. Для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вычисления сокращаются, поскольку, независимо от числа точек разрыва первого рода у функций $y^{(k)}(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, граничная задача решается до конца при помощи таблиц нормальной фундаментальной системы решений уравнения (1) и их производных в точке $x = 0$. Без доказательства указывается на возможность построения функции Грина для двухточечной граничной задачи.

Ф. Г. Цхадая

758. Численное интегрирование для вычисления специальных гидродинамических функций. Кейфер, Чжу Сянь (Backwater functions by numerical integration. Keifer Clint J., Chu Hsien Henry), Proc. Amer. Soc. Civil Engrs, 1954, 80, № 383, 1—14 (англ.)

Расчет линий тока жидкости в канале с переменным поперечным сечением сводится к решению уравнения $dx = f(y)\,dy$. Выводится формула

$$x_2 - x_1 = \frac{D}{S_0}(\Phi_2 - \Phi_1) - \frac{Q^2}{S_0 D^4}(\Psi_2 - \Psi_1),$$

где S_0 — уклон дна, Q — сток (за единицу времени), D — диаметр потока, а Φ и Ψ — некоторые функции, для которых в работе составлены таблицы методом численного интегрирования. М. Л. Бродский

759. Приближенное решение самосопряженной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения и определение областей расположения собственных значений. Слободянский М. Г., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 5, 585—596

Ищется нижняя граница наименьшего собственного числа оператора

$$Au = \sum_{k=0}^{s} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}\left[p_k(x) \frac{d^k u}{dx^k} \right],$$

$$u^{(s-1)}(a) = u^{(s-2)}(a) = \ldots = u(a) = 0,$$
$$u^{(s-1)}(b) = u^{(s-2)}(b) = \ldots = u(b) = 0,$$

который предполагается положительно определенным. Пусть $A_c u = Au + cu$, $c = \text{const} > 0$ и G_c — функция Грина оператора A_c. Искомая нижняя граница дается очевидным неравенством

$$\lambda_1 > \frac{1}{J_c} - c, \quad J_c = \int_a^b G_c(x, x)\,dx.$$

Автор заменяет эту оценку более грубой:

$$\lambda_1 > \lambda_{11} = \frac{1}{J_{cn}} - c, \qquad (1)$$

где $J_{cn} > J_c$ — некоторый функционал, зависящий от числа c и от произвольной функции v_n, удовлетворяющей краевым условиям задачи; преимущество оценки (1) заключается в том, что для построения функционала J_{cn} можно использовать не функцию Грина оператора A_c, а любую другую функцию, удовлетворяющую тем же краевым условиям и имеющую ту же особенность. Постоянная c выбирается так, чтобы величина λ_{11} имела максимальное значение (в тексте по недоразумению сказано о минимальном значении). Теперь процесс повторяется с заменой Au на $A_{\lambda_{11}} u = Au - \lambda_{11} u$, что дает нижнюю границу $\lambda_1 \geqslant \lambda_{11} + \lambda_{12} + \ldots + \lambda_{1n}$. Сходимость процесса не исследуется.

В § 2 автор рассматривает краевую задачу для неоднородных уравнений $Au = f$ и $Av = \varphi_0$, где функция f произвольна, а функция v определенным образом задается, и приводит некоторые оценки для величины (v, f).

Примечание референта. Определение функции Грина (формула (1.9), стр. 586) не вполне аккуратно. Эта неаккуратность сказывается далее в обозначениях, но не влияет на результаты. С. Г. Михлин

760. Области, не содержащие собственных значений матрицы. Шнейдер (Regions of exclusion for the latent roots of a matrix. Schneider Hans), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 320—322 (англ.)

Построение областей, не содержащих собственных значений матрицы, основано на обобщении теоремы Гершгорина о расположении на плоскости собственных значений матрицы с комплексными элементами (Изв. АН СССР, 1931, 7, 749—754). Доказана теорема: Если $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n с комплексными элементами и $\mu(1), \ldots, \mu(n)$ — перестановка из чисел $1, \ldots, n$, то собственные значения матрицы A лежат в объединении n областей: $|z - a_{ii}| \leqslant P_i$, если $i = \mu(i)$, и $|z - a_{ii}| \geqslant Q_i$, если $i \neq \mu(i)$. Здесь $P_i = \Sigma'_j |a_{ij}|$, $j \neq i$, $Q_i = |a_{i\mu(i)}| - \Sigma''_j |a_{ji}|$, $j \neq i$, $j \neq \mu(i)$. Теорема Гершгорина получается отсюда, если при всех i $\mu(i) = i$.

Доказанная теорема позволяет расширить область, не содержащую собственных значений матрицы A, полученную по методу Гершгорина. Применение теоремы к частным случаям дает уточнение результатов Таусски (Taussky O., Duke Math. J., 1948, 15, 1043—1044) и Штейна (Stein P., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, 48, 59—60). В. Н. Фаддеева

761. Новые методы непосредственного решения обобщенной проблемы собственных значений. Фалькс (Neue Verfahren zur direkten Lösung des allgemeinen Matrizeneigenwertproblemes. Falk Sigurd), Z. angew. Math. und Mech., 1954, 34, № 8/9, 289—291 (нем.)

Дается краткое описание метода для непосредственного построения полинома $P(k) = |A - kB|$, где матрицы A и B могут даже быть особенными, основанного на обобщении процесса Хессенберга (Zurmühl R., Matrizen, 1950, 316—322). Матрица B преобразуется при помощи элементарных преобразований над строчками в нижнюю треугольную матрицу $\tilde{B}$. Те же преобразования над матрицей A приводят к матрице $\tilde{A}$. Далее вводятся две вспомогательные матрицы L и R, так что

$$L\tilde{A}R = P, \quad L\tilde{B}R = I,$$

где

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \ldots & p_{1n} \\ 1 & p_{22} & p_{23} & \ldots & p_{2n} \\ 0 & -1 & p_{33} & \ldots & p_{3n} \\ & & \ddots & & \\ & & & & \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица. Исключение L приводит к матричному уравнению $\tilde{A}R = \tilde{B}RP$. Система, равносильная последнему матричному уравнению, оказывается рекуррентной и позволяет определить элементы матриц P и R. Искомый полином совпадает с характеристическим полиномом матрицы P. Приводится краткое описание вычислительной схемы. Более детальное описание дано в работе автора (Abhandl, Braunschweig, wiss. Ges., 1954, 6).

В. Н. Фаддеева

762. Практическое опровержение применимости итерационного метода для решения алгебраической проблемы собственных значений. Бодевиг (A practical refutation of the iteration method for the algebraic eigenproblem. Bodewig E.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 48, 237—240 (англ.)

В работе автора (Atti Seminar. mat. e fis. Univ. Modena, 1949—1950, 4; 1950—1951, 5) развивается точка зрения о нецелесообразности применения итерационного метода для вычисления собственных значений и собственных векторов матрицы. По мнению автора, с одной стороны, итерационный метод требует большего числа вычислений, с другой стороны, не дает возможности получения высокой точности результата.

В настоящей заметке делается попытка подтвердить эту точку зрения. Приводятся данные вычислений для матрицы 4-го порядка, имеющей близкие собственные значения. Автору понадобилось произвести 1200 итераций, для того чтобы получить наибольшее по модулю

собственное значение с точностью лишь до четырех значащих цифр. Выбор начального вектора был сделан заведомо неблагоприятным (почти ортогональным к соответствующему собственному вектору). В численных результатах есть неточности. В. Н. Фаддеева

763. Обусловленность некоторых матриц. П. Тодд (The condition of certain matrices. II. Todd John), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 249—257 (англ.)

Работа продолжает серию работ автора (Proc. Cambridge Philos. Soc., 1949, 46, 116—118; Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1949, 2, 469—472; Nat. Bur. Standards, Appl. Math., 1954, ser. 39), посвященных изучению обусловленности некоторых частных матриц, связанных с решением краевых задач математической физики разностными методами. В качестве меры обусловленности выбрано P-число, т. е. отношение наибольшего и наименьшего модулей собственных значений матрицы.

В реферируемой работе показано, что P—число матрицы системы $(A - kh^4 I)\,y = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

(система связана с решением краевой задачи $y^{VI} = ky$, y, y'' даны при $x = 0$, $x = l$), имеет порядок h^{-4}. Этот порядок сохраняется, если в матрице A заменить первый и последний элементы на 6 или 7 (что соответствует изменению граничных значений и способу аппроксимации dy/dx в соответствующей граничной задаче). Полученная оценка хорошо согласуется с приведенным числовым примером. В. Н. Фаддеева

764. Вычисление детерминантов. Рахман (Numerical evaluation of determinants. Rahman A.), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1954, 40, № 8, 798—801 (англ.; резюме франц.)

Указывается, что обычный метод исключения может быть модифицирован так, что одновременно исключаются группы неизвестных.

Пусть матрица M разбита на блоки

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

где a — невырожденная матрица. Тогда соотношение

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -ca^{-1} & I_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d - ca^{-1}b \end{bmatrix},$$

где I_1 и I_2 — единичные матрицы соответствующих порядков, позволяет представить детерминант матрицы M в виде $|M| = |a| \cdot |d - ca^{-1}b|$.

Аналогичная редукция может быть применена к матрице $d - ca^{-1}b$. Приводится числовой пример, в котором M — симметричная матрица восьмого порядка, а матрица a имеет третий порядок. Ю. А. Шрейдер

765. Решение системы трехчленных уравнений с помощью фокусных отношений. Линецкий В. Д., Науч. тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1954, № 17, 185—190

Рассматривается специальная система линейных уравнений вида $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{10} = 0$, $a_{i,\,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,\,i+1}x_{i+1} + a_{i0} = 0$ $(i = 2, 3, \dots; n$: $a_{n,\,n+1} = 0)$. Вводится понятие фокусных отношений: а) прямых:

$$k_{12} = -\frac{a_{11}}{a_{12}},$$

$$k_{i,\,i+1} = -\frac{a_{ii}\,k_{i-1,\,i} + a_{i,\,i-1}}{a_{i,\,i+1}\,k_{i-1,i}} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1)$$

и б) встречных:

$$k_{n,n-1} = -\frac{a_{nn}}{a_{n,n-1}}, \quad k_{i,i-1} = -\frac{a_{ii}\,k_{i+1,i} + a_{i,i+1}}{a_{i,i-1}\,k_{i+1,\,i}},$$

$(i = n-1,\ n-2, \dots, 2)$. При помощи этих фокусных отношений вычисляются вспомогательные величины:

$$x_1^0 = \frac{k_{21}}{a_{12}(k_{12}k_{21} - 1)}\,a_{10}, \quad x_i^0 = \frac{k_{i+1,i}}{a_{i,i+1}(k_{i,i+1}\,k_{i+1,i} - 1)}\,a_{i0} =$$

$$= \frac{k_{i-1,i}}{a_{i,i-1}(k_{i-1,i}\,k_{i,i-1} - 1)}\,a_{i0}\ (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

$$x_n^0 = \frac{k_{n-1,n}}{a_{n,n-1}(k_{n,n-1}\,k_{n-1,\,n} - 1)}\,a_{n0}.$$

Для x_i^0 $(i = 2, 3, \dots, n-1)$ имеется по два выражения, чем можно пользоваться для контроля.

Наконец, вычисляются корни данной системы по формулам

$$x_i = \frac{x_1^0}{k_{21}k_{32}\dots k_{i,i-1}} + \frac{x_2^0}{k_{32}k_{43}\dots k_{i,i-1}} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{x_{i-1}^0}{k_{i,i-1}} + x_i^0 + \frac{x_{i+1}^0}{k_{i,i+1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{x_n^0}{k_{i,i+1}\,k_{i+1,\,i+2}\dots k_{n-1,\,n}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Вывод этих формул не дается. Приводится пример системы пяти таких уравнений.

Примечание референта. Чтобы вычислить по методу автора корни рассматриваемой им системы, требуется произвести 76 умножений и делений. Эту же систему по известной «схеме единственного деления» (Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., 1950, § 6) можно решить, выполнив всего лишь 37 умножений и делений, причем последняя схема дает контроль на каждом этапе вычислений, а также контроль всего решения.

М. С. Горнштейн

766. Заметки о численном интегрировании. III. Дополнения. Буковиц (Beiträge zur numerischen Integration. III. Nachträge. Bukovics Erich), Monatsh. Math., 1954, 58, № 4, 258—265 (нем.)

Исправления и уточнения некоторых оценок, полученных в предыдущих заметках (РЖМат, 1954, 5260, 5261). К. С.

767. Решение задачи на минимум методом сеток. Бест (A minimum problem solved by mesh methods. Best G. C.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 45, 11—13 (англ.)

Для приближенного нахождения функции $y(x)$, минимизирующей интеграл $I = \int_0^1 y^{-1}\,(1 + y^2)^{1/2}\,dx$ при граничном условии $y(0) = y(1) = 1$, данная вариационная задача аппроксимируется следующей алгебраической: $I = 2\sum_{i=1}^{n} 2hr_i/(y_i + y_{i-1})$, где $r_i = \{1 + h^{-2}(y_i - y_{i-1})^2\}^{1/2}$; $h = 1/2n$ (здесь использована симметричность решения относительно точки $x = 1/2$). Из равенства нулю соответствующих производных от I по y_k $(k = 1, 2, \dots, n-1)$ следует соотношение $y_{k+1} = y_k + \rho_k(y_k - y_{k-1}) + e_{k+1}$, из которого по выбранному начальному вектору последовательно определя-

ются первое, второе и т. д. приближения. Приведена таблица трех итераций с начальным вектором $y \equiv 1$ и $h = 1/8$; при этом погрешность для $x = 1/2$ не превышает 0,001. В. К. Саульев

768. Приближенный метод вычисления интегральных преобразований. Земанян (An approximate method of evaluating integral transforms. Zemanian Armen H.), J. Appl. Phys., 1954, 25, № 2, 262—266 (англ.)

Предлагается метод численного интегрирования, который может быть использован для вычисления при интегральных преобразованиях $F(s) = \int_a^b f(t) H(s,t)\, dt$. Предполагается, что интегралы $G(s,t) = \int H(s,t)\, dt$ и $K(s,t) = \int G(s,t)\, dt$ вычисляются. Интегрирование по частям дает $F(s) = |f(t) G(s,t)|_a^b - \int_a^b \frac{df}{dt} G(s,t)\, dt$. Если функция $f(t)$ заменена ломаной, не содержащей вертикальных отрезков, то последний интеграл легко вычисляется. Ошибка, которая делается при этой замене, меньше чем площадь, заключенная между заданной кривой и ломаной, умноженная на максимальное значение функции $|H(s,t)|$. Метод легко может быть обобщен для интегралов, взятых в плоскости комплексного переменного, и для интегралов в бесконечных пределах.

Общая формула конкретизирована для преобразований Фурье, Лапласа, Меллина и Ганкеля. Приведены примеры. Б. З. Капенеленбаум

769. Практические методы гармонического анализа для геофизических целей. Кейн (Practical methods of harmonic analysis for geophysical problems. Kane R. P.), Proc. Indian Acad. Sci., 1954, A39, № 3, 117—126 (англ.)

Приводится схема группирования эквидистантных ординат, облегчающая определение коэффициентов Фурье по формулам Бесселя при 24 ординатах в периоде. Схема группирования аналогична схемам группирования Гровера, Ф. Мартенса, С. Томсона (Серебренников М. Г., Гармонический анализ, М.—Л., Гостехиздат, 1948) и каких-либо преимуществ не представляет. М. Г. Серебренников

770. Метод вычисления обратных тригонометрических функций. Ла-Фара (A method for calculating inverse trigonometric functions. LaFara Robert L.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 132—139 (англ.)

Рассматривается логический процесс вычисления обратных тригонометрических функций при работе на электронной вычислительной машине ИБМ-650.

Если известны синус и косинус искомого угла и искомый угол y заключен в границах $0 < y < \pi$, $y \neq \pi/2^m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots, 25$), то по общеизвестным формулам вычисляются $\sin 2y$, $\cos 2y$, $\sin 4y$, $\cos 4y$, ... Знаки этих величин последовательно определяют двоичные цифры величины $2y/\pi$.

Приведена блок-схема процесса вычислений. Рассматривается вопрос об ошибках округления. Приводится видоизменение процесса, которое дает возможность уменьшить ошибки округления и сэкономить запоминающее устройство машины. Для этого видоизмененного процесса также приведена блок-схема и, кроме того, приведена программа вычислений для машины ИБМ-650.

771. Точная интерполяция для функций с ограниченным спектром. Колемберг (Exact interpolation of band-limited functions. Kohlenberg Arthur), J. Appl. Phys., 1953, 24, № 12, 1432—1436 (англ.)

Если спектр некоторой функции $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, целиком расположен в интервале $(0, W)$, то известна (Whittaker J. M., Interpolatory function theory, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, № 33, Cambridge University Press, 1935 и др.) формула, точно выражающая $f(t)$ в виде бесконечного интерполяционного ряда, в который входят значения $f(n/2W)$, n — целые числа. В частном случае, когда спектр расположен на интервале $(W_0, W_0 + W)$, в работе выводится формула вида $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/W) \times s(t - n/W) + f(n/W + k)\, s(n/W + k - t)$, где k — вещественное число, которое может принимать любое значение, кроме некоторых особых, а для функции $s(t)$ дано выражение в явном виде. Такая формула выгоднее общей формулы, составленной для интервала $(0, W_0 + W)$, так как позволяет брать меньше значений функции $f(t)$ при получении для $f(t)$ приближенной формулы с заранее заданной точностью.

М. Л. Бродский

772. Полиномиальная аппроксимация элементарных функций. Кленшоу (Polynomial approximations to elementary functions. Clenshaw C. W.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 47, 143—147 (англ.)

При вводе элементарной функции в быстродействующую автоматическую цифровую машину применение аппроксимирующих полиномов удобнее таблицы, так как требует меньше ячеек запоминающего устройства. Для функций, непрерывных на сегменте, в качестве аппроксимирующих полиномов применимы частичные суммы разложения в ряд по полиномам Чебышева. Приведены таблицы первых нескольких коэффициентов в разложении в ряд по полиномам Чебышева для $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$, $\ln(1+x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, e^x $(-1 < x \leqslant 1)$, $\Gamma(1+x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $J_0(x)$ и $J_1(x)$ $(-10 \leqslant x \leqslant 10)$ и первых 12 полиномов Чебышева. М. Л. Бродский

773. О решении уравнений третьей и высших степеней. Каппус (Zur Lösung von Gleichungen dritten und höheren Grades. Kappus Robert), Stahlbau, 1954, 23, № 3, 60—63 (нем.)

Для уравнения третьей степени с вещественными коэффициентами рекомендуется сначала при помощи метода Ньютона найти с требуемой точностью вещественный корень этого уравнения, после чего легко находятся другие два корня. Указывается, как, пользуясь абсциссой точки перегиба графика многочлена, найти начальное значение корня так, чтобы процесс Ньютона возможно быстро привел к цели. Дается также оценка погрешности корней в зависимости от погрешностей коэффициентов.

Для уравнения четвертой степени описывается обычный способ сведения к решению кубической резольвенты. Для уравнений высших степеней дается совет пользоваться методом Лобачевского — Грэффе, если требуется вычислить все корни, и методом Ньютона, если нужен один корень. М. С. Горнштейн

774. Решение уравнений третьей и четвертой степеней. Сим (Solution of cubics and quartics. Sim A. C.), Wireless Engr, 1954, 31, № 11, 294—300 (англ.)

Для решения кубического уравнения

$$p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \qquad (1)$$

употребляется известный метод Эмде, состоящий в приведении этого уравнения к виду

$$x^3 + 2 = \lambda x, \qquad (2)$$

корни которого зависят от одного параметра λ. Составлена таблица корней этого уравнения, как функций λ (Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций, М.—Л., 1948). Однако этот метод имеет тот недостаток, что в некоторых случаях при определении корней уравнения (1) по корням вспомогательного уравнения (2) приходится

вычислять разности между близкими количествами, вследствие чего теряется точность. Автор дает правила вычисления корней уравнения (1), гарантирующие получение одинаковой точности во всех случаях. (Такие же результаты другим методом получены Шумягским Б. М., Таблицы для решения кубических уравнений, М.— Л., 1950).

Подобные же правила автор дает для уравнения четвертой степени, используя метод Фэррари приведения такого уравнения к кубическому и двум квадратным уравнениям.

В статье даны два графика для определения одного вещественного корня α уравнения (2) при значениях λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| \leqslant 10$. Для других значений λ дается для корня α быстро сходящийся ряд, расположенный по отрицательным степеням λ. В приложении дается таблица преобразований Лапласа от рациональной дроби, знаменатель которой — многочлен третьей или четвертой степени. М. С. Горнштейн.

775. Заметка о методе вычисления обратных значений. Бут (Reciprocals — a note on a computer method for finding them. Booth Andrew D.), Computers and Automat., 1954, **3**, № 7, 16, 25 (англ.)

Исследуется сходимость хорошо известного итерационного приема нахождения величины, обратной a: $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$. При $1 \leqslant a < 2$ достаточно взять $1/2 \leqslant x_0 \leqslant 1$. Если зафиксировать x_0 для всех a, то для обеспечения быстрейшей сходимости в худших случаях (a близко к 1 или 2) следует взять $x_0 = 2{,}3$.

Е. К. Нечаев

776. Метод перевода из одной системы счисления в другую. Содэн (A method of radix conversion. Soden Walter), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 273—274 (англ.)

Описывается метод, удобный для ручных вычислений или для перехода на десятичной машине от восьмеричной системы к десятичной. Метод основан на тождестве

$$\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\ldots\left(\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\left(\left(1+\frac{b-a}{a}\right)\left(\left(1+\frac{b-a}{a}\right)u_n a^n + u_{n-1}a^{n-1}\right)+u_{n-2}a^{n-2}\right)+\ldots+u_1 a\right)+u_0 \equiv u_n b^n + u_{n-1}b^{n-1} + u_{n-2}b^{n-2} + \ldots + u_1 b + u_0.$$

Приводится иллюстрирующий пример.

Для перевода n-значного восьмеричного числа в десятичную систему метод требует $2(n-1)$ сложений (вычитаний) и широко применяется на машине ИБМ-604.

Р. И. Подловченко

777. Номограммы для определения запаса прочности шахтного каната по методу Г. Н. Савина. Денисюк И. Н., Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 1, 96—100

Две рабочие номограммы с тремя параллельными шкалами L, $n_{ст}$ и n_g, построенные для формулы

$$n_{ст} = \frac{\dfrac{\alpha+2\mu}{1+\alpha}+2\mu\dfrac{a}{g}}{\sigma_B\left(\dfrac{1}{n_g}-\dfrac{\mu K}{\sigma_B}\right)+L\gamma_0\left(\dfrac{1{,}76\mu-1}{1+\alpha}+0{,}3\mu\dfrac{a}{g}\right)}\sigma_B$$

при фиксированных значениях параметров a, μ, α, σ_B, K. Номограммы служат для определения запаса прочности шахтного каната по методике, разработанной Г. Н. Савиным (Горный журнал, 1954, № 2).

В работе подробно описан метод построения номограмм, что дает возможность легко построить аналогичные номограммы для других значений параметров. Расчет номограмм проведен по методу автора (Справочник по номографии, 1937, 74—76). Г. С. Хованский

778. Десять номограмм передающих линий высокой частоты. Смит (Ten r-f transmission line nomographs. Smith Phillip H.), Electronics, 1953, **A26**, № 6, R52—R57 (англ.)

Приводятся десять номограмм из выравненных точек с параллельными шкалами для определения некоторых величин, характеризующих работу двухпроводных и коаксиальных линий на частотах до 20 000 *Мгц*. Номограммы построены для следующих зависимостей:

$$Z_0 = 276\log_{10}(2D/d),\quad Z_0 = 138\log_{10}(D/d),$$

$$R = 0{,}0315\, f^{1/2}\left[\frac{1}{d}-\frac{1}{D}\right],$$

$$db = R/0{,}23025\, Z_0,$$

$$Z_{AR} = 2Z_0^2/R,\quad X_s = -Z_0\operatorname{ctg}(360\, l/\lambda),$$

$$X_s = Z_0\operatorname{tg}(360\, l/\lambda),$$

$$R_s = Z_0^2/R_l,\quad \varphi = \operatorname{arctg}\left[\frac{R_l}{Z_0}\operatorname{tg}\left(360\frac{l}{\lambda}\right)\right],$$

$$G_{max} = 47{,}2\, E/dZ_0,\ db = \left(10\log_{10}\frac{(S_L+1)(S_G-1)}{(S_L-1)(S_G+1)}\right)^{1/2}.$$

Г. С. Хованский

779. Номограммы для звуковых частот. Содаро (Audio nomographs. Sodaro Joseph F.), Electronics, 1953, **26**, № 12, 200—202 (англ.)

Приводятся 3 номограммы из выравненных точек для подбора оптимальных значений параметров схемных элементов усилителей звуковых (низких) частот. Полное решение задачи получается после шести приложений линейки. Две номограммы с параллельными логарифмическими шкалами. Одна — комбинированная из радиантной номограммы и Z-номограммы.

И. Н. Денисюк

780. Номограмма для расчета цепи последовательной коррекции высоких частот. Содаро (Series-peaking network design. Sodaro Joseph F.), Electronics, 1953, **26**, № 6A, R15 (англ.)

Составная номограмма с параллельными шкалами для определения величины последовательной индуктивности L и нагрузочного сопротивления R по заданным значениям критической частоты f и шунтирующей емкости C' и C'' в целях коррекции высоких частот. Номографированные формулы:

$$L = \frac{1}{8\pi^2 f^2 C'},\quad R = \frac{1}{2\pi f C'\sqrt{2C''/C'}}.$$

Г. С. Хованский

781. Номограмма для критического уравнения. Майлс, Судак (Nomogram for the critical equation. Miles F. T., Soodak Harry), Nucleonics, 1953, **11**, № 1, 66 (англ.)

Номограмма из выравненных точек с разрезными шкалами для определения величины Δ из уравнения

$$ke^{\tau\Delta} - 1 + L^2\Delta = 0,$$

где k — коэффициент размножения для бесконечного реактора, τ — «возраст» по Ферми, L — диффузионная длина, Δ — лапласиан, определяющий критический размер теплового ядерного реактора.

Номограмма состоит из параллельных шкал k и L^2/τ и трех криволинейных шкал — $\Delta\tau$, соответствующих различным пределам изменения величины k на шкале k (для получения ответа с большей точностью шкала k разрезана на три части, в связи с чем имеет три градуировки). Для значений k, близких к 1, при которых номограмма дает недостаточную точность, и для

$L^2/\tau > 2$ предлагаются следующие приближенные выражения, дающие исчерпывающую точность:

$$-\Delta = (k-1)/(L^2+\tau)$$

и

$$-\Delta = (k-1)/L^2 + k\tau).$$

Г. С. Хованский

782. Номограмма предельного аттенюатора для колебаний вида TE_{11}. **Олред** (Chart for TE_{11} mode piston attenuator. Allred Charles M.), Electronics, 1953, **A26**, № 6, R8 (англ.)

Номограмма из выравненных точек, позволяющая определить ослабление цилиндрического волноводного аттенюатора A в децибелах по длине, равной радиусу для колебаний H_{11}, в зависимости от частоты f, проводимости σ и радиуса волновода a. Номографированное уравнение

$$A = 15{,}99\sqrt{1-\left[\frac{1}{\pi\mu}\right]^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{f\cdot a}}\frac{1}{\sqrt{\sigma a}}-\left[\frac{2\pi}{1{,}841\,C}\right]^2(af)^2},$$

где C и μ — постоянные. Номограмма состоит из параллельных шкал $a\sigma$ и A и криволинейной шкалы af.

Г. С. Хованский

783. Номограмма выносливости соснового дерева. **Одерфельд** (Nomogram wytrzymałości drzewa sosnowego. Oderfeld Jan), Zastosow. mat., 1954, **1**, № 2, 138—147 (польск.; резюме русс., англ.)

См. также: 9, 37, 345, 353, 424, 490, 569, 667

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

784. Решение уравнений пассивных электрических цепей посредством математических деревьев. **Персивал** (The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees. Percival W. S.), Proc. Inst. Electr. Engrs, 1953, **100**, № 65, 143—150 (англ.)

Излагается предлагаемый автором метод исчисления проводимостей (адмиттанцев) пассивных электрических цепей, основанный на использовании их топологических характеристик — так называемых «деревьев».

Характерной особенностью этого метода является рассмотрение схемы электрической цепи как некоторого математического объекта, содержащего в компактной форме все сведения, необходимые для анализа этой цепи. Вычисления с деревьями анализируемых цепей производятся посредством схемных уравнений (network equations), т. е. уравнений, членами которых являются схемы и подсхемы этих цепей. Основную роль в этих вычислениях играют пары деревьев, не имеющих общих узлов, но содержащих все узлы схемы. Совокупность всех таких пар деревьев, которые соединяют входные полюсы a и b соответственно с выходными полюсами c и d той же схемы, обозначается символом $T_{ab\cdot cd}$.

Для функций $L_{ab\cdot cd}$ и $K_{ab\cdot cd}$, определяемых равенствами $L_{ab\cdot cd} = T_{ac\cdot bd} - T_{ad\cdot bc}$, $K_{ab\cdot cd} = pL_{ab\cdot cd}$, где $p = cd$ — единственная ветвь между полюсами c и d, доказаны теоремы, аналогичные законам Кирхгофа для напряжений и токов соответственно.

Описаны три способа вычисления L-функции (т. е. функций вида $L_{ab\cdot cd}$) и получены формулы, связывающие L- и K-функции с напряжениями и токами в электрических цепях.

Утверждается, что предлагаемый метод легче и быстрее приводит к решению уравнений электрических цепей, чем классический детерминантный метод.

В добавлении к статье дано правило преобразования результатов, полученных в терминах проводимостей (адмиттанцев), в результаты, выраженные через сопротивления (импеданцы). В. И. Шестаков

785. Синтез электрических цепей, не содержащих взаимной индуктивности. **Фиалков, Герст** (Impedance synthesis without mutual coupling. Fialkow Aaron, Gerst Irving), Quart. Appl. Math., 1955, **12**, № 4, 420—422 (англ.)

В статье, посвященной нахождению параметров электрических схем по заданной функции $Z(p)$, дается метод, не требующий применения взаимной индуктивности.

Заданная функция полного сопротивления $Z(p)$ реализуется посредством неуравновешенной мостовой схемы, содержащей 5 сопротивлений. Настоящий мей тод является видоизмененным методом синтеза электрических цепей, предложенным Боттом и Даффином (Bott R., Duffin R. J., J. Appl. Phys. 1949, 20, 816), где заданная функция $Z(p)$ реализуется посредством уравновешенной мостовой схемы, содержащей 6 сопротивлений. Н. К. Круг

786. Синтез схемы главного привода прокатного стана. **Меклер Я. И.**, Автоматика и телемеханика, 1955, **16**, № 1, 71—86

Рассматривается синтез сложной схемы электропривода на основе теории релейных схем. После краткого исторического обзора развития этой теории и формулировки технических условий проводится синтез главных цепей, блока пуска, блока изменения магнитного поля, блока торможения и подтормаживания и блока управления. Для каждого из этих блоков составляется таблица включения, характеризующая последовательность действия его элементов, на основе таблицы составляются первоначальные структурные формулы, которые затем преобразуются к наиболее простому виду. Проводится преобразование полученных схем в мостиковые. В конце дается полная схема электропривода. В выводах указывается, что применение теории релейных схем дало возможность получить более надежную схему с уменьшенным числом элементов по сравнению со схемами, полученными обычным путем. М. А. Гаврилов

787. Логическое исследование контактных схем. **Греа, Игонне** (Étude logique des circuits de contacts. Gréa R., Higonnet R.), Rev. gén. Électr., 1954, **63**, № 1, 19—34 (франц.)

В начале работы описывается обычное применение алгебры логики (исчисления высказываний) к параллельно-последовательным релейно-контактным схемам. Затем, рассматривая такие схемы как часть дешифраторной схемы, авторы вводят цифровые (двоичные, а затем и десятичные) обозначения. Для описания работы реле в инверсных схемах вводится операция логического вычитания согласно правилам: 0—0=0, 0—1=0, 1—0=1, 1—1=0. Выражения, содержащие логическое вычитание, могут быть легко преобразованы в обычные булевские полиномы, пользуясь которыми, легко производить анализ действия схемы. С другой стороны, выражения такого рода адэкватно описывают структуру соответствующих цепей, что позволяет применять их к вопросам синтеза.

В работе изучаются также многотактные схемы.

Здесь авторы различают два основных типа цепей. Это — цепи, обладающие устойчивыми состояниями, которые могут меняться под воздействием внешних команд (управляемые схемы), и цепи без устойчивых состояний, работающие по принципу генератора с обратной связью. Для цепей с обратной связью вводятся булевские полиномы от переменных, описывающих состояния как контактов, так и обмоток реле. Строятся обычные диаграммы, характеризующие поведение схем во времени. Указываются правила оперирования с управляемыми схемами. Ю. А. Шрейдер

788. Неопределенная двузначная булева функция. Свобода (Neurčitá dvouhodnotová Booleova funkce. Svoboda František), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 4, 373—375 (чеш.)

Булеву функцию можно задать либо алгебраическим выражением, либо таблицей значений функции при всех комбинациях значений аргументов. По мнению автора, существующие математические методы синтеза релейно-контактных схем используют исключительно алгебраическую запись функций. Между тем эта запись непосредственно описывает только параллельно-последовательные схемы. Для синтеза непараллельно-последовательных схем вводятся либо новые операции в схемной алгебре (Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, М.— Л., 1950), либо операции с характеристическими функциями матриц (Лунц А. Г., Изв. АН СССР, сер. матем, 1952, 16, № 5, 405—426) и т. п. Автор предлагает использовать для этой цели «неопределенные» булевы функции в табличной форме. Неопределенная булева функция задается таблицей значений, где на некоторых местах стоит знак ∼, вместо которого можно подставить 0 или I. Таким образом, из неопределенной функции с r знаками ∼ получается 2^r определенных функций. Сообщается, что автор применил метод неопределенных булевых функций для синтеза контактных схем с одним входом и m выходами. Этот метод описан в последующей статье автора (см. реф. 789). Можно построить устройство, осуществляющее автоматическое проектирование схем по этому методу. Г. Н. Поваров

789. Употребление неопределенной двузначной булевой функции при синтезе однотактных переключательных схем. Свобода (Užití neurčité dvouhodnotové Booleovy funkce na synthesu jednotaktních hradlových schemat. Svoboda František), Sbor. Československ. akad. věd. Lab. mat. strojů, 1954, № 2, 209—244 (чеш.; резюме русс., англ.)

Дан синтез схем с одним входом и m выходами. В гл. 1, 2 обсуждаются методы К. Э. Шеннона, М. А. Гаврилова и А. Г. Лунца для синтеза контактных схем и определяются основные понятия. В частности, ветвь схемы между узлами U_i и U_j есть максимальная подсхема, содержащая U_i и U_j. Максимальная связная подсхема, содержащая из узлов только U_i и U_j, называется Σ-ветвью и представляет собой контакт либо параллельное соединение контактов. Переключательная (hradlová) функция узла есть булева функция, описывающая проводимость между ним и входом. Переключательная функция ветви описывает проводимость между ее концами. Переключательные функции задаются таблично. Единичная подсхема (I-подсхема) есть максимальная связная подсхема при данном состоянии приемных элементов. Точная постановка задачи синтеза контактных схем с одним входом и m выходами дается в гл. 3. Условия проводимости такой схемы изображаются оперативной (operační) табл. 1, где X_k — переключательная функция k-го выхода. При этом вместо каждого знака «?» пишут 0, I или ∼, в зависимости от предписанной проводимости. Знаком

Таблица 1

$x_1 x_2 \ldots x_i \ldots x_n$	$X_1 X_2 \ldots X_k \ldots X_m$
0 0 . . . 0 . . . 0	? ? . . . ? . . . ?
0 0 . . . 0 . . . I	? ? . . . ? . . . ?
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
. . . . .	. . . . .
I I . . . I . . . I	? ? . . . . . ?

∼ указан произвольный выбор. В гл. 4 исследуется, когда переключательные функции являются неопределенными (реф. 788). В гл. 5 излагается метод синтеза контактных схем по заданной оперативной таблице. Этим методом схема с одним входом и m выходами строится по этапам с помощью операций ω_1, ω_2, ω_3. Первоначальная схема состоит из входного и выходных узлов. На каждом этапе узлы уже построенной части делятся на передние и задние. Множество передних узлов P должно обладать тем свойством (а), что реализация их переключательных функций реализует оперативную таблицу. В первоначальной схеме выходы считаются передними узлами, вход — задним. Операция ω_1 состоит в образовании нового узла U_1 и нахождении его переключательной функции F_1 при условии, что он соединен Σ-ветвью проводимости f_1 с передним узлом U, образованным ранее; эта операция называется разложением переключательной функции F узла U и выполняется по табл. 2.

Таблица 2

F	f_1	F_1
0	0	∼
∼	0	∼
(I) 1	0	∼
(1) I	0	∼
I	0	∼
0	I	0
∼	I	∼
(I) 1	I	1 (I)
(1) I	I	I (1)
I	I	I

Узел U_1 считается передним. Разложение функции F называется полным, если при любом состоянии приемных элементов, при котором $F = \mathrm{I}$, U соединен хотя бы с одним передним узлом проводящей Σ-ветвью. Разложение, остающееся полным по устранению хотя бы одной Σ-ветви, называется излишним. Если при данном состоянии приемных элементов с U соединено не менее 2 передних узлов, то в соответствующей строке таблицы для F пишется знак 1 вместо I. При полном разложении функции F узел U причисляется к задним, что может вызвать замену 1 на I в таблицах функций других узлов. В качестве f_1 можно взять функцию любой Σ-ветви, но не все Σ-ветви ведут к простой схеме. Поэтому f_1 выбирается с помощью вспомогательной функции φ, которая находится для функции F по табл. 3: А именно, стараются выбрать f_1 по возможности ближе к φ. Операция ω_2 состоит в построении ветви между ранее образованными узлами U_i и U_j, из которых хотя бы один передний. Функция f этой ветви выбирается с помощью вспомогательной функции ψ по табл. 4, где F_i, F_j — функции узлов U_i, U_j. Знак I заменяет собой I, если узел лежит на I-подсхеме, содержащей вход. Левая часть табл. 4 служит для отыскания ψ. Операция ω_2 выполнима только тогда, когда существует Σ-ветвь, функция которой равна ψ везде, где ψ равна 0 или I. Правая часть

Таблица 3

F	φ
0	0
∼	∼
1	1
I	1
I	∼

Таблица 4

До операции				После операции		
	F_i	F_j	ψ	f	F_i	F_j
0.1	0	0	~	0 I	0	0
0.2	~	0	~	0 I	~	0
0.3	1	0	0	0	1	0
0.4	I	0	0	0	I	0
0.5	I	0	0	0	I	0
1.1	~	~	~	0 I	~	~
1.2	1	~	~	0 I	1 (I)	$\bar{1}$ (I)
1.3	I	~	~	0 I	I (1)	$\bar{1}$ (I)
1.4	I	~	~	0 I	I	$\bar{I}$
2.2	1	1	~; 1	0 I	1 (I)	1 (I)
2.3	I	1	1	0 I	I I (1)	1 1 (I)
2.4	I	1	1	0 I	I	1 I
3.3	I	I	~; 1	0 I	I (1)	I (1)
3.4	I	I	1	0 I	I	I I
4.4	I	I	~	0 I	I	I

табл. 4 показывает, как надо изменить таблицы для F_i, F_j после присоединения выбранной Σ-ветви. Если f тождественно равна I, то U_i и U_j сливаются в один узел U. После присоединения Σ-ветви узлы U_i, U_j или один из них (или узел U) причисляются к заднпм, если множество P без них обладает свойством (а); иначе они причисляются к P. Указывается, что при неосторожном выполнении операции ω_2 могут появиться лишние контакты. Операция ω_3 является вспомогательной и состоит в распространении перемен, произошедших в таблицах функций узлов после операций ω_1 и ω_2, на таблицы всех узлов соответствующих I-подсхем. В целом построение схемы рекомендуется начать с операции ω_2 и затем чередовать операции ω_1 и ω_2, следя все время за экономией контактов. Когда не будет ни одного переднего узла, синтез окончен. В гл. 6 приведены два примера синтеза, в гл. 7 — выводы. Метод позволяет построить любую из возможных структур схемы без предварительного построения параллельно-последовательных двухполюсников, но не дает однозначного алгорифма для нахождения наилучшего решения. Однако, пользуясь общими рекомендациями о выборе операций ω_1 и ω_2, можно приблизиться к хорошему решению с помощью одной или нескольких попыток (вариантов). При каждой попытке строится полное решение. Качество решения зависит также от опытности проектировщика. В добавлении описан синтез дешифратора, переводящего код «Пауэрс» в код 8, 4,—2,—1 (в нормальном и дополнительном видах), называемый также кодом Рубинога. Сообщается, что независимо от Рубинова этот код предложил А. Свобода.

Примечание референта. Автор сообщил референту о следующих опечатках: 1) вместо рис. 5, 7 на стр. 226 должна быть табл. 2 к этому реферату; 2) на рис. 1, стр. 240, должно быть $x_5x_1x_3x_2x_1$; 3) на рис. 3, стр. 242, узлы X_7 и F_6 ошибочно соединены чертой и вместо $f_{10} = x_3x_3$ следует читать $f_{10} = \bar{x}_3$. Г. Н. Поваров

790. **Использование мнимых величин Галуа в теории автоматических механизмов. I. Схемы с вентильными элементами. Мойсил** (Intrebuinţarea imaginarelor lui Galois în teoria mecanismelor automate. I. Asupra schemelor cu elemente ventil. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. R. P. Române, 1954, **4**, № 11, 581—585 (рум.; резюме русс., франц.)

Рассматривается алгебра параллельно-последовательных двухполюсников, содержащих контакты реле и вентильные элементы. Двухполюсник AB называется нейтральным, если его проводимости χ_{BA} и χ_{AB} удовлетворяют соотношению $\chi_{AB} = \chi_{BA}$, и называется поляризованным или вентильным элементом в противном случае. Алгеброй нейтральных двухполюсников является двухэлементная булева алгебра L_2. Операции $x \cap y$ и $x \cup y$ даются таблицами:

∪	0	1
0	0	1
1	1	1

∩	0	1
0	0	0
1	0	1

Автор пользуется знаком $\cup$ для булева сложения (параллельное соединение) и знаком $\cap$ для булева умножения (последовательное соединение). Для описания поляризованных двухполюсников алгебра L_2 расширяется двумя элементами: a и b. Элементу a соответствует двухполюсник AB с проводимостями $\chi_{AB} = 1$, $\chi_{BA} = 0$, а элементу b — двухполюсник AB с проводимостями $\chi_{AB} = 0$, $\chi_{BA} = 1$. Алгебраически a и b характеризуются таблицами:

∪	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

∩	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

Доказывается, что такое расширение L_2 элементами a и b есть прямое произведение $L_2^2 = L_2 \times L_2$ и, следовательно, само является булевой алгеброй. Поэтому для каждого $x \in L_2^2$ существует отрицание Nx, а именно: $x \cup Nx = 1$, $x \cap Nx = 0$. В L_2^2 существует, кроме тождественного, автоморфизм S: $S(0) = 0$, $S(1) = 1$,

$S(a)=b$, $S(b)=a$. В L_2^2 вводятся операции «+» и «·» по следующим правилам:

$$x+y=(x\cap Ny)\cup(y\cap Nx)$$

$$x\cdot y=(x\cap y\cap Sx\cap Sy)\cup(Nx\cap Ny\cap Sx\cap Sy)\cup$$

$$\cup(x\cap y\cap Sx\cap NSy)\cup(x\cap y\cap NSx\cap Sy)\cup$$

$$\cup(x\cap Ny\cap NSx\cap Sy)\cup(Nx\cap Sx\cap y\cap NSy).$$

При определенных таким образом операциях «+» и «·» L_2^2 представляет собой поле Галуа $GF(2^2)$.

Примечание референта. Направления стрелок в правой части фиг. 9 должны быть заменены противоположными. В. М. Остиану

791. Использование мнимых величин Галуа в теории автоматических механизмов. II. Схемы с двумя промежуточными элементами. Мойсил (Întrebuinţarea imaginarelor lui Galois in teoria mecanismelor automate. II. Scheme cu două elemente intermediare. Moisil Gr. C.), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1954, 4, № 11—12, 587—589 (рум.; резюме русс., франц.)

Доказывается, что изучение однотактных схем с двумя промежуточными элементами сводится к изучению рекуррентных уравнений $z_{N+1}=az_N^3+bz_N^2+cz_N+d$ в поле Галуа $GF(2^2)$.

Утверждается, что изучение многотактных схем с двумя промежуточными элементами, состояние которых в такте $N+K$ зависит от состояния элементов в тактах $N+1$, $N+2,\ldots,N+K-1$, сводится к изучению рекуррентного уравнения $z_{N+K}=P(z_N, z_{N+1},\ldots,z_{N+K-1})$, где P есть полином K переменных над полем Галуа $GF(2^2)$, причем значения переменных $z_N,\ldots,z_{N+K-1}$ принадлежат тому же полю $GF(2^2)$. Указывается, что полученные результаты можно распространить на схемы с p промежуточными элементами, используя при этом поле Галуа $GF(2^p)$. В. М. Остиану

792. Некоторые математические вопросы переключения. Хон (Some mathematical aspects of switching. Hohn Franz), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 2, 75—90 (англ.)

На примере контактных схем иллюстрируется применение булевой алгебры в проектировании релейных схем. Объясняется методика описания параллельно-последовательных и мостиковых схем с помощью булевых функций, и приводятся основные формулы булевой алгебры. Перечисляются некоторые задачи синтеза контактных схем с минимумом контактов, попытки решения которых открыли много интересных алгебраических и геометрических свойств булевых функций (РЖМат, 1953, 1113; 1955, 3442; 4017). Рассказывается о задаче синтеза сложных релейно-контактных схем (выбор основных блоков). В заключение высказывается мысль о возможности создания общей математической теории дискретных процессов управления (digital control processes). Библиография — 16 книг и статей, опубликованных в США и Канаде. Г. Н. Поваров

793. Применения теории двоичных отношений к алгебре и к теории машин. Риге (Applications de la théorie des relations binaires à l'algèbre et à la théorie des machines. Riguet Jacques), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 60—61 (франц.)

Сообщается о применениях теории двоичных отношений, разработанной автором (Fondements de la théorie des relations benaires, Paris, 1951). Алгебраические применения относятся главным образом к кольцам последовательностей и кольцам матриц, опоры которых обладают специальными свойствами. Опорой (support) называется в случае последовательности u подмножество таких x, что $u(x)\neq 0$, а в случае матрицы α отношение, образованное такими (x, y), что $\alpha(x, y)\neq 0$. Переход от понятий, относящихся к одной переменной, к понятиям, относящимся ко многим переменным, осуществляется с помощью рациональных систем координат в смысле названной теории. Тем самым объединяются комбинаторный анализ, анализ подстановок, теория представления групп и т. д. Теория двоичных отношений позволяет создать механику отношений (mécanique relationnelle), проливающую, по словам автора, новый свет на кибернетические проблемы. Если ограничиться системами дискретных состояний, то машина определяется как отображение (application) множества состояний в себя. Снабдив это множество отношениями-координатами (coordonnées relationnelles), можно алгебраически определить соединение двух машин, что является основой механики отношений. Вместо введения координат можно воспользоваться тензорным исчислением отношений. Эта механика отношений была применена к релейным схемам, к алгебраизации работы больших вычислительных машин, к задачам кодирования, и была показана эквивалентность некоторых алгебраических задач с задачами теории машин (РЖМат, 1955, 2428). Сообщается, что автор вместе с Ашби (W. R. Ashby) алгебраизировал некоторые задачи кибернетики и установил некоторые статистические принципы, из которых следует как частный случай теория информации К. Шеннона. Г. Н. Поваров

794. Схемы, представляющие системы, подчиненные многозначной логике. Бадильо-Баралла (Esquemas representativos de sistemas regidos por una lógica polivalente. Badillo Barallat M. C.), Rev. cálculo automát. cibernét., 1955, 4, № 9, 54—62 (исп.; резюме англ.)

Рассматривается применение алгебры многозначной логики (РЖМат, 1955, 4016) к «электронным зубчатым колесам». „n-зубчатое колесо" в K-ом состоянии, где $0\leqslant K\leqslant n-1$, пропускает через себя серии не менее чем из $n-K$ импульсов. Максимальная длина серии импульсов равна n. Действуя на «колесо», импульс поворачивает его на один «зубец». Схема из «электронных колес», требующая серию из p импульсов, чтобы выдать импульс, называется первообразной при $p=n$ и производной при $p<n$. Два «колеса», находящиеся в состояниях r, s, называются включенными последовательно, если через их соединение проходят только серии импульсов длины $\min(r, s)$ и менее; «колеса» называются включенными параллельно, если через их соединение проходят только серии импульсов длины $\max(r, s)$ и менее. Буквы X, Y, Z обозначают схемы (redes), буквы x, y, z, ... — «колеса». Сложение малых букв обозначает последовательное включение «колес», умножение — параллельное. Доказывается, что для параллельно-последовательных схем из «электронных зубчатых колес» справедливы все постулаты алгебры многозначной логики. В заключение приводятся примеры производных схем и таблицы значений для последовательного и параллельного включений.

Примечание референта. В ссылке на статью Шеннона вместо vol. 57, 1938 ошибочно указано vol. 95, p. III, núm 36, julio 1948. Приведенные данные, повидимому, относятся к статье Монтгомери (Montgomerie G. A., Proc. Instn Electr. Engrs, 1948, 95, part III, № 36). Г. Н. Поваров

795 К. Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам. Тафт В. А., М., Изд-во АН СССР, 1954, 236 стр., 12 р. 25 к.

Дается систематическое рассмотрение вопросов синтеза линейных электрических цепей по заданным частотным характеристикам. Результаты применяются к расчету фильтров и корректирующих устройств. В книге 7 глав и 2 приложения.

В гл. I излагаются основы теории линейных электрических цепей. Рассматривается геометрическая (вернее сказать, топологическая) структура цепи и методика составления и преобразования уравнений цепи. Гл. II посвящена цепям со свойствами, заданными относительно входных зажимов. Здесь излагается теория четырехполюсников и 2 m-полюсников. В гл. III выводятся необходимые и достаточные условия физической осуществимости пассивных двухполюсников с различными элементами R, L, C, M, по входной характеристической функции полного сопротивления или полной проводимости. В гл. IV выводятся необходимые и достаточные условия физической осуществимости пассивных четырехполюсников и 2 m-полюсников с различными элементами R, L, C, M, по заданной матрице полного сопротивления или полной проводимости. В гл. V выводятся необходимые и достаточные условия физической осуществимости пассивного четырехполюсника по его коэффициенту передачи, заданному в виде рациональной дроби. Четырехполюсник нагружен произвольным пассивным двухполюсником. Гл. III, IV, V построены в значительной мере на предыдущих работах автора. В гл. VI излагается методика проектирования чебышевских фильтров по рабочему коэффициенту затухания, основанная на решении III задачи Е. И. Золотарева и ее обобщении Н. И. Ахиезером (Элементы теории эллиптических функций, М., ГТТИ, 1949). Эта методика кратко сравнивается с другими методами проектирования чебышевских фильтров, например, по коэффициенту передачи четырехполюсника. В гл. VII рассматривается синтез чебышевских четырехполюсников для коррекции модуля и аргумента коэффициента передачи. Даются методы исправления амплитудно-частотной характеристики на заданном интервале частоты без внесения искажений на остальном диапазоне частот и методы исправления фазо-частотной характеристики. Методика расчета корректирующих четырехполюсников опирается на решение III и IV задачи Е. И. Золотарева и может быть сведена к использованию кривых и таблиц для расчета фильтров. Результаты книги могут быть применены с помощью метода аналогий к механическим, электромеханическим и другим линейным динамическим системам.

В приложении I изложены основные положения теории наилучшего приближения. В приложении II приведены кривые и таблицы для расчета чебышевских фильтров и чебышевских корректирующих четырехполюсников по Кауэру (Cauer W., Theorie der Wechselstromschaltungen, Leipzig, 1941). Книга снабжена предисловием В. И. Коваленкова. Книга может быть полезна для инженеров, научных работников и аспирантов, особенно в области связи. Библ. 115 назв. (по 1952 г.)

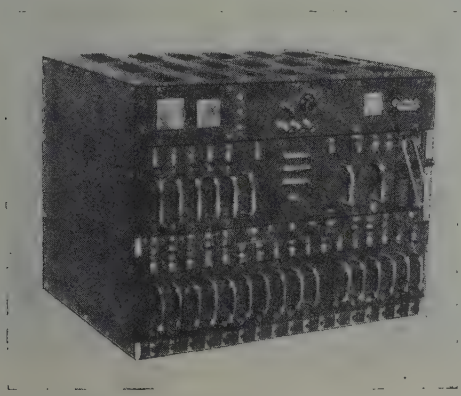
Г. Н. Поваров

См. также: 359

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

796. Самолетная цифровая вычислительная машина «Диджитак». Болс (The digitac airborne digital computer. Bolles E. E.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 5, 72—76 (англ.)

Описывается цифровая вычислительная машина «Диджитак», входящая в систему автоматического управления полетом и бомбометанием (см. фото). «Диджитак» является последовательной двухадресной машиной с 17 двоичными разрядами. Машина может выполнять 37 операций, из которых 13 являются арифметическими действиями и операциями, связанными с передачей информации. Для уменьшения времени вычислений результат какого-либо действия может быть использован как исходное число для другой операции без обращения к запоминающему устройству. Для выполнения таких действий имеются операции специального умножения, деления, сложения, вычитания. Остальные 24 операции служат для управления входными и выходными данными для решения задач навигации и бомбометания. Арифметический узел состоит из 3 регистров, сумматора и цепей операций со знаками чисел. Программа вычислений составлена так, что машина контролирует входные данные и в случае, если они не укладываются в допустимые пределы, использует предыдущие данные. В случае пропадания сигналов от наземных радиостанций гиперболической навигационной системы, с которой работает «Диджитак», машина автоматически переходит на метод определения места самолета с помощью навигационных вычислений («вспомогательная программа»). При достижении самолетом места назначения машина автоматически переходит либо к вычислению задачи бомбометания, либо ведет к следующему назначенному месту. Машина может быть запрограммирована на последовательное прохождение 20—30 путевых точек. Нормально вычислительный цикл длится 0,5 сек. За это время машина проделывает около 360 операций. Общее количество команд, необходимое для решения всех встречающихся в полете задач, включая и бомбометание, равно приблизительно 700. Побочные задачи не увеличивают времени вычислительного цикла, так как они могут выполняться во время работы по «вспомогательной программе», занимающей меньше времени, чем основная. Чтобы получить возможность выполнять добавочные вычисления, машина периодически (через 32 цикла) принудительно переводится на работу по «вспомогательной программе». Для уменьшения погрешностей,



К реф. 796

связанных с методами измерения разности времени, шумами, помехами и т. п., окончательные результаты получаются усреднением. Запоминающее устройство машины состоит из магнитного барабана диаметром 100 *мм* и длиной 200 *мм*, вращающегося со скоростью 7000 об/мин. Частота импульсов равна 100 *кгц*. Плотность записи приблизительно 3 импульса на 1 *мм*. Имеется 16 головок для записи команд, 6 головок для записи постоянных и промежуточных результатов и 2 маркерные головки. Кроме того, для запоминания промежуточных результатов имеется быстродействующий регистр на 6 чисел. Сигналы при чтении, получаемые после головки, превышают 1 *в*. Это позволяет осуществлять непосредственную коммутацию головок и использовать один усилитель на несколько головок. Машина содержит 260 ламп и 1300 диодов. Общая потребляемая мощность 1,3 *квт*. Все узлы машины монтируются на съемных шасси, которые размещаются в общем кожухе размерами 500×650×475 *мм*.

А. И. Щуров

797. Цифровой блок связи с автопилотом. Экснер, Скарбро (A digital autopilot coupler. Exner W. L., Scarbrough A. D.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 5, 174—178 (англ.)

Описывается устройство, служащее для связи цифровой вычислительной машины с автопилотом в автоматической самолетной системе управления «Диджитак». Датчиком курса в системе является гирокомпас. Поправка курса вычисляется цифровой вычислительной машиной и вводится через блок связи в автопилот. Сложение компасного курса с поправкой курса происходит на дифференциальном сельсине. Поправка курса самолета в виде числа в двоичной форме вдвигается в специальный регистр счетчика из семи разрядов (плюс разряд знака), и на счетчик подаются импульсы. Как только счетчик досчитывает до 0, подача импульсов счета автоматически прекращается.

Каждый импульс при досчете поворачивает на 1/50 оборота мотор отметки в направлении, указанном разрядом знака. Мотор отметки вращает через редуктор дифференциальный сельсин, вводя поправку курса в автопилот. Редуктор с передаточным отношением 36/1 обеспечивает изменение курса на 1/5 градуса при каждом импульсе. Полная емкость регистра дает возможность осуществлять повороты в пределах 12,6 градуса. Выдача результата производится каждые 0,5 сек. вне зависимости от того, досчитал счетчик до 0 или нет. Для предотвращения ложных эволюций самолета при малом управляющем сигнале в счетчике, скорость импульсов счета автоматически меняется в пределах от 4 до 15 *гц* в зависимости от величины сигнала управления. При выполнении поворотов, превышающих 12,6 градуса, счетчик полностью заполняется и частота импульсов счета увеличивается до 30 *гц*. При такой большой скорости сельсина автопилот поддерживает крен самолета постоянным и максимально допустимым (20 градусов). Подобная работа продолжается до тех пор, пока сигнал управления не уменьшается до величины емкости регистра счетчика. Это говорит о том, что самолет находится в пределах 12,6 градусов от заданного курса. Подача импульсов прекращается на 5 сек. и самолету дается возможность выйти из крена, приблизительно вернувшись на курс. А. И. Щуров

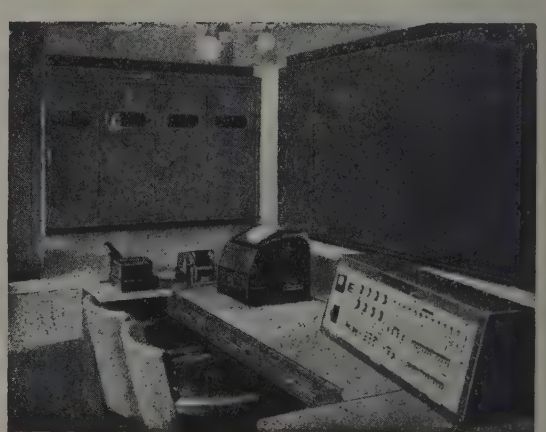
798. Полетные испытания самолетной цифровой вычислительной машины. Грабб, Бербек, Нейстер (Flight testing of an airborne digital computer. Grabbe E. M., Burbeck D. W., Neister S. B.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, 5, 66—71 (англ.)

Описаны полетные испытания самолетной цифровой вычислительной машины «Диджитак», работающей с гиперболической навигационной системой. Самолетное оборудование системы «Диджитак», проходившее испытания, состояло из приемника, цепей измерения времени, цепей преобразования входных данных в цифровую форму, цифровой вычислительной машины, блока связи с автопилотом и выходных цепей. Полетные испытания проводились на грузовом самолете, оборудованном автопилотом типа Е-6 и гирокомпасом типа J-6. Длина базисных линий гиперболической навигационной системы равнялась приблизительно 10 *км*. Основной целью полетных испытаний было выяснение точности навигационных вычислений, точности автоматического управления, а также сравнение точностей ведения самолета через заданные путевые точки при управлении пилотом по результатам вычислений и автоматическом управлении с помощью блока связи с автопилотом. Полетным испытаниям предшествовали наземные испытания для выяснения точности измерения разности времени. Для этого координаты, полученные замером двух разностей времени, сравнивались с геодезическими координатами контрольных точек. Эта точность оказалась равной 0,02 *мксек*. При полетных испытаниях широко использовалась записывающая аппаратура. Входные и выходные данные могли по желанию извлекаться на электроннолучевую трубку и фотографироваться приблизительно через каждые 0,5 сек. полета. Перед полетом программа вычислений машины проверялась на специальном устройстве, имитирующем полет. Результаты испытаний показали, что автоматическое управление полетом ведется более точно, чем ручное, и линия курса ближе к прямой.

А. И. Щуров

799. Японская автоматическая цифровая вычислительная машина ТАК), (東京自動電子算盤機 TAC), 東芝レビュー (Тосиба рэбю), 1955, 10, № 4, 381 (япон.)

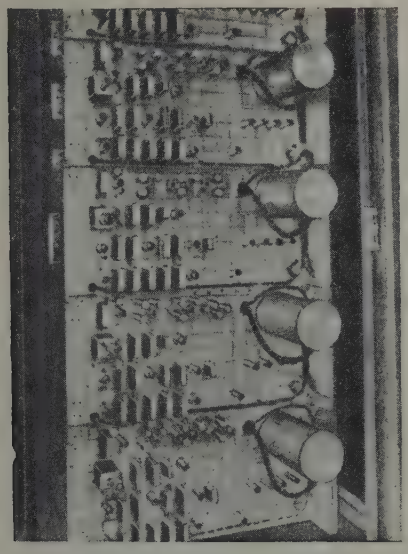
Японской фирмой «Токио Сибаура» в 1954 г. построена автоматическая вычислительная машина ТАК (TAC — Tokyo Automatic Digital Computer) (см. фиг. 1). Машина установлена в Токийском университете. Машина имеет арифметическое устройство, контрольное



К реф. 799 Фиг. 1

устройство, быстродействующее запоминающее устройство (см. фиг. 2), запоминающее устройство на магнитном барабане, устройство ввода и вывода, блок питания. Всего в машине насчитывается около 1000 ламп, 9 специальных ламп Брауна и 1800 германиевых диодов. Машина смонтирована на 9 блоках, каждый из которых имеет размеры 2×1×1 *м*.

Оперируя с 34-разрядными двоичными или 10-разрядными десятичными числами, машина выполняет сложение за 5 мсек, умножение и деление за 1/300 сек.



К реф. 799 Фиг. 2

800. **Вычислительная машина фирмы «Ремингтон Ранд» с автоматическим управлением. Коэн** (Las Calculadoras aritméticas de la Remington Rand en las instalaciones de cálculo y gobierno automáticos. Cohen Arnold A.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1954, 3, № 8, 33—39 (исп.)

Краткое описание машины ИРА-1103 (ERA-1103) (РЖМат, 1954, 1849; 1955, 988). Приведена принципиальная блок-схема машины и рассмотрены некоторые особенности программирования для нее.

К. А. Семендяев

801. **Простая цифровая вычислительная машина** (No genius, but it's smart), Business Week, 1954, № 1289, 75—76 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 4028. Дополнительно сообщается, что в машине 163 электронные лампы, не считая германиевых диодов. Стоимость машины 30 000 долл.

С. Е. Жорно

802. **Электронная вычислительная машина Национального бюро стандартов ДИСЕАК** (DYSEAC — an NBS electronic computer), Radio-Electronic Engng, 1955, 24, № 1, 38 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 987.

803. **Автоматические вычислительные машины. Распределение по фирмам-изготовителям. Сводный список, по состоянию на декабрь 1954 г.** (Automatic computers — Estimated commercial population. Cumulative, information as of December, 1954), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 30 (англ.)

Приводится список фирм и организаций, изготовляющих вычислительные машины общего назначения. Кроме названия организации, в списке указаны названия изготовляемых машин и количество этих машин, находящихся в эксплуатации. В список включено 10 организаций. Указано, в частности, что фирмой ИБМ выпущено в эксплуатацию около 2500 машин всех типов (включая 604, 607 и серию 700).

804. **Электронная вычислительная машина на колесах** (Electronic computer on wheels), Automot. Inds, 1954, 111, № 3, 58—59 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 987.

805. **Автоматические цифровые вычислительные машины и их применение в нефтяной промышленности. Тюринг** (Programmgesteuerte Rechenmaschinen und ihr Einsatz in der Erdöl-Industrie. Thüring), Erdöl-Ztg, 1954, 70, № 1, 9—10 (нем.)

Сообщается, что вычислительная машина Цузе-5 использовалась для расчета крекинг-процесса. При этом скорость вычисления выросла в 20 раз по сравнению с ручным вычислением на арифмометрах.

Г. И. Танетов

806. **Электронные вычислительные машины и промышленная математика. Дагналл, Майклсон** (Electronic computers and industrial mathematics. Dagnall B. D., Michaelson R. L.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, 14, № 10, 487—496 (англ.)

Краткое изложение ряда общих вопросов, связанных с современными вычислительными машинами. Описаны отдельные узлы вычислительной машины и их логические схемы. Разобраны примеры программирования.

Д. Ф. Шапошников

807. **Обучение и исследования, проводимые в Институте прикладной математики Высшей технической школы Дармштадта. Леземанн** (Unterricht und Forschung im Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt. Lesemann Klaus-Jürgen), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1953/54, 3, № 1, 23—26 (нем.)

В статье говорится о работе Института прикладной математики, основанного в 1928 г. в Дармштадте. Институт занимается обучением, в основу которого положены следующие принципы: 1) тесная связь теории с практикой, 2) возможность самостоятельного изучения материала учащимися. Большую часть работы Института занимают научные исследования (составление таблиц специальных функций, разработка необходимых методов и вычислительных работ в прикладной математике) и разработка и построение математических машин и инструментов (с 1935 г. последнее является главной темой Института).

Первые работы по конструированию интеграторов были проведены в Институте в 1938—1939 гг. Институт занимается разработкой электронных интегрирующих устройств. В специальной лаборатории Института разрабатывается быстродействующая вычислительная машина с автоматическим управлением. В этой машине запланировано представлять числа в виде $z = \pm a \cdot 10^b$, где $-63 < b < 63$, а $a = 12$. Каждое 12-значное число передается по 4 каналам параллельно определенной последовательной комбинацией импульсов особого двоично-десятичного кода. Время сложения двух 12-значных чисел равно 0,6 мсек; умножение происходит за 15 мсек. Арифметическое устройство построено в основном на селеновых выпрямителях, германиевых диодах и сопротивлениях, лампы установлены только в немногих местах. Запоминающее устройство (ЗУ) состоит из двух частей. Главным ЗУ служит магнитный барабан, который может запоминать 10 000 чисел и 10 000 команд. В качестве оперативного ЗУ применяется ЗУ на ферритовых сердечниках. Первые практические работы и испытания отдельных узлов машины произведены в 1952 г. В настоящее время проверены основные принципы, изготовлены малые макеты арифметического устройства, главного и оперативного ЗУ.

Ю. И. Кондратьева

808. **Электронная машина подсчитывает очки на студенческих экзаменах** (Electronic «brain» scores

students' tests), Sci. News Letter, 1953, 64, № 21, 323 (англ.)

Сообщение о проекте устройства для подсчета очков на экзаменах, состоящего из автоматической машины для подсчета очков, соединенного со специальной электронной вычислительной машиной и выходным печатающим устройством. Устройство может быть также использовано для обработки статистических данных. Ожидается, что изготовление установки займет около года. Л. А. Любович

809. Моделирующие устройства для обработки данных с беспорядочными колебаниями. Смит (Analog equipment for processing randomly fluctuating data. Smith Francis B.), Preprints Ann. Meeting. Inst. Aeronaut. Sci., 1955, № 545, 18 p., 11 figs (англ.)

В исследовательской работе по аэронавигации возникает необходимость исследовать явления, в которых имеют место флюктуационные колебания параметров и где измерение средних или сглаженных значений параметров необходимо, но не достаточно. Типичными примерами являются: ошибки прицеливания в системе управления огнем; нагрузки на самолет, возникающие из-за турбулентности или вибраций; нагрузки на шасси самолета, возникающие из-за неровностей взлетно-посадочной полосы и т. п. Для проведения статистического анализа автор использует оборудование, состоящее из 4 основных элементов: 1) запоминающее устройство на магнитной ленте с системой воспроизведения; 2) анализатор распределения вероятности; 3) анализатор спектральной плотности энергии; 4) анализатор перекрестной спектральной плотности.

1. Для записи используется метод частотной модуляции, позволяющий записывать самые низкие частоты, а также избавиться от амплитудных искажений, имеющих место при непосредственной записи из-за несовершенства поверхности магнитной ленты. Использование магнитофона обеспечивает гибкость в обращении с записями данных. Длина записи может быть расширена или сжата в 240 раз простым изменением скорости движения ленты. Могут быть записаны и воспроизведены процессы длительностью от 1 сек. до нескольких минут, содержащие частоты от 0 до 6—7 *кгц* и более.

2. Анализ распределения вероятности производится следующим образом: запись процесса непрерывно воспроизводится с бесконечной магнитной ленты и пропускается через анализатор. Мгновенные значения данных сравниваются с опорным напряжением. Если напряжение на входе анализатора превысит опорный уровень, то усилитель-ограничитель даст на выходе одно значение напряжения B, если напряжение на входе окажется ниже опорного уровня, то усилитель будет заперт и даст на выходе другое значение напряжения A. Процент времени, в течение которого выходное напряжение находится около уровня B, и представляет вероятность превышения опорного уровня напряжением входного сигнала анализатора. Изменяя уровень опорного напряжения и регистрируя с помощью самописца значение вероятности для каждого значения опорного уровня, получают плавную кривую распределения вероятности.

3. Распределение вероятности является характеристикой по интенсивности и совершенно не отражает частотных или спектральных свойств исследуемой системы. Распределение плотности энергии по частотам является частотной характеристикой системы, позволяющей легко установить взаимосвязь между входом и выходом системы при наличии передаточной функции последней. Спектральная плотность энергии представляется как квадрат амплитуды сигнала на единицу полосы пропускания. Получают эту характеристику следующим образом. Запись процессса непрерывно воспроизводится с бесконечной магнитной ленты и подается на вход анализатора, состоящего из полосового фильтра и множительного устройства. Полосовой фильтр пропускает сигнал определенной частоты, множительное устройство возводит в квадрат выходной сигнал полосового фильтра. Усредненные значения выходного сигнала анализатора регистрируются самописцем. Полосовой фильтр плавно перестраивается с одной частоты на другую. Фиксируя значения выходного сигнала анализатора для каждой частоты полосового фильтра, получают плавную кривую распределения энергии по частотному диапазону. Полоса пропускания фильтра, используемого автором, могла быть изменена в пределах от 0,5 *гц* до 200 *гц*. Изменением скорости движения ленты можно получить эквивалентную полосу пропускания фильтра менее 0,01 *гц* и перекрыть диапазон частот от нескольких сотых герца до 50—60 *кгц*.

4. Часто при исследовании двух или нескольких взаимно связанных флюктуационных процессов возникает необходимость установить временное или фазовое соответствие этих процессов. Такого рода данные можно получить из перекрестного спектра, являющегося векторной величиной. Перекрестный спектр представляется векторной комбинацией двух спектров: «взаимного энергетического спектра», представляющего действительную компоненту перекрестного спектра, и «квадратурного спектра», представляющего мнимую компоненту перекрестного спектра. Взаимный спектр двух функций получают в результате того, что сигналы записей процессов воспроизводятся синхронно и пропускаются через идентичные полосовые фильтры, а затем через множительное устройство, где происходит взаимное перемножение составляющих сигналов этих процессов. Следовательно, анализатор имеет на выходе сигнал лишь при наличии составляющих данной частоты в сигналах каждого из процессов и совпадении их по фазе. Квадратурный спектр получают таким же способом, сдвигая лишь компоненту одной из функций на 90° перед подачей на множительное устройство. Абсолютную величину и фазовый угол перекрестного спектра получают в результате векторного сложения взаимного энергетического и квадратурного спектров.

Как указывает автор, точность работы вышеуказанных моделирующих устройств 10—20%, что является вполне удовлетворительным при исследовании процессов, подчиняющихся законам статистики.

Действие списываемых в статье устройств иллюстрируется рисунками блок-схем этих устройств и графиками исследуемых явлений и результатов статистической обработки последних. Б. И. Шитиков

810. Моделирующее устройство для операций с векторами (Complex plane analyzer), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 10, 1007 (англ.)

Сообщение фирмы «Технолоджи Инструмент Корпорейшн» (Technology Instrument Corp.) о выпуске моделирующего устройства, предназначенного для расчета систем автоматического управления. Устройство перемножает и делит векторы, выраженные в тригонометрической форме. Модуль и аргумент результата вычисляются одновременно и фиксируются индикаторами. Одновременно устройство может перемножить или разделить до десяти векторов. Пределы измерения аргумента от —3600° до +3600°, пределы измерения модуля от 10^{-10} до 10^{10}. Точность вычислений не ниже 1%. Входное устройство вводит в вычислительные цепи значения постоянных напряжений, пропорциональные аргументу и логарифму модуля вектора. Эти напряжения вырабатываются двумя прецизионными потенциометрами, линейным и логарифмическим. Величины напряжений запоминаются в двух блоках высоко-

качественных конденсаторов. Полярность заряда каждой пары конденсаторов, соответствующей одному вектору, определяется тем, является ли этот вектор множителем или делителем. После ввода и запоминания всех векторов производится измерение результирующего напряжения каждого блока конденсаторов электрометрическим каскадом с входным сопротивлением 10^6 *Ом*.

Устройство дает возможность рассчитать частотные характеристики, переходные процессы и особые точки решения для систем как с разомкнутой, так и замкнутой петлей обратной связи, а также получить ответ на вопрос о реакции системы на внешнее воздействие, имеющее форму импульса, единичного скачка, экспоненты или другую форму. Е. Ф. Бережной

811. **Моделирующее устройство** (Analog computer), Instruments, 1953, 26, № 11, 1654 (англ.)

См. реф. 810.

812. **Современный взгляд на моделирующие устройства. Кан** (A new concept in analog computers. Cahn Lee), Proc. Western Computer Conf. (Febr. 1953), New York, N. Y., 1953, 196—202 (англ.)

Указывается, что использование чисто электронных моделирующих устройств без применения электромеханических элементов привело к снижению стоимости устройств и увеличению скорости действия, что, в свою очередь, позволило понизить требования к стабильности операционных усилителей. Кроме того, упростилось обслуживание устройств. Дается подробная сравнительная оценка возможностей использования новых и старых моделирующих устройств. В. П. Парамонов

813. **Решение нестационарных тепловых задач с помощью электрического моделирования. Лоусон, Мак-Гуайр** (The solution of transient heat-flow problems by analogous electrical networks. Lawson D. I., McGuire J. H.), Proc. Instn Mech. Engrs, 1953, **167**, № 3, 275—290 (англ.)

Подробно описывается способ определения температуры внутри материалов и составных структур, помещенных в условия, подобные имеющимся в пламени. Исследование проводилось с помощью электрической модели, а решение получалось на экране катодолучевой трубки. Особенностью описываемой модели является введение специального нелинейного сопротивления для моделирования процесса теплопередачи путем радиации и путем конвекции. Для нелинейного сопротивления применен новый материал «метросил».

В модели предусмотрена возможность задания поразному изменяющихся температур окружающей среды. Существенное место в работе уделено теоретическому определению возможной погрешности устройства при различном числе элементарных ячеек схемы. Приводится полная схема генератора импульсов для задания граничных условий и схема «шкалы времени» для двухлучевого осциллографа.

Библ. по статье — 10 назв., по дискуссии — 14 назв. Н. В. Корольков

814. **Использование моделирующих устройств при исследовании тепловых процессов. Кейян** (Electrical analogger application to the heat pump process. Kayan Carl F.), Heat, Piping and Air Condit., 1953, **25**, № 8, 123—127 (англ.)

Описывается метод использования моделирующих устройств для исследования тепловых процессов, наблюдаемых в конденсационных системах с переменной температурой как пара, так и охлаждающей воды. На основе структурного сходства уравнений, описывающих тепловые процессы в системе охлаждения и процессы в электрических цепях, выбирается схема моделирующего устройства.

Полученные результаты моделирующих устройств обладают достаточной степенью точности, что подтверждается сравнением опытных данных с расчетными. А. А. Крюков

815. **Точность моделирующих устройств. Кан** (Accuracy of an analog computer. Cahn Lee), Trans. I. R. E., 1953, **EC-2**, № 4, 12—18 (англ.)

Исследуется общая точность работы моделирующих устройств и зависимость ее от точности работы отдельных узлов устройства и точности используемых данных. Оценивается точность работы усилителя. Рассматриваются амплитудные и фазовые искажения усилителя. Особое внимание уделяется дрейфу нуля, который вносит наиболее ощутимую погрешность в работу моделирующего устройства. Дается анализ влияния времени и частоты на эффект дрейфа нуля. Указывается, что скорость дрейфа нуля зависит от времени и от максимальной частоты весьма сложным образом, ввиду чего при его оценке метод суперпозиции не применим. Г. К. Кузьминок

816. **Анализ математических проблем** (Analysing mathematical problems), Overseas Engr, 1955, 28, № 325, 217 (англ.)

Краткое сообщение о механическом моделирующем устройстве для решения дифференциальных уравнений, построенном в Национальной физической лаборатории (National Physical Laboratory). В. В Карибский

817. **Моделирующее устройство общего назначения** (General purpose analogue computor), Interavia, 1954, 9, № 11, 752 (англ.)

Описывается моделирующее устройство фирмы «Шорт» (Short Brothers and Harland Ltd.) (РЖМат, 1954, 3495). Дополнительно сообщается, что решение периодизируется с частотой 15 *гц* и может наблюдаться на экране двухлучевой катодной трубки с длительным послесвечением. Второй луч катодной трубки используется как шкала времени, имеющая 10 диапазонов. Решение может быть записано также самописцем. В модели применена система автоматической компенсации дрейфа нуля. Точность отдельных усилителей $\pm 1\%$. Б. Ш. Берковин

818. **Конструкция электродинамического умножителя. Дили** (The design of an electrodynamic multiplier. Deely E. M.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, **101**, part 4, № 7, 187—191 (англ.)

Описано устройство прибора, измеряющего произведение двух напряжений, приложенных к его входу. Основой конструкции является электроннолучевая трубка с электростатическим отклонением, коаксиально с горловиной которой расположена катушка индуктивности. Против экрана трубки, наполовину покрытого непрозрачным веществом, смонтирован фотоумножитель, электрически связанный с вертикально отклоняющими пластинами. До начала измерений луч устанавливается в центре экрана на грани затемненного сегмента. Одно из исследуемых напряжений подводится к горизонтально отклоняющим пластинам трубки, другое через усилитель постоянного тока подается на катушку индуктивности таким образом, что ток катушки оказывается пропорциональным входному напряжению усилителя. В результате луч будет отклоняться за пределы затемненного сегмента в вертикальном направлении пропорционально произведению исследуемых напряжений. При этом фотоумножитель создает на вертикальных пластинах трубки противодействующее напряжение, возвращающее луч в первоначальное положение. Величина этого напряжения будет равна искомому произведению. В диапазоне частот 0—5 *кгц* систематическая погрешность прибора не превышает 2% М. Г.

819. **Новый метод генерирования функций. Полимеру** (A new method of generating functions. Polimerou Lazarus G.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 3, 29—34 (англ.)

Заданная функция и линия отсчета изображаются прозрачными линиями на непрозрачной ширме. Электронный луч «осматривает» ширму с частотой 2000 *гц*. При пересечении лучом прозрачных линий два фотоумножителя вырабатывают импульсы тока. Импульсная система преобразует интервалы времени между импульсами в напряжение, изменяющееся во времени соответственно заданной функции. Макет функционального генератора показал ровную частотную характеристику до 7 *гц* и точность воспроизведения функции $\pm$ 1,5%. Даны методы улучшения частотной характеристики до 100 *гц* и точности до $\pm$ 0,5%. Для сравнения приведены принципы работы и данные других функциональных генераторов. П. В. Тихонов

820. **Синусно-косинусный механизм для моделирующих устройств** (Sine-cosine mechanism for analog computers), Prod. Engng, 1953, 24, № 12, 257 (англ.)

Сообщение фирмы «Либраскоп» (Librascope Inc.) о механизме для преобразования углового вращательного движения в линейное перемещение по закону синуса или косинуса.

Вес устройства около 60 *г*, точность 0,2% от всей шкалы. Приводится фото внешнего вида механизма. В. П. Разроев

821. **Разработка очень легких блоков вычислительных устройств. Хачек** (Computer: develop flyweight unit. Hatschek R. L.), Iron Age, 1954, 173, № 5, 84 (англ.)

Сообщение о миниатюрных блоках для моделирующих устройств фирмы «Арма» (РЖМат, 1955, 2454). Блок может суммировать, вычитать, множить, делить, интегрировать и производить операции над векторами. Работа блока основывается на изменениях сопротивлений элементов из никелевой проволоки при нагреве их электрическим током, проходящим через нагреватель из нихромовой спирали. Эти изменения воспринимаются мостом Уитстона. Скорость работы блока повышается путем ввода положительной обратной связи через усилитель. Рабочие элементы и нагреватели помещаются в цилиндре, наполненном порошком слюды для теплоизоляции и амортизации ударов. Существенной особенностью является независимость работы от частоты электрического тока. Частотная характеристика начинается от нуля герц.

Потребляемая мощность мала, что дает возможность усилители для блоков делать на полупроводниковых триодах и получать дальнейшую экономию в весе и размере. Размер блока равен примерно размеру обычной приемно-усилительной лампы, и электрическая связь с другими элементами устройства может осуществляться как и для лампы.

Время выполнения одной операции равно примерно 10 *мсек*. Устройство из этих блоков работоспособно в широком диапазоне температур, так как работа блоков основана на использовании разности температур.

Отмечены следующие ограничения. Порог чувствительности, определяемый уровнем шумов, равен примерно 5 *мв* при сигнале 10 *в*. Нагрев деталей блока в процессе работы дает ошибку порядка 0,1%. Блоки уже использовались для ряда специальных устройств. Е. Ф. Бережной

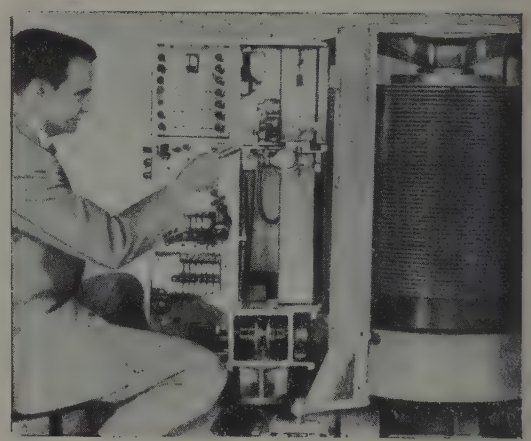
822. **Ответы заранее** (Answers in advance), Instrumentation, 1954, 7, № 3, 22 (англ.)

Сообщение о вычислительном центре фирмы «Миннеаполис-Хонейвелл». Центр располагает большим количеством моделирующих устройств. А. И. Щуров

823. **Новое моделирующее устройство** (News of analog computer), Cornell Engr, 1953, 19, № 2, 44 (англ.) См. РЖМат, 1954, 3879.

824. **Магнитное запоминающее устройство ИБМ-305** (Magnetic memory goes juke box), Electronics, 1955, 28, № 6, 10 (англ.)

Приводятся некоторые данные о новом магнитном запоминающем устройстве ИБМ-305 фирмы ИБМ. Устройство состоит из набора магнитных дисков, по внешнему виду напоминающих граммпластинки. Запись данных производится на концентрических дорожках с обеих сторон диска. Диски расположены на одной оси параллельно, и число их может быть увеличено почти неограниченно. Головка для записи и считывания расположена сбоку дисков. Электронное устройство, в зависимости от выбранной стороны диска и дорожки, управляет положением головки с помощью пневматического привода. Для создания необходимого зазора между головкой и диском, а также для предохранения магнитного слоя дорожки через головку проходит под давлением воздух, который по выходе из нее создает воздушную подушку.



К реф. 824

Емкость запоминающего устройства 5 млн. знаков. Устройство позволяет производить запись данных по мере их поступления. Сообщается, что такие устройства будут использованы в новой серии вычислительных машин ИБМ. Приводится общий вид устройства (см. фото).

825. **Новое запоминающее устройство, использующее магнитную ленту. Лоран** (A new magnetic tape «memory». Lorant M.), Electronic Engng, 1953, 25, № 301, 97 (англ.)

Краткая заметка относительно конструкции нового дополнительного внешнего запоминающего устройства, расширяющего вычислительные возможности электронной машины СЕАК (SEAC).

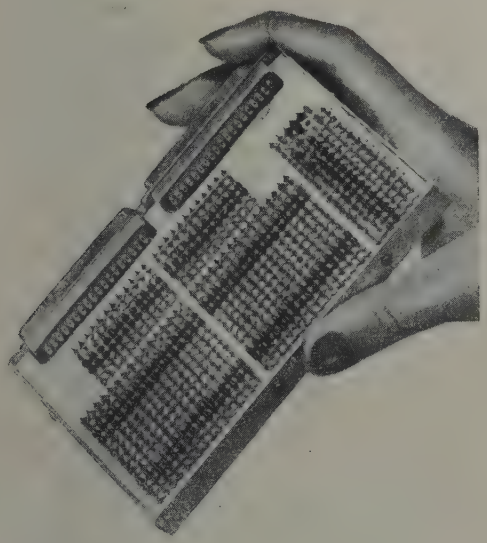
Устройство выполнено с использованием магнитной ленты. Лента свободно лежит между двумя непрерывно вращающимися в разные стороны полированными роликами. Движение ленты через магнитные головки при записи, считывании и стирании кодов чисел осуществляется при помощи вспомогательного покрытого резиной ролика, который прижимает ленту к одному из вращающихся полированных роликов. Вспомогательный ролик управляется одним из двух соленоидов, в зависимости от направления движения ленты.

При конструировании устройства было обращено внимание на факторы, ограничивающие скорость движения ленты: накопление электростатических зарядов вследствие трения и возможность стирания записи, а также на улучшение качества магнитной ленты. Н. И. Бродович

826. **Новая матрица для вычислительной машины имеет большое число деталей на единицу площади**

(New computer matrix has high component density), Electronics, 1954, 27, № 10, 265 (англ.)

Сообщение фирмы «Хьюз» (Hughes) о выпуске экспериментальной дешифраторной матрицы (см. фото) для авиационной вычислительной машины. Матрица использует сверхминиатюрные германиевые диоды той же фирмы и имеет габариты 130×78×12 *мм*, включая рамку и разъем, и содержит 504 диода и 209 сопротивлений.



К реф. 826

Размер самого диода 6,5×3,25 *мм*. Средняя плотность деталей, равная 6 деталей/*см*^{3}, достигнута благодаря применению вместо пайки коденсаторной точечной сварки, позволяющей крепить германиевые диоды у самого их корпуса без опасного нагрева самого кристалла. А. Б. Залкинд

827. **Блок моделирующего устройства** (Analog computing unit), Mach. Design, 1953, 25, № 12, 326, 328 (англ.)

Сообщение фирмы „Филбрик" (George A. Philbrick Researches Inc.) о разработке стандартного операционного блока, состоящего из 10 усилителей, размещенных на специальном шасси. Все соединения между усилителями выполнены внутри блока. Приспособления для установки нуля выведены наружу; здесь же предусмотрены мнемонические схемы, используемые при наборе задач. Усилитель имеет 4 клеммы (+ вход, — вход, выход и земля). Предусмотрена искусственная периодизация процесса решения с периодом от 0,001 сек. до нескольких минут. Для питания установки требуются источники постоянного тока 300 *в* 50 *ма* и переменного тока 115 *в* 0,5 *а*. Б. Я. Коган

828. **Блок декадных сопротивлений** (Plug-in resistance decades), Instruments, 1953, 26, № 5, 681—682 (англ.)

Сообщение фирмы «Гудиир» (Goodyear Aircraft) о выпуске блока декадных сопротивлений для моделирующего устройства ГЕДА-Л3 (L3-GEDA). Выпускается два типа блоков с максимальной величиной сопротивления 1 *Мом* и 10 *Мом* соответственно. Каждый блок имеет 3 лимба, посредством которых требуемое сопротивление может быть установлено с точностью до 1%. Приводится фото блока. А. Б. Залкинд

829. **Сменные блоки декадных сопротивлений для вычислительных машин** (Plug-in decade resistance unit for computers), Prod. Engng, 1953, 24, № 9, 218 (англ.)

830. **Низкочастотный генератор. Хау, Лейт** (A low-frequency oscillator. Howe R. M., Leite R. J.), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 10, 901—903 (англ.)

Описывается низкочастотный генератор простых гармонических колебаний, который, по мнению авторов, часто используется в измерительных приборах, сервомеханизмах и моделирующих устройствах. Этот небольшой, компактный генератор дает на выходе синусоидальные колебания в диапазоне частот от 0,0016 до 16 *гц* с шагом 0,0016 *гц* и с ошибкой менее 0,1%. Максимальное выходное напряжение при нагрузке 100 *ком* составляет 90 *в*. Приводится схема генератора. Г. К. Кузьминок

831. **Источник питания для вычислительного устройства** (Computer power supply), Instruments and Automat., 1954, 27, № 3, 384, 386 (англ.)

Сообщение фирмы «Магнетик Рисёрч» (Magnetic Research Corp.) о выпуске выпрямителей с автоматическим магнитным регулированием. Поддержание напряжения при изменении параметров питающей сети осуществляется с точностью до 0,1%. При изменении напряжения сети от 95 до 135 *в* и частоты от 57 до 60 *гц* выходное напряжение изменяется менее чем на 0,1%. Точность регулирования напряжения в статическом режиме при изменении нагрузки с нулевой и до ее максимального значения, выше чем 0,15%. При резком изменении нагрузки на 20% регулирование выполняется с точностью до 0,2%.

Источники питания выпускаются на выпрямленные напряжения от 1,5 до 500 *в* и токи от 1 до 100 *а*. В. Б.

832. **Последовательные цифровые сумматоры для сложения чисел с разными основаниями системы счисления. Таунсенд** (Serial digital adders for a variable radix of notation. Townsend R.), Electronic Engng, 1953, 25, № 308, 410—416 (англ.)

В статье дано описание четырех различных методов суммирования чисел, причем каждое число представлено последовательными группами по четыре двоичных разряда. Таким образом, каждая группа может изображать различные основания системы счисления до 16. Сумматоры сделаны таким образом, что при получении в группе числа большего, чем основание системы, в следующую группу будет осуществлен перенос.

Осование системы счисления может изменяться в процессе вычислений, так что можно складывать количества с разными основаниями (например, меры веса, денежные единицы и т. п.). Такие схемы могут найти применение в машинах для коммерческих целей, где на выходе получается очень большой цифровой материал, т. е. где нужно много времени для перевода чисел из одной системы в другую.

В статье приведены блок-схемы 4 типов сумматоров и разобраны более подробо основные элементы блок-схем.

Подобные схемы могут применяться также для перевода из чисто двоичной системы счисления в двоично-десятичную систему или систему с другим основанием, которая нужна при выводе результатов вычислений на перфокарты и для печати. А. Н. Мямлин

833. **Устройство ввода и вывода для вычислительной машины ИБМ-701. Стивенс** (Engineering organization of input and output for the IBM 701 electronic data-processing machine. Stevens Louis D.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 81—85 (англ.)

Система ввода и вывода данных машины ИБМ-701 состоит из устройства записи и считывания с перфо-

карт, печатающего устройства, двух устройств записи-считывания на магнитную ленту и панели управления. Прекращение выполнения основной программы наступает только в те моменты, когда происходит ввод или вывод данных непосредственно из оперативного запоминающего устройства на электростатических трубках. Передача данных между оперативным запоминающим устройством и устройством ввода—вывода происходит через регистр M/Q, используемый для умножения и деления (multiplier-quotient register).

Устройство считывания с перфокарт и записи на перфокарты. Применяются стандартные карты IBM. Скорость движения карт: при считывании 150 шт. в 1 мин., при записи 100 шт. в 1 мин.

На каждой карте записано 24 числа по 36 разрядов. Числа пробиты в виде 12 рядов по 2 числа в каждом. Для каждого ряда чисел на карте (т. е. для пары чисел) пробиты два синхронизирующих импульса, необходимых для размещения чисел по адресам. Пробивать числа на карту можно в любой системе счисления.

Печатающее устройство имеет возможность печатать 48 различных знаков, для выбора которых требуется определенный код. Оно работает со скоростью 150 строк в 1 мин. (в строке 120 знаков).

Считывающее и записывающее устройства с магнитной лентой. Машина снабжена 4 считывающими и записывающими устройствами с магнитной лентой. Каждое устройство состоит из 2 механизмов, приводящих в движение ленту. Время ожидания при переходе на работу с другим магнитофоном 10 мсек. Скорость считывания и записи 1250 чисел в 1 сек. Плотность записи на ленте 4 разряда на 1 *мм* на каждой из семи параллельных дорожек. 6 дорожек предназначены для записи чисел с 36 разрядами (6 групп по 6 разрядов в каждой), 7-я дорожка используется для проверки правильности считывания и записи с других шести дорожек. Передача числа параллельно-последовательная. Шесть разрядов вместе с контрольным подаются параллельно, а шесть групп подаются последовательно.

Выход числа из M/Q регистра на ленту осуществляется с последних шести разрядов. Первые шесть разрядов сдвигаются в регистре до тех пор, пока не достигнут последних шести разрядов. Контрольный разряд берется в виде кода «1» или «0» в зависимости от кода шести разрядов так, чтобы общее число единиц в группе из семи разрядов всегда было нечетным. При считывании с ленты каждая группа из шести разрядов поступает в шесть первых разрядов M/Q регистра и затем сдвигается. Конец записи отмечается должным пропуском. Ленточное устройство может считывать, когда лента движется в обратном направлении, а также может полностью перемотать катушку при соответствующем программировании.

Указывается, что недостатком предыдущих вычислительных машин этого типа являлось большое различие в конструкциях вводных и выводных систем. В данной машине устройства ввода и вывода сведены в стройную и довольно компактную вводно-выводную систему и представляют нечто новое в области быстродействующего электронного оборудования для обработки данных.

В статье приведены блок-схемы отдельных узлов.

В. А. Мельников

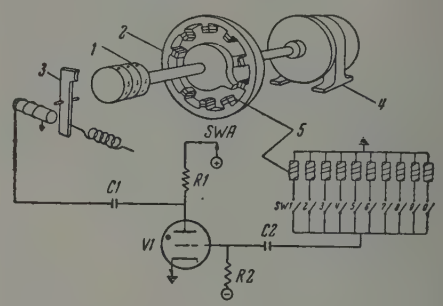
834. Устройства для передвижения среды — носителя информации. Снайдер (Devices for transporting the recording mediums. Snyder R. L.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 15—21 (англ.)

Приведены общие соображения о конструировании устройств ввода и вывода счетных машин.

Рассматриваются различные типы устройств ввода и вывода, использующие перфоленту, перфокарты, магнитную запись, фотозапись. Даются общие сведения об устройствах ввода и вывода данных наиболее известных американских электронных счетных машин; приведены фотографии этих машин. Е. И. Мамонов

835. Быстродействующее печатающее устройство. Розен (High-speed printing equipment. Rosen L.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 95—98 (англ.)

Устройство «Синхропринтер» предназначено для быстрой записи данных, полученных на электронной вычислительной машине. Оно состоит (см. фото) из



К реф. 835

типовых колес *1*, специального импульсного генератора *2*, печатающих электромагнитных молоточков *3*, управляемых тиратронами, и моторного привода *4*. Импульсный генератор состоит из статора, на зубцах которого находятся катушки *5*, и ротора с выступом. Типовые колеса находятся на одном валу с ротором импульсного генератора. Полученные в катушках импульсы открывают тиратроны в момент прохождения выбранных знаков типовых колес у соответствующих молоточков.

Электронная схема управления устройством обеспечивает печать за один оборот типовых колес одной строки знаков, выдаваемых вычислительной машиной. Скорость работы 15 строк в 1 сек. Указывается, что печатающий механизм может быть приспособлен к записи цифровых данных в виде точек кривой. При этом вместо цифр на типовые колеса наносятся точки, смещенные по ширине колеса одна относительно другой. Вместо одной строки знаков печатается одна точка кривой.

Н. П. Зубрилин

836. Система ввода и вывода универсальной цифровой вычислительной машины фирмы «Ферранти». Берд, Уэлби (The input-output system of the Ferranti universal digital computer. Byrd D. J. P., Welby B. G.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf.,1952, New York, 1953, 126—132 (англ.)

Ввод информации в машину осуществляется с 5- или 7-разрядной перфоленты фотоэлектрическим способом. Скорость протяжки 200 знаков в 1 сек. Движение ленты старт-стопное. Моменты считывания определяются отверстиями 8-й дорожки ленты, имеющей непрерывную перфорацию. Фотоэлементов 8, площадь каждого фотокатода 4 *см*^{2}. Сигнал от фотоэлемента проходит через усилитель на одном триоде. 5 разрядов считываются с неподвижной ленты последовательно с помощью маркирующих импульсов и направляются в запоминающее устройство (ЗУ) на электроннолучевых трубках. 4 группы по 5 разрядов образуют число;

6-я и 7-я дорожки ленты определяют номер группы. Лентопротяжный механизм работает на фрикционном принципе, что допускает протяжку ленты до 10 000 раз.

Вывод 20-разрядного числа из машины осуществляется 4 группами по 5 разрядов через 5-разрядный регистр либо на телеграфную ленту (печать последовательная, знак за знаком) или на перфоленту, либо на печатающее устройство. Перфорация 5 или 7 разрядов по ширине ленты осуществляется одновременно по сигналу от цепи проверки, сравнивающей состояние 5 шин выходного регистра с положением пяти электромагнитов, несущих контакты. Возможна перфорация одновременно двух лент со скоростью 50 знаков в 1 сек. Прерывистые движения связаны с относительно легкими деталями перфоратора.

Быстродействующее устройство печатает 150 строк в 1 мин. в любых 64 из 92 позиций строки на рулоне бумаги или на бланках. Одновременно с оригиналом можно печатать две копии. Для выполнения команды «печать» машина останавливается, и от нее отключается половина ЗУ, в которой записаны числа, подготовленные к выводу. Числа в ЗУ хранятся в виде четырех 5-разрядных групп. Печатный цикл машины делится на 15 подциклов по 27 мсек. В каждом подцикле луч обегает выводную половину ЗУ со скоростью 120 *мсек* на 10-разрядную строчку. Блок управления обеспечивает выборку сразу двух групп. Дешифратор или распределитель после сравнения разрядов адреса группы направляет выбранную группу в нужное место строки.

Каждое печатное колесо содержит 36 знаковых позиций (24 буквы латинского алфавита, цифры от 0 до 9, точку для обозначения десятичной дроби и машинный нуль). Размер шрифта 4×2,5 *мм*. Возможно осуществить печать через два и три интервала.

В устройствах использованы миниатюрные лампы (кроме мощных). В будущем предполагается перейти на перфокарты с той же скоростью вывода и увеличенную скорость печати. В. К. Зейденберг

837. Промежуточное преобразование между вводными и выводными устройствами и вычислительной машиной. Лейнер (Buffering between input-output and the computer. Leiner A. L.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 22—31 (англ.)

Рассматриваются основные методы передачи данных между устройствами ввода и вывода и быстродействующим запоминающим устройством вычислительной машины, в некоторых случаях методы иллюстрируются примерами систем.

Указывается, что необходимость промежуточного преобразования возникает из-за разницы в рабочих скоростях устройств ввода и вывода и быстродействующего запоминающего устройства, в связи с чем устройство промежуточного преобразования должно обладать широким диапазоном рабочих скоростей.

Процесс промежуточного преобразования разделяется на три стадии: 1) превращение несинхронизированных импульсных сигналов (обычно неопределенной частоты следования и длительности) в синхронизированные и стандартные по длительности и форме импульсные сигналы; 2) соединение цифр в числа или группы чисел; 3) передача этих групп чисел в быстродействующее запоминающее устройство.

Процесс вывода протекает в обратном порядке.

Приведена блок-схема системы синхронизации, использованной в машине СЕАК (SEAC), и дано описание ее работы. В. И. Смирнов

838. Перенос кодов с телетайпных лент на перфорационные карты и обратно. Нилсен (Converters between teletype tape and IBM cards. Nielsen Glen F.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 11—14 (англ.)

Даются общие характеристики выпускаемых фирмой ИБМ типов 43 и 63 оборудования, осуществляющих перенос 12-значных кодов с 80-колонных перфокарт на телетайпную ленту с 5-значным кодом (ширина ленты 17,5 *мм*, толщина 0,076 *мм*) и обратно. Предусмотрена возможность переносить коды с карт на ленту не только в принятой в телеграфии системе, но и в любой другой. Скорость работы 10 кодов в 1 сек.

Машина типа 63 переносит коды с перфокарт на ленту, машина типа 43 — с ленты на перфокарты. Как правило, обе машины работают автоматически. Машина типа 43 может использоваться и как ручной перфоратор.

Утверждается, что машины 63 и 43 служат хорошим средством для связи между счетными машинами, работающими на вводе и выводе с перфокартами и лентами, а также то, что они эффективно могут использоваться при изготовлении лент (предварительно коды наносятся на карты, выверяются, исправляются, а затем переносятся на ленту). К. А. Карпов

839. Трубки типа моноскоп для вычислительных машин и других применений. Хартман (A monoscope tube for computer and other applications. Hartmann John), Electr. Engng, 1954, 73, № 13, 208—212 (англ.)

На базе стандартной трубки моноскоп, применявшейся ранее в телевидении для передачи тест-таблиц, создана трубка для скоростного вывода результатов счета на фотопленку.

Из выпускающихся образцов моноскопов выбрана трубка типа К 1043, дающая четкость изображения 30 строк и сигнал минимум 1,5 *в* при сопротивлении нагрузки 40 *ком* и токе около 100 *мка*. Длина трубки 165 *мм*, максимальный диаметр 38 *мм*. Трубка имеет пушку триодного типа; к электродам приложены следующие напряжения: к первому аноду 290 *в*, ко второму аноду 1000 *в*, к мишени 1000 *в*, к коллектору 1250 *в*; емкость мишени на все прочие электроды не свыше 7 *мкф*. Сигналы, снимаемые с нагрузочного сопротивления моноскопа, усиливаются усилителем и подаются на модулирующий электрод обычной осциллографической трубки, имеющей развертку, общую с разверткой моноскопа. На трубке появляется изображение читаемого с моноскопа знака. В первой опытной трубке на мишени был полностью размещен весь алфавит и цифры. Выборка нужного знака производилась путем подачи на пластины трубки постоянных сдвигающих напряжений. Из-за сложности схемы дешифровки знака и неудобства эксплуатации от этого варианта отказались. В качестве рабочего выбран вариант, в котором имеется ряд трубок, работающих на общее нагрузочное сопротивление. На мишени каждой трубки напечатан только один знак (на окисленной алюминиевой пластинке печатается графитовый фон). Высота буквы 11 *мм*. Выборка знака производится путем отпирания соответствующей трубки. К отклоняющим пластинам всех моноскопов приложено общее напряжение развертки (растр из 50 строк). При анодном напряжении в 1 *кв* к горизонтальным пластинам нужно приложить не более 190 *в* для отклонения луча на длину, соответствующую 1,2 высоты знака, а к вертикальным пластинам — не менее 160 *в* для отклонения на длину, соответствующую 1,5 высоты знака. Напряжение первого анода при лучшей фокусировке лежит в пределах 285 и 295 *в* и регулируется общим для всех трубок потенциометром. Напряжения развертки осциллографической трубки, на которой «пишутся» знаки, должны быть несколько смещены по фазе относительно напряжений развертки моноскопов, так как из-за задержки сигнала усилителем могут получаться тени у изобра-

жения. При испытаниях на моноскопы подавался растр с частотой повторения строк 7 *кгц*. В. Н. Лаут

840. **Новый инструмент для обработки данных** (New scientific instrument process data), Marine J., 1954, 81, № 1, 20 (англ.)

Сообщение фирмы «Гербер Сайентифик Инструмент» (Gerber Scientific Instrument Co.) о разработке нового вычерчивателя кривых. Прибор позволяет вычерчивать семейства кривых, причем промежутки между кривыми могут быть разделены в любой пропорции, а также выполняет преобразование ординат кривой из линейной шкалы в нелинейную. Прибор имеет габариты 350×125×12 *мм* и является полностью механическим устройством. В. Д. Князев

841. **Общая дискуссия** (General Discussion), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 140—142 (англ.)

842. **Общий обзор конференции и перспективы применения цифровых вычислительных машин. Александер** (Summary and forecast. Alexander S N.), Review of Input and Output Equipment Used in Computing Systems. Joint AIEE-IRE-ACM Computer Conf., 1952, New York, 1953, 137—139 (англ.)

Выбор темы Нью-Йоркской конференции 1952 г. по вычислительным машинам: характеристики систем ввода и вывода и описание устройств ввода и вывода некоторых действующих электронных счетных машин — оправдывается постановкой новых задач перед вычислительными машинами, которым не удовлетворяли старые системы ввода и вывода. Конференции 1952 г. представлены как обзорные доклады, так и доклады по конкретным устройствам ввода и вывода, а также доклады по смежным вопросам (преобразование непрерывных величин в дискретные, дискретное управление фрезерным станком и др.).

В будущем есть тенденция применять машины, преобразователи информации, для оперирования с бумагами в промышленной, торговой и правительственной деятельности. Массовое применение машин-преобразователей может произвести переворот в конторской деятельности, так как делопроизводство будет автоматизировано, что освободит большое количество служащих. При этом вытесняются громоздкие шкафы для папок с делами, так как документы будут представлять собой магнитную запись. Обращение с документами и «подшивка» возможны на расстоянии с помощью телефонного наборного диска и телеграфной связи. При этом сокращается объем хранимого материала, улучшается водо- и огнестойкость по сравнению с бумагой или микрофильмами, если запись вести на металлическую магнитную среду. Возможность автоматического обращения к документам позволяет хранить их в подземных убежищах; при этом секретность информации может быть обеспечена кодированием документов или шифрованием самого текста.

При помощи машин, преобразователей непрерывных величин в дискретные, возможно управление непрерывными процессами. Например, при испытаниях в аэродинамической трубе машина может не только расшифровывать результаты текущего эксперимента, но и управлять постановкой следующего эксперимента вплоть до получения желаемого результата. Такие машины могут управлять работой аэропорта, а также могут быть использованы для предсказания погоды, для вычисления оптимального варианта конструкции, технологического процесса или любого экономического показателя. В. К. Зейденберг

843. **Счетчики оборотов** (Shaft counters), Rev. Scient. Instrum., 1953, № 24, 10, 1008—1009 (англ.)

Приводятся некоторые сведения о двух механических десятичных счетчиках типов «Digipot» и «Digicon», спроектированных фирмой «Райт» (Wright Engineering Co.).

Счетчик типа «Digipot», наряду с цифровыми колесами, имеет потенциометры, расположенные на каждом разрядном колесе, с которых снимаются напряжения, пропорциональные числам, которые можно одновременно наблюдать визуально.

В счетчике типа «Digicon» вокруг каждого разрядного колеса установлено по 10 контактов и, таким образом, каждое разрядное колесо выдает число импульсов, соответствующее определенной цифре.

Оба счетчика могут быть выполнены 3- или 5-декадными. Благодаря применению прецизионных шестеренок, необходимый вращающий момент для всех разрядов при вращении вала в обоих направлениях равен 105 *г см*. Указанные счетчики могут найти применение в области телеметрии для регистрации непрерывно изменяющихся величин. Они могут работать при широком диапазоне изменения температуры и при больших вибрациях (до 10 *g*). В. Н. Аверин

844. **Цифровой самописец** (Digital recorder), Aero Digest, 1953, 67, № 2, 58 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер Инструмент» (Potter Instrument Co.) об изготовлении цифровых самописцев, способных регистрировать до 150 восьмизначных чисел в 1 сек. На вход прибора должна подаваться двоично-кодированная десятичная информация. Приведена фотография прибора. В. А. Зимин

845. **Цифровой следящий механизм. Томассон** (Digital servomechanism controls shaft position. Thomasson L. T.), Electronics, 1954, 27, № 8, 134—139 (англ.)

Описывается система для пребразования импульсов в точное угловое положение выходного валика, разработанная фирмой «Боинг». Система состоит из электронного сравнивающего устройства и электромеханического преобразователя. Основной частью сравнивающего устройства является 9-каскадный сумматор на триггерах. Входные сигналы вводятся в сумматор в форме последовательных импульсов, однако путем изменения входных цепей и цепей обратной связи можно преобразовывать также параллельные входные данные. Сумматор вычисляет разность новых данных и старых, которые были зафиксированы выходным валиком преобразователя, и подает команду для вращения выходного валика в определенном направлении до снижения разности до нуля. В зависимости от величины разности валик вращается по часовой или против часовой стрелки.

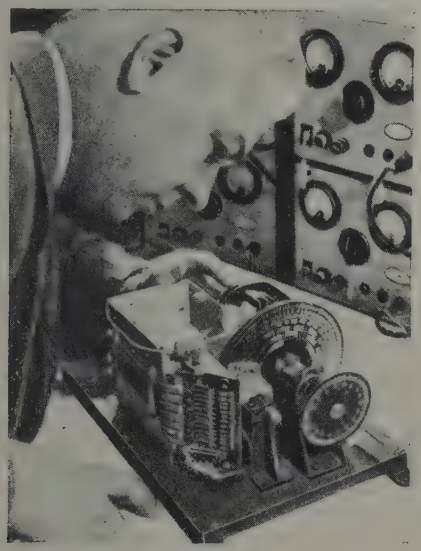
Электромеханический преобразователь состоит из трех барабанов диаметром 1,25 *см* и длиной 1,8 *см*, причем барабаны собраны из отдельных металлических зубчатых дисков, так что на поверхности барабана образуются сегменты, соответствующие определенным цифровым позициям барабана. Эти сегменты соединяются при помощи щеток с электронными цепями и определяют любую из 512 позиций валика. Преобразователь работает со скоростью 85 двоичных знаков в 1 сек., что соответствует повороту валика на 60° в 1 сек.

Система позволяет преобразовывать входные сигналы с точностью не ниже ± 0,1% и может быть использована в вычислительных машинах для преобразования цифровых данных в непрерывную форму. Приводятся схемы и фото устройства. М. С. Саплин

846. **Диск для получения цифрового кода. Кернахан** (A digital code wheel. Kernahan J. J. J.), Bell Labs Rec., 1954, 32, № 4, 126—131 (англ.)

Сообщение о разработанном и построенном фирмой «Белл» устройстве (см. фото) для представления угла поворота вала в цифровой форме. На валу, поворот

которого должен быть представлен в цифровой форме, жестко укрепляется диск. На диске имеется 13 концентрических колец. На каждом из этих колец имеется соответствующая комбинация прозрачных и непрозрачных участков. При повороте вала образуются различные сочетания этих участков, общее число этих сочетаний $2^{13} = 8192$. Отсюда получаемая точность



К реф. 846

отсчета угла поворота вала в цифровой форме равна 2,5′. Перед диском помещен источник света, за диском находится щель шириной 0,025 *мм*. Пучок света, пройдя через соответствующие прозрачные отверстия, находящиеся в данный момент против щели, попадает на 13 германиевых малогабаритных фотоэлементов, расположенных за указанной щелью. Комбинация состояний всех 13 фотоэлементов представляет угол поворота вала, выраженный числом в двоичной форме.

В статье рассматривается вопрос о выборе кода для последовательно следующих друг за другом регистрируемых положений вала. Указывается, что обычно используемый двоичный код при переходе от одной регистрируемой позиции к соседней давал бы максимальную погрешность, равную половине оборота вала. Предлагается модифицированный двоичный код (код Грея), дающий максимальную погрешность, равную одному делению наиболее отдаленной позиции, т. е. 2,5′. А. Б. Залкинд

847. Магнитное цифровое устройство для определения положения вала. Уинтер (Magnetic shaft-position digitizer. Winter Arthur J.), Electronics, 1953, 26, № 8, 214, 216, 218, 220, 222 (англ.)

Описаны три цифровых устройства для определения угла поворота вала.

В первом устройстве используется диск с пазами для прерывания луча света. Диск жестко связан с валом. С помощью фотоэлемента и усилителя импульс тока поступает в счетчик, когда луч света проходит через паз. Таким образом, угол поворота вала определяется путем подсчета числа пазов, через которые прошел луч света во время поворота вала. Со сдвигом по углу, относительно первого фотоэлемента, стоит второй фотоэлемент. Сдвиг по фазе между импульсами тока, полученными от фотоэлементов, меняется при изменении направления вращения вала, что и используется для того, чтобы счетчик осуществлял при этом операцию вычитания.

Второе устройство отличается от первого только тем, что диск с пазами заменен барабаном с выступами на его поверхности. Выступы действуют как зеркальные поверхности, отражая луч света на два фотоэлемента.

Принцип работы третьего устройства, названного магнитным, основан на изменении амплитуды переменной э. д. с., индуктируемой в считывающих проводниках, при перемещении последних над проводниками, по которым протекает ток высокой частоты. Проводники наносятся печатным способом по окружности диска, который жестко связан с валом. Рядом располагается второй, неподвижный диск, на который печатным способом наносятся считывающие проводники, имеющие угловое смещение один относительно другого. Это позволяет определить направление вращения вала по сдвигу фазы тока в катушке, связанной с читающими проводниками.

Печатный способ нанесения проводников позволил осуществить устройство, дающее 2000 импульсов при одном обороте вала. Описанное устройство определяет угол поворота вала при скорости вращения от 0 до 1800 об/мин. Частота тока, протекающего по проводнику подвижного диска, 1,6 *Мгц*. В. В. Бардиж

848. Устройство для измерения графиков (Graphic-record digitizer), Instruments and Automat., 1954, 27, № 2, 234 (англ.)

Сообщение фирмы «Телекомпьютинг» (Telecomputing Corp.) о выпуске прибора «Контакт Телеридер» (Contact Telereader) для снятия данных с графиков с точностью до 0,25 *мм*. Измерение может быть сделано между графиком и линиями координат и между двумя графиками. Калибровка прибора может быть нелинейной. Л. С. Легезо

849. Лампа — десятичный счетчик для вычислительных машин. Кёлер, Ричардс (Decade counter tube for accounting machines. Koehler R. B., Richards R. K.), Electronics, 1954, 27, № 11, 151—153 (англ.)

Приводится подробное описание принципа действия и основных характеристик десятичного счетчика ИБМ-78, представляющего собой газонаполненную лампу с 10 отдельными катодами и общим анодом. Тлеющий разряд происходит лишь между одним из катодов и анодом. Каждый подаваемый импульс переводит разряд в определенном направлении на соседний катод. Таким образом, ИБМ-78 имеет 10 различных состояний. Для передачи разряда в определенном направлении используются 10 промежуточных электродов, на которые одновременно подаются импульсы счета. В каждом счетчике имеется также 10 дополнительных электродов, позволяющих при подаче на них соответствующего импульса получать дополнение в счетчике, т. е. эти электроды переводят разряд не на следующий катод, а на катод, определяющий цифру, дополнительную к ранее установленной. Разрешающая способность такого счетчика 2000 имп/сек. Габариты балона — диаметр 21 *мм*, длина 65 *мм*. Приводится схема включения счетчика. Надежность работы такого счетчика определяется разностью между напряжением, требующимся для перехода разряда на соседний катод в прямом и обратном направлениях. Такая разница для перехода с основного катода на промежуточный электрод составляет 100 *в*, а для перехода с промежуточного на основной 150 *в*. При испытаниях на долговечность 50 образцов ИБМ-78 34 образца проработали успешно более 17 000 час. А. Б. Залкинд

850. Применение счетных ламп с холодным катодом в каскадном соединении. Уилан (The use of cold cathode counting tubes in cascade. Whelan D. T.), Electronic Engng, 1954, 26, № 313, 118—119 (англ.)

Специальная десятичная счетная лампа с холодным катодом (декатрон) GS10B, используемая фирмой «Бритиш Тэбьюлейтинг Машин», имеет анод, 10 катодов и две группы вспомогательных электродов по десять электродов в каждой. Между соседними катодами расположены два электрода по одному из каждой группы. Наличие тлеющего разряда между некоторым катодом и анодом определяет состояние декатрона. При добавлении единицы становятся наиболее отрицательными первая и затем вторая группы вспомогательных электродов, что обеспечивает переброс тлеющего разряда с катода через соседние первый и второй вспомогательные электроды на следующий катод, т. е. переход декатрона в новое состояние. При каскадном соединении подача двух сдвинутых во времени отрицательных импульсов с выхода предыдущего декатрона на вспомогательные электроды последующего осуществляется с помощью простой схемы переноса с использованием триггерной лампы с холодным катодом (GTE175M). Перед началом счета декатроны в счетчике устанавливаются на нуль подачей одновременно на «нулевые» катоды всех декатронов большого отрицательного импульса с помощью специального реле.
В. К. Зейденберг

851. **Двоичный счетчик** (Binary counter), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 10, 1007 (англ.)

Сообщение фирмы «Лаборатори фор Электроникс» (Laboratory for Electronics, Inc.) о выпуске магнитных блоков двоичного счетчика, дешифратора и блока синхронизации. Скорость счета счетчика до 50 имп/сек. Эти блоки могут работать с различными типами ламп и не предъявляют высоких требований к источникам питания. Л. С. Легезо

852. **Электронные счетчики и их применение. Ч. 1. Хакс, Клозе** (Elektronische Zähler und ihre Anwendungen. 1. Teil. Hacks J., Klose M.), Radio Mentor, 1953, 19, № 12, 632—636 (нем.)

Статья общего характера.

853. **Счетная декада** (Counting decade) Instruments and Automat., 1954, 27, № 2, 234, 236 (англ.)

Сообщение фирмы «Трейсерлаб» (Tracerlab. Inc.) о выпуске новой модели SC-41 десятичного счетчика, рассчитанного на частоту 75 *кгц*. Декада содержит 5 миниатюрных электронных ламп и 10 неоновых индикаторных ламп. Счетчик запускается отрицательным импульсом с амплитудой от 75 до 100 *в* и с временем нарастания 1 *мсек*. Л. С. Легезо

854. **Сменные блоки счетчиков фирмы «Санвик Контролс»** (Sunvic plug-in counter units), Electronic Engng, 1954, 26, № 315, 217 (англ.)

Сообщение фирмы «Санвик Контролс» (Sunvic Controls Ltd) о выпуске различных двоичных и десятичных счетчиков, состоящих из сменных блоков, включающих двоичные счетчики на электронных лампах, предварительные усилители, схемы формирования импульсов и выходные механические счетчики. Десятичные счетчики могут быть составлены из трех разрядов двоичного счетчика и одного специального двоичного разряда. Выпускаются также декатронные счетчики для работы на низкой частоте, частотомер и счетчик, выдающий на выходе импульс после подсчета заранее заданного числа импульсов. А. П. Щуров

855. **Электронное и механическое типовое конструирование счетных машин. Рид** (Electronic and mechanical modular design. Reid L. W.), Mach. Design, 1954, 26, № 3, 151—152 (англ.).

Приводится описание стандартных элементов машины ИРА-1103 фирмы «Ремингтон Ранд». Основным стандартным элементом служит блок на 14 радиоламп на 2 панелях, сделанный в виде раскрывающейся книги с двумя изоляционными сетками для крепления монтажа. Следующим элементом является стандартный шкаф (размер 2×1×0,75 *м*), любое число которых может быть соединено вместе. Контактные соединительные панели обеспечивают быструю разборку, погрузку и повторную сборку без паек. Наличие нескольких типов стандартных магнитных барабанов также упрощает конструирование вычислительных машин. Приводятся фото стандартного блока, шкафа, барабанов.
Л. А. Любович

856. **Электронный прибор для счетных и коммутирующих устройств. Дрюэ** (Dispositif électronique de comptage et de commutation. Druet Y.), Rech. aéronaut., 1953, № 35, 55 (франц.)

Группой исследований O. N. E. R. A. разработан стандартный элемент электронной автоматики. Электрическая схема элемента включает в себя две лампы типа триод-гексод и относящиеся к ним электрические цепи. Конструктивно элемент оформлен в виде съемного блока с использованием разъема телефонного типа. На триодах собрана триггерная схема, а на гексодах — две схемы совпадения. Частота повторений сигналов может достигать 3 *Мгц*.

Стандартный блок предназначен для использования в вычислительных машинах, счетных устройствах, устройствах телеметрии и т. п. В. А. Зимин

857. **Блочная конструкция** (Cellular construction), Mach. Design, 1953, 25, № 9, 123 (англ.)

Сообщение Национального бюро стандартов (США) о разработке стандартных двухламповых блоков для электронных схем. Блоки рассчитаны для установки в стандартные платы. Монтаж блоков и плат печатается. Приведены фотографии стандартных блоков и одного варианта стандартной платы. В. А. Зимин

858. **Блочные схемы для электронных вычислительных машин** (Circuitry «packages» for electronic computers), Techn. News Bull. Nat. Bur. Standards, 1953, 37, № 3, 36—37 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 1841; 1954, 2411.

859. **Электронное оборудование вычислительной машины НОРК** (75 percent of the electronic assemblies in NORC...), Computers and Automat., 1955, 4, № 2, 35 (англ.)

Сообщение фирмы «Ортон» (Orthon Corp.) о том, что ею изготовлено 75% электронных блоков, использованных в вычислительной машине НОРК (РЖМат, 1955, 3459, 3460).

860. **Сверхпрочная электронная лампа** (More shock-resistant tube), Business Week, 1954, № 1296, 52 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Сильвания» о разработке новой сверхпрочной миниатюрной радиолампы для использования в управляемых снарядах и т. д. Корпус лампы и держатели электродов изготовлены из керамики. При температурных испытаниях лампа выдерживала резкую смену температур при попеременном погружении в ванну с жидким азотом (—195°) и в ванну с кипящей водой. С. Е. Жорно

861. **Линии задержки** (Delay lines), Radio and Telev. News. Radio-Electronic Engng Ed., 1954, 51, № 1, 31 (англ.)

Сообщение фирмы «Электрометрик» (Electrometric, Inc.) о производстве линий задержки с распределенными постоянными. В. А. Зимин

862. **Импульсные блоки** (Digital pulse units), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 11, 1078—1079 (англ.)

Сообщение фирмы «Одио Продукте» (Audio Products Corp.) о выпуске импульсных блоков. Комплект блоков состоит из 16 механических идентичных блоков. Он выполняет такие операции, как формирование импульсов, счет импульсов, усиление, перемена знака импульса, трансформация выходного сопротивления и т. д., всего 72 отдельные операции. На комплекте блоков можно собрать сложные электронные переклю-

чатели, импульсные генераторы. Размеры каждого блока 7×11×24 *см*. Л. С. Лезгезо

863. **Импульсная приставка** (Digital pulse system), Radio and Telev. News, 1953, 50, № 6, 22, 37 (англ.) См. реф. 862

864. **Новый технологический процесс, допускающий возможность массового производства кристаллических триодов** (New process makes possible mass-produced transistors), Radio and Telev. J., 1954, 71, № 1, 18 (англ.)

Указывается, что на основе изготовленных электрохимическим методом триодов с поверхностным барьером может быть создан высокочастотный приемник с питанием от двух элементов батарейки к карманному фонарю. Размеры приемника порядка коробки сигарет, длительность работы несколько недель.

Сообщается, что триоды фирмы «Филко» устойчиво работают при частотах до 70 *Мгц*. Ожидается, что триоды с поверхностным барьером, герметично заделанные в металлические кожухи, в первую очередь найдут применение в военной технике вследствие их высокой стабильности, большой длительности службы и высокой эффективности. А. Р.

865. **Кристаллические триоды, изготовленные электрохимическим методом** (Electroplated transistors announced), Electronics, 1954, 27, 1, 10, 14 (англ.)

Фирма «Филко» (Philco) сообщает о выпуске триодов с поверхностным барьером, частотный предел которых в 10—100 раз превышает частотный предел обычных триодов. Толщина области базы таких триодов составляет $5 \cdot 10^{-4}$ *см* и выдерживается с точностью до $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ *см*. А. Р.

866. **Триод фирмы «Филко» с поверхностным барьером** (Philco's «surface-barrier» transistor), Radio and Telev. News. Radio-Electronic Engng Ed., 1954, 51, № 2, 78 (англ.)

Сообщение фирмы «Филко» о выпуске полупроводникового триода с поверхностным барьером, имеющего следующие характеристики: полоса пропускания свыше 50 *Мгц*; удовлетворительно работает и при частотах 70 *Мгц* и выше; шумфактор от 4 до 8 *дб* на частоте 10 *Мгц*, потребляемая мощность от 5 до 10 *мвт*. Усиление по мощности порядка 1000.

Приведена фотография триодов и указаны геометрические размеры элементов триода. В. С.

867. **Результаты экспериментов при отборе германиевых выпрямителей.** Гудаль (Résultats expérimentaux dans la sélection des redresseurs au germanium. Goudal Pierre), Cahiers phys., 1954, № 49, 65—66 (франц.)

Указывается, что прямой и обратный ток германиевых выпрямителей меняется с изменением температуры. Приведены результаты экспериментов с группой выпрямителей WG_2 Verts при температурах 23 и 39° и с группой выпрямителей Sylvania при температурах 24 и 44°. Результаты экспериментов для одного из группы испытываемых выпрямителей следующие: для WG_2 Verts прямой ток 4,75 *ма* (23°), 4,50 *ма* (39°), обратный ток 5,00 *μа* (23°), 9,00 *μа* (39°); для Sylvania прямой ток 5,00 *ма* (24°), 4,98 *ма* (44°), обратный ток 9,50 *μа* (24°), ток не установился (44°). Н. Н. Поснов

868. **Полупроводниковые диоды и триоды фирмы «Сильвания», употребляемые в счетных машинах** (Specify quality-tested Sylvania computer crystals and transistors), Electronics, 1953, 26, № 12, 7 (англ.)

Сообщение фирмы «Сильвания» (Sylvania Electric Products) о производстве девяти типов герметизированных полупроводниковых диодов и триодов. Л. В. Кутуков

869. **Германиевый диод GEX34** (Germanium diode GEX34), Wireless World, 1954, 60, № 3, 25 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о выпуске германиевого диода GEX34, который предназначен для применения в качестве детектора изображения с высоким уровнем. Диод применяется также как детектор звуковых частот и ограничитель звуковых шумов. В схеме детектора звуковых частот диод позволяет работать непосредственно на мощный пентод без промежуточных ступеней. В процессе производства GEX34 подвергается специальным испытаниям на частоте 35 *Мгц*. А. Н. Зимарев

870. **Германиевые диоды французского производства** (Diodes au germanium de fabrication française), Génie civil, 1954, 131, № 5, 18 (франц.)

Краткое сообщение фирмы La Compagnie des Lampes Mazda о выпуске германиевых диодов «Кристонс Мазда» (Cristons Mazda) типов 1N64, 1N48 и 1N51. Диоды не теряют своих свойств в диапазоне температур от —50 до +75° и имеют гарантийный срок службы 10 000 час. Утверждается, что по характеристикам эти диоды мало отличаются от диодов, изготовляемых в США. Л. П.

871. **Герметический германиевый диод** (Vacuum-tight germanium dicde), Tele-Tech, 1953, 12, № 9, 92 (англ.)

Сообщение фирмы «Бомак Лаборатори» (Bomac Laboratories, Inc.) о выпуске герметизированных германиевых диодов, представляющих собой маленький корпус из керамики с низкими потерями, в который ввернуты два капсюля из монель-металла. Герметизация достигается металлизацией корпуса. Специально обработанный германиевый шарик и вольфрамовый усик настраиваются для получения оптимальной характеристики с помощью тугопосаженных и завальцованных никелевых цапф. Никелевые выводные цапфы и гибкие луженые выводы дают возможность подсоединять диод с помощью пружинных держателей или припаивать его. О. К. Щербаков

872. **Герметизированные германиевые диоды** (Sealed germanium diodes), Instruments and Automat., 1954, 27, № 2, 266 (англ.)

Сообщение фирмы RCA о выпуске шести новых типов германиевых точечных диодов, заключенных в стеклянную оболочку. А. Н. Зимарев

873. **Герметизированные германиевые диоды** (Sealed germanium diodes), Instruments and Automat., 1954, 27, № 2, 266—267 (англ.)

Сообщение фирмы «Райтеон» о выпуске германиевых герметических диодов. Диоды проверяются в течение 12 час. при температуре +105° и 4 часа при температуре — 25°, в течение 32 час. проходят испытания «температура — влажность». А. Н. Зимарев

874. **Высокочастотный кристаллический триод** (High-range transistor), Business Week, 1954, № 1305, 154 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Белл» о разрабатываемом кристаллическом триоде, который будет работать на частоте 440 *Мгц* и может быть использован для устройств телевидения и систем частотной модуляции. А. Б. Залкинд

875. **Высокочастотный полупроводниковый триод** (High frequency transistor), Radio and Telev. News, 1954, 51, № 4, 53 (англ.)

Сообщение фирмы RCA о проводимых испытаниях поверхностного триода, который дает усиление до частот порядка 10 *Мгц*. Повышение граничной частоты достигается употреблением слоя германия менее чем 0,05 *мм*. Этот тонкий слой получается с помощью ультразвуковой вибрационной дрели. Приведен чертеж триода. Л. В. Кутуков

876. **Конструирование полупроводниковых триодов в Соединенном Королевстве** (Transistor development in the United Kingdom), Atomics, 1954, 5, № 7, 197—198 (англ.)

Приводятся данные точечных (ОС50 и ОС51) и поверхностных (ОС10, ОС11 и ОС12) полупроводниковых триодов, выпускаемых фирмой «Маллард» (Mullard).
Л. В. Кутуков

877. **Поверхностные полупроводниковые триоды для экспериментов** (Junction transistors for circuit experiments), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, **101**, part 3, № 70, XVII (англ.)
См. реф. 876.

878. **Кремниевые триоды для высоких температур** (Silicon transistors for high temperature), Prod. Engng, 1954, **25**, № 3, 213 (англ.)
Краткое сообщение фирмы «Филко» о применении для получения кремниевых триодов технологического процесса, аналогичного процессу изготовления германиевых триодов с поверхностным барьером. Отмечается, что прежде чем кремниевые триоды будут выпущены в продажу, необходимо преодолеть целый ряд технических трудностей.

879. **Схемы с полупроводниковыми триодами и ламповые схемы** (Transistor and valve circuitry), Wireless World, 1954, **60**, № 2, 68 (англ.)
Краткая статья, отмечающая различие между схемами, содержащими электронные лампы, и схемами, содержащими полупроводниковые триоды. В качестве примера такого различия упоминается новая цифровая машина, на полупроводниковых триодах в Манчестерском университете. Указывается, что эквивалентная машина, которая была бы построена на электронных лампах, потребовала бы большего количества электронных ламп по сравнению с количеством полупроводниковых триодов данной машины.
Н. Б.

880. **Применение терминов электронных ламп для полупроводниковых триодов. Холман** (Transistors in terms of vacuum tubes. Hollmann Hans E.), Tele-Tech, 1953, **12**, № 5, 74—76, 124—125 (англ.)
Рассматривается ряд параметров полупроводниковых триодов, аналогичных параметрам электронных ламп — внутреннее сопротивление коллектора, крутизна характеристики коллектора и т. д. Введение этих параметров упрощает расчеты схем с полупроводниковыми триодами. Указывается, что определение этих параметров из статических вольтамперных характеристик громоздко и отнимает много времени. Предлагается мостовая схема, позволяющая непосредственно определять эти параметры.
Л. В. Кутуков

881. **Методы и оборудование для испытания полупроводниковых триодов. О'Нилл, Гаттерман** (Methods and equipment for transistor testing. O'Neill B. J., Gutterman Arthur), Electronics, 1953, **26**, № 7, 172—175 (англ.)
Описан действующий прибор для получения на экране электронного осциллографа семейств входных и выходных характеристик точечных и слоевых полупроводниковых триодов.
Предусматривается получение характеристик полупроводникового триода, включенного по схеме с заземленным основанием и с заземленным эмиттером. Ступенчатое изменение тока смещения производится шаговым искателем.
Прибор может быть применен при изготовлении, формовке и эксплуатации полупроводниковых триодов.
А. Ф. Сергеенко

882. **Измерение дифференциальных параметров полупроводниковых триодов. Найт, Джонсон, Холт** (Measurement of the smallsignal parameters of transistors. Knight Geoffrey, Jr, Johnson Richard A., Holt Roland B.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 8, 983—989 (англ.)
Статья посвящена составлению одного из вариантов четырехполюсника, эквивалентного полупроводниковому триоду, работающему с переменными сигналами. Дана методика практического нахождения элементов четырехполюсника. Приведена таблица с условиями, при которых погрешности измерения параметров четырехполюсника минимальны. Выявлены источники этих погрешностей и рекомендованы пути повышения точности измерений.
А. Ф. Сергеенко

883. **Техника измерения параметров полупроводниковых триодов. Тернер** (Test techniques for transistors. Turner Rufus P.), Radio-Electronics, 1953, **24**, № 3, 78, 80, 82, 84 (англ.)
Описаны способы экспериментального определения параметров схемы замещения полупроводниковых триодов. Приведена простая схема для быстрого измерения этих параметров, а также схема для определения коэффициента усиления полупроводникового триода по напряжению.
А. Ф. Сергеенко

884. **Получение характеристик полупроводниковых триодов. Филбрук** (Obtaining transistor characteristic curves. Philbrook Warren), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 3, 66—67, 130—132 (англ.)
Описано простое приспособление для получения на экране осциллографа выходных характеристик полупроводниковых триодов. Рекомендован способ последовательного фотографирования кривых для получения семейства характеристик. Приводятся характеристики триодов.
А. Ф. Сергеенко

885. **Мостовые измерения параметров кристаллических триодов. Джаколетто** (Bridges measure transistor parameters. Giacoletto L. J.), Electronics, 1953, **26**, № 11, 144—147 (англ.)
Описаны мосты для измерения четырех полных проводимостей, описывающих триод в данной рабочей точке. Выбор проводимостей, а не полных сопротивлений в качестве величин, характеризующих триод, связан с относительной простотой их измерения.
Измерения на мостах, для которых, наряду с блок-схемами, даны и детальные схемы, могут производиться в интервале частот от 1 *кгц* до 1 *Мгц*. Пределы измерений компонент эквивалентных цепей в мостах выбраны так, чтобы покрыть интервал изменений параметров типичных триодов плоскостного типа. Указывается на возможность применения описанных мостов для измерения характеристик плоскостных диодов и точечно-контактных триодов при наличии у последних стабильности короткого замыкания.
А. Р.

886. **Быстрое определение некоторых электрических характеристик полупроводникового материала. Дейвис, Рубин, Страуб** (Rapid determination of some electrical properties of semiconductors. Davis Luther, Jr., Rubin Lawrence G., Straub W. D.), Trans. I. R. E., 1954, **ED-1**, № 2, 34—42 (англ.)
Приводятся простые, но весьма эффективные методы измерения отдельных параметров у исходного материала, предназначаемого для изготовления полупроводниковых приборов: сопротивление материала при комнатной температуре, время жизни неосновных носителей, изменение сопротивления в зависимости от температуры, эффект Холла и толщина базы у слоевых триодов. Определение толщины базы слоевых триодов заключается в измерении времени запаздывания короткого импульса в коллекторе по сравнению с импульсом, подаваемым в базу. Толщина базы определяется по формуле $(2Dt)^{1/2}$, где t — время запаздывания. D — диффузионная константа для неосновных носителей.
А. Б. Залкинд

887. **Прибор для снятия характеристик полупроводниковых триодов. Леннарц** (Kennlinienschreiber

für Transistoren. Lennartz Herbert), Funk und Ton, 1954, 8, № 1, 25—29 (нем.)
См. реф. 881, 884.

888. **Силовые блоки постоянного тока для полупроводниковых триодов** (Transistor d-c power packs), Electr. Manufact., 1953, 52, № 6, 158, 160 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Электроник Рисёрч Ассошиэйтс» (Electronic Research Associates, Inc.) о сконструированной серии миниатюрных блоков «Transpac», предназначаемых для питания постоянным током или постоянным напряжением счетных машин, полупроводниковых триодов и стандартных схем. Выпущенный в продажу блок типа CC-15 является секционированным источником постоянного тока. Каждая из пяти секций, которые могут использоваться как порознь, так и в различных комбинациях, дает ток 1 *ма* и имеет внутреннее сопротивление 250 *ком*. Емкостная связь между секциями гарантируется не более 5 *мкф*.

Каждый из блоков содержит трансформатор, мостовой выпрямитель на полупроводниковых диодах, селеновый регулятор и фильтр. Питание от сети переменного тока 115 *в* 60 *гц* или 400 *гц*. Размер блока 75×75×50 *мм*, вес 375 *г*. Приводится фото. Н. Б.

889. **Основы конструирования усилителей на полупроводниковых триодах. Шей** (Transistor application fundamentals. Shea R. F.), Electr. Engng, 1954, 73, № 4, 360—365 (англ.)

Сравниваются усилители низкой частоты на лампах и полупроводниковых триодах. Приводятся примеры расчета двух типов усилителей для адаптера на лампах 6SC7 и полупроводниковых триодах 2N43 (*p n-p*). Л. В. Кутуков

890. **Малогабаритные детали для схем с полупроводниковыми триодами** (Small components for transistor circuits), Aviat. Week, 1954, 60, № 13, 61 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о выпуске малогабаритных конденсаторов емкостью 8 *мкф*. Рабочее напряжение 20 *в*, диаметр 3 *мм*, длина 8 *мм*.

Сообщение фирмы «Гленко» (Glenco Corp.) о выпуске сопротивлений от 50 *ом* до 1 *Мом* мощностью от 0,1 до 0,25 *вт* на керамической основе. Отрицательный температурный коэффициент составляет 0,2% на 1°. Сопротивления залиты смолой.

Сообщение фирмы «Интернейшнл Ректифайер» (International Rectifier Corp.) о выпуске германиевых диодов на рабочую температуру до +100°.

Сообщение фирмы «К-Ф Девелопмент» (K-F Development Co.) о выпуске прецезионных проволочных безиндукционных сопротивлений от 0,1 *ом* до 1 *Мом*, мощностью от 0,25 до 1 *вт*. Точность до 0,1%.

Сообщение фирмы «Шеллкросс» (Shallcross Mfg Co.) о выпуске мощных сопротивлений различных номиналов, рассеивающих до 60 *вт*. С. Е. Жорно

891. **Германиевые выпрямители** (Germanium rectifiers), Pract. Wireless, 1954, 30, № 572, 330—332 (англ.)

Кратко описываются производство и испытания германиевых диодов, производимых фирмой «Дженерал Электрик». Германиевые диоды с точечными контактами, выпускаемые этой фирмой, могут быть разделены на два основных класса: 1) с высоким обратным напряжением, 2) с высокой прямой проводимостью. Первые изготавливаются из германия высокой чистоты, а вторые — из германия с точно контролируемыми добавками сурьмы.

Диоды с высокой прямой проводимостью можно разделить на две группы: а) с малой собственной емкостью и б) с большой собственной емкостью (до 30 *мкф*). Последние имеют очень малое прямое сопротивление.

Оболочка диодов изготавливается на полуавтоматических машинах и состоит из стекла с приваренными к нему трубками из сплава никеля с железом, в которых монтируются кристалл и острие. Острие изготавливается из платины диаметром 0,1 *мм*. Вся конструкция заваривается с очень коротким временем сварки, около 0,01 сек., во избежание порчи места сварки металла со стеклом. После монтажа кристалла и формовки контакта капсюль диода герметически запаивается легкоплавким припоем после предварительной тщательной очистки поверхностей от оксида. Точечный контакт фиксируется на поверхности кристалла германия с помощью полимеризующегося цемента.

Диоды предназначены для работы на высоких частотах и испытываются при частоте 45 *Мгц*, на стабильность во времени, после перегрузок, после температурных циклов и на длительность работы. Приведены данные для выпускаемых диодов CV448, CV425, CV442, GEX66, GEX64/3 и фотографии некоторых моментов технологического процесса. А. Р.

892. **Полупроводниковый триод с поверхностным барьером** (Flächenkontakt-Transistor), Radio Mentor, 1954, 20, № 4, 205—207 (нем.)

Общие сведения по изготовлению, свойствам и применению кристаллических триодов с поверхностным барьером. Указывается, что они могут быть использованы в усилителях до частот порядка 50 *Мгц*, в генераторах до 100 *Мгц*. В. З.

893. **Конструкция и изготовление счетчиков. Машланка** (Konstruktion und Herstellung von Zählwerken. Maslanka T.), Feingerätetechnik, 1953, 2, № 3, 123—131 (нем.)

В первой части работы дается обзор конструкций различных типов счетчиков, которые применяются для подсчета расхода воды, бензина, масла, газа, электрического тока, для подсчета оборотов катушечных машин, ходов механических прессов и автоматов, ткацких машин, типографских станков и т. д. Автор делит счетчики, в соответствии с их назначением, на две группы: к первой из них относятся счетчики, которые устанавливаются на различных машинах и работа которых сопутствует работе агрегата; ко второй группе относятся счетчики, регистрирующее действие которых является главной функцией во всей установке. По принципу действия они делятся на счетчики с непрерывным и прерывистым вращательным движением. Дано описание стрелочных и дисковых счетчиков. Особое внимание уделено описанию конструкции и принципа работы счетчиков, имеющих цифровые колеса.

Вторая часть работы посвящена технологии изготовления различных элементов счетчика, главным образом цифровых колес. Приводятся данные о материале, употребляющемся при постройке счетчиков, и способах обработки деталей резанием и прессовкой.
А. В. Лебедев

894. **Новые виды реле с широкими возможностями применения** (New line of relays offers wide application), Prod. Engng, 1953, 24, № 12, 220 (англ.)

Сообщение фирмы «Поллак» (Joseph Pollak Corp.) о выпуске новых электромеханических реле. Реле серии 100 рассчитаны на 1 млн. срабатываний, работают на постоянном токе. Сердечник из хорошего магнитного материала делает реле весьма чувствительным и быстродействующим, что позволяет использовать его в вычислительных машинах, измерительной аппаратуре и т. п. Реле серии 300 постоянного тока миниатюрное, снабжено специальной антивибрационной пружиной. Реле серии 500 спроектировано для использования в линиях связи. Предусмотрено выполнение этими реле механической работы, кроме замыкания контактов. Л. С. Легезо

895. **Методы использования логарифмической линейки для электротехнических расчетов. Окс** (A method for slide rule calculation of electrical problems. Oakes Francis), Proc. Instn Electronics, 1953, № 32, 18—26 (англ.)

Подробное описание различных способов расчета при решении электротехнических задач с помощью логарифмической линейки и примеры простейших расчетов (модуля и фазы комплексного сопротивления по заданным параметрам схемы и частоте и т. п.).
И. А. Вильнер

896. **Возведение в куб на счетной линейке.** Ван Шоу-и (計算機上開立方問題. 王守義), 數學通訊 (Шусюэ тунсюнь), 1955, № 1, 3—14 (кит.)

897. **Новое вычислительное устройство для расчета пружин.** Шевалле (Ein neuer Rechenschieber für Federn. Chevalley Th.), Techn. Rundschau, 1953, 45, № 23, 13 (нем.)

Номографический прибор, сочетающий принцип счетной линейки и номограммы с параллельными шкалами, предназначенный для расчета пружин. Номографическая формула не указана. Приведена фотография.
В. Б.

898. **Счетная линейка фирмы «Эллайд Ойл» подсчитывает стоимость горючего** (Allied Oil slide rule computes fuel costs), Fueloil and Oil Heat, 1954, 13, № 3, 122 (англ.)

Объявление фирмы «Эллайд Ойл» (Allied Oil Co.) о выпуске счетной линейки, дающей сравнительную стоимость определенного количества тепла, полученного сжиганием нефти, угля, газа, в зависимости от местных цен на эти три вида горючего. В. М. Брадис

899. **Вычислительное устройство для преобразования нелинейной информации** (Computing instrument for nonlinear data reduction), Aviat. Age, 1953, 20, № 4, 86 (англ.)

Сообщение фирмы «Гербер Сайентифик Инструмент» (Gerber Scientific Instrument Co.) о выпуске устройства для обработки осциллограмм. С помощью этого устройства можно непосредственно определить искомые данные в истинном масштабе, независимо от формы кривых. Устройство может делить и умножать графики на постоянное число, на нелинейный множитель и в логарифмической пропорции. Устройство содержит 18 шкал, включая шкалы логарифмическую, вероятностей, тригонометрическую, шкалу степеней, линейную и обратную шкалы. Размеры устройства 356×××127×12 *мм*. Приведена фотография. Л. С. Легезо

900. **Счетные и переводные круги** (Beräknings- och omvandlingsskivor), ERA, 1953, 26, № 2, 20 (швед.)

Сообщение о логарифмических дисках шведских фирм.

Диск фирмы «ЭИО» (EIO — Elektriska Installatörs Organisationernas Riksförbund) служит для расчета падения напряжения в медных проводах. Он состоит из трех вращающихся картонных дисков разного диаметра со стрелкой в центре и пригоден для 5 напряжений: трехфазных 500 *в*, 380 *в*, 225 *в* и однофазных 220 *в* и 127 *в*. Вращением на дисках устанавливают известные значения напряжения, мощности (или тока), длины и поперечного сечения провода и после поправки на cosφ получают искомое падение напряжения.

Диски фирмы «АБ Теknорит» (AB Teknorit) служат для перевода единиц объема, скорости, веса и т. д. из одной системы в другую. Для электриков рекомендуется диск № 9 (для единиц мощности) и диск № 10 (для единиц работы), каждый из которых имеет по 7 логарифмических шкал. Диски сделаны из металла. Диск № 10 переводит друг в друга *квт-ч*, *л. с.-ч.* (*hkh*), *кГм*, *ккал*, *дж* и английские единицы *ft/lb* (фут-фунт) и BTU (британская термическая единица).
Г. Н. Поваров

901. **Проекционное вычислительное устройство** (Calcolatore logaritmico a proiezione), Elettrotecnica, 1954, 41, № 4, 230—232 (итал.)

См. РЖМат, 1955, 5446.

902. **Счетная линейка для определения влажности почвы.** Роуленд, Фейган, Крабб (A slide rule for soil moisture determinations. Rowland Elmer F., Fagan T. D., Crabb George A., Jr), Agric. Engng, 1954, 35, № 3, 163—164 (англ.)

Линейка для определения влажности почвы по электрическому сопротивлению с учетом поправки на температуру.
В. М. Брадис

903. **Номограмма типа счетной линейки.** Хамфри (Slide rule nomograph. Humphrey Howard T.), Antiaircraft J., 1954, 97, № 1, 15 (англ.)

Устройство для вычисления высоты самолета по дальности и углу возвышения.
В. М. Брадис

904. **Специальные счетные линейки для расчетов рабочего времени.** Кислер (Sonderrechenstäbe für die Zeitermittlung. Kießler Fritz), Ind.-Anz., 1954, 76, № 85, 1279—1283 (нем.)

Описана специальная счетная линейка с двумя движками, предназначенная для расчета машинного времени при работе на токарных, сверлильных, фрезерных (в частности, зуборезных), шлифовальных, строгальных и долбежных станках. Разобран ряд конкретных примеров, даны фото. Рассмотрен пример проектирования специальной счетной линейки для получения рабочего времени при сварке тонких листов в зависимости от длины шва и толщины листа на основе данных хронометража (наблюдалось чистое рабочее время на сварку 1 *м* шва в зависимости от толщины листа).
В. М. Брадис

905. **Новый портативный счетный прибор.** Стойкович (Ein modernes, handliches Rechengerät. Stojkovits E. von), Energie und Technik, 1954, 6, № 4, 86 (нем.)

Описывается счетный диск «Контроллер», представляющий собой логарифмическую линейку с круговыми шкалами.
В. М. Брадис

906. **Музыкальная шкала в виде счетной линейки помогает композиции и транспонированию музыкальных произведений** (Musical slide rule aids composition and transposition), Popul. Mech. Mag., 1954, 101, № 2, 109 (англ.)

Сообщение о музыкальной шкале, выполненной в виде счетной линейки. На неподвижной части шкалы схематически обозначены белые и черные клавиши фортепиано, а на подвижной — соответствующее им положение на нотном стане. С помощью шкалы можно переводить определенный нотный текст для исполнения в более высокой или более низкой тональности, а также транспонировать ноты для различных музыкальных инструментов оркестра. Приводится фото музыкальной шкалы.
В. Б.

907. **Помощь электронных машин коммерческим организациям** (The «electronic brain» as an aid to sales organisations), Instrum. Practice, 1954, 8, № 1, 59—60 (англ.)

Краткое изложение доклада, прочитанного в Манчестерском отделении Объединенной ассоциации коммерсантов представителем фирмы «Ферранти», о возможностях применения электронных вычислительных машин для экономических расчетов (зарплата, стоимость продукции и т. п.) и последующей дискуссии.
К. С.

908. **Применение вычислительных машин в промышленности.** Мур (The application of computers to industry. Moore W. J. M.), Engng J., 1954, 37, № 9, 1068—1072 (англ.)

Популярная статья о применении в промышленности вычислительной техники. Для расчетов, связанных с электрическими системами, в Филадельфийском Франклиновском институте (США) строится моделирующее устройство, на котором можно будет моделировать

28 электростанций, 270 линий передач и 90 нагрузок. Использование вычислительной техники для создания тренажеров дает значительные экономические выгоды. Управление посадкой и взлетом самолетов на аэродроме дает возможность увеличить число посадок реактивных самолетов до 120 в час, в то время как ранее использующееся оборудование максимально позволяло осуществлять посадку всего лишь 40 самолетов в час. Рассматриваются примеры использования вычислительных машин для продажи билетов на самолеты, для статистики, коммерческой деятельности и т. д. Приводится библиография. А. Б. Залкинд

909. Электронные вычислительные машины предсказывают погоду (Electronic computers to forecast weather), Aviat. Week, 1954, 61, № 10, 16 (англ.)

Сообщение об использовании электронных вычислительных машин для предсказания погоды. Дается краткий очерк организации предсказания погоды на цифровых вычислительных машинах в США.

В. Б.

910. Скоростная арифметика. Электронная вычислительная машина как средство исследования. Грош (High speed arithmetic: The digital computer as a research tool. Grosch H. R. J.), J. Opt. Soc. America, 1953, 43, № 4, 306—310 (англ.)

Дается краткий очерк истории развития электронных вычислительных машин, выполняющих арифметические операции по двоичной системе. Указываются примеры применения их для расчетов в оптике.

А. Л. Картужанский

911 П. Системы электростатических запоминающих трубок. Ардити (Storage tube systems. ArditiMaurice) [International Standard Electric Corp.]. Канад. пат. 497042, 20.10.53

Запоминающие устройства на двух- и трехлучевых трубках. В. Л.

912 П. Электрическое устройство для запоминания (Electric storage apparatus) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 153975, кл. 05.5, 19.11.53

Устройство для запоминания цифровой информации состоит из множества запоминающих приборов, у которых временные интервалы, отведенные для считывания информации с них, перекрывают друг друга. Посредством этого возможно получить частоту повторения цифр при считывании в несколько раз большую, чем у одного прибора. Указывается на рациональность применения этого принципа для запоминающего устройства на электроннолучевых трубках. В. Н. Лаут

913 П. Электронное запоминающее устройство (Electronic storage) [British Telecommunications Research Ltd]. Австрал. пат. 154093, кл. 05.5, 26.11.53

Схема, соединяющая запоминающее устройство с регистрами. Регистры служат для выборки из запоминающих устройств или засылки в них информации. Используется одна управляющая схема для всех запоминающих устройств. А. В. Аваев

914 П. Электронный счетчик. Манли (Electronic counter. Manley John C.) [Reconstruction Finance Corp.]. Пат. США 2646534, кл. 315—166, 21.07.53

Кольцевой счетчик с любым коэффициентом пересчета на газоразрядных лампах. В. З.

915 П. Электронные счетные схемы (Electronic counting circuits) [National Research Development Corp.]. Австрал. пат. 152247, кл. 05.5, 23.07.53

Сочетание триггерных и вентильных цепей в счетчике, когда запускающий импульс непосредственно подается, кроме первого, хотя бы на один определенным образом выбранный последующий в ряду триггер через вентильную цепь, которая управляется состоянием одного или больше триггеров, предшествующих выбранному. В. К. Зейденберг

916 П. Машина для проверки записи. Шейфер (Record controlled machine. Shafer Orville B.) [International Business Machines Corp.]. Пат. США 2624459, кл. 209—110, 6.01.53

Проверка осуществляется путем сравнения соответствующих возбужденных полей, набранных ручным способом на регистраторах записи дважды.

Я. А. Хетагуров

См. также: 9, 17, 770, 793

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ*

А

Абдуллаев Т. Г. 757
Азбелев Н. В. 756
Александров П. С. 104
Альмухамедов М. И. 402
Альтман М. 593
Андрунакиевич В. А. 257
Аржаных И. С. 459
Ахиезер Н. И. 473

Б

Багдасаров А. Д. 462
Барановская Л. С. 71
Бари Н. К. 312
Басс Г. И. 429
Белоносов С. М. 482
Березанский Ю. М. 448 Д, 603
Березкин Е. Н. 424 Д
Блох Э. Л. 543
Борувка О. 406
Бубенников В. А. 695 Д
Бурмистрова В. А. 723 Д

В

Вайнберг М. М. 565
Вальков К. И. 691 Д
Ван Шоу-и 896
Васильев В. В. 477
Винокуров В. Г. 571
Войт С. С. 456
Врубель Т. Г. 725

Г

Гейликман А. И. 657
Геронимус Я. Л. 505
Гиршович М. В 680
Глазман И. М. 606
Гнеденко Б. В. 20
Гольдберг А. А. 390 Д
Гольдман М. А. 581
Го Мо-жо 3
Гончаров В. Л. 331 К
Горелик Г. С. 97
Гринблюм М. М. 571
Гринцевичюс К. И. 745 Д
Гюнтер Н. М. 446 К

Д

Даугавет И. К 751
Денисюк И. Н. 777
Депман И. Я. 85
Джваршейшвили А. Г. 322
Джемшид Ибн-Мас'уд Аль Каши (Джемшид Гиясэддин Каши) 64
Джрбашян М. М. 343
Дринфельд Г. И. 715
Ду Ши-жань 60
Дун Гуан-чан 748
Дыманов Р. Г. 693 Д

Е

Евграфов М. А. 341
Ерошкина Л. Н. 57 Д

Ж

Жаутыков О. А. 453

З

Зморович В. А. 350
Зуховицький С. І. 610

И

Ибрагимов И. И. 328
Йовчук М. Т. 15
Подковская Н. К. 689 Д
Исмайлов А. Я. 332 Д

К

Калужнин Л. А. 20
Карпелевич Ф. И. 229
Кац Г. И. 266
Киселев А. А. 455
Кобелева Е. Н. 95
Когава 668
Колесова Е. В. 303
Колмогоров А. Н. 38 К, 305
Кордемский Б. А. 54 К
Кострюков К. И. 74
Красносельский М. А. 504, 573, 582
Крижановський О. М. 449
Кудрявцев Л. Д. 304
Куратовский К. 5
Куфарев П. П. 367

Л

Левин В. П. 687 Д
Левитан Б. М. 440, 441, 442
Леммлейн В. 246
Линецкий В. Д. 765
Линьков Г. И 43 К
Линь Чжэнь-шэн 748
Ли Цзе-чжи 748
Лопатинский Я. Б. 212 К
Лотоцкий А. В. 363
Лувсанцерен Ш. 640
Лурсманашвили А. П. 152
Лушникова З. М. 422 Д
Ляцунов А. А. 104

М

Малкин И. Г. 417
Марджанишвили К. К. 165
Мейман Н. Н 445, 752
Меклер Я. И. 786
Мергелян С. Н. 343
Митропольский Ю. А. 400
Морозов В. В 196
Мукминов Б. Р. 472
Мусалов А. Х. 458
Мушиц Н. П. 231
Мысовских И. П. 755

Н

Натансон И. П. 498, 515 К
Несмеянов А. Н. 1
Нестеренко А. П. 690 Д
Никольский С. М 488
Новиков П. С. 112

О

Оболашвили Е. И. 471 Д
Олевский М. Н. 428
Отрадных Ф. П П. 87

П

Павинский П. П. 483
Первикова В. Н. 688 Д
Перетягин Б. М. 421 Д
Петров А. В. 639 Д
Петровский И. Г. 96
Плоткин Б. И 223
Понтрягин Л С. 290
Постников А. Г. 146
Прудников В. Е. 83

Р

Редозубова О. С. 724 Д
Родосский К. А. 127. 128
Ростовцев Н. А. 463
Рутицкий Я. Б. 582
Рутман М. А. 596
Рябцов И. И. 423 Д

С

Салье М. А. 111 К
Семененко М. П. 4
Семушин А. Д. 686 Д
Семухина Н. В. 367
Сесекин Н. Ф. 222
Сибирский К. С. 599
Слободянский М. Г. 759
Соколов Н. П. 195
Соловьев А. Д. 391 Д
Станько Д. Г. 67
Старостин А. И 222
Стенцер П. В. 563 К
Сунь Цзэ-ин 729
Сюй Ли-чжи 193, 501

Т

Тавадян А Б. 333 Д
Тадэнума 452
Тафт В. А. 795 К
Терсенов С. А. 443
Томашегич В. Ф. 141
Тончиев А. В. 2
Тумаркин Г. Ц. 342
Турецкий А. Х. 345

У

Ульянов П. Л. 313

Ф

Фаддеев Д. К. 163
Федоров В. С. 381
Федорова Н. М. 711 Д

Х

Хаймульдин О. 420 Д
Халезов Е. А. 238, 239
Харазов Д Ф. 413, 605
Хомутов К. М. 692 Д
Хуа Ло-гэн 378, 379

* Начиная с 1.1. 1956 г., авторский указатель будет состоять из следующих списков: 1) списка подлинных фамилий авторов статей и книг, написанных при помощи русского алфавита, и транскрипций фамилий авторов статей, написанных при помощи других алфавитов, кроме латинского; 2) списков подлинных фамилий авторов статей, написанных при помощи латинского, армянского, грузинского и других алфавитов, а также иероглифов.

Ц

Цандеков М. И. 470 Д
Цитланадзе Э. С. 572
Цыганков И. В. 716
Цянь Дуань-чжуан 728

Ч

Чеботарев Г. Н. 197
Челидзе В. Г. 500
Черников С. Н. 226
Чернова М. Л. 694 Д
Четверухин Н. Ф. 685 К
Чечик В. А 398
Чжан Мин-юн 748
Чжан Су-чэн 296
Чжун Тун-дэ 721

Ш

Шагинян А. Л. 340
Шао Пинь-цун 194
Шафаревич И. Р. 243, 244
Шварц Ш. 234
Шилов Г. Е. 611
Шилова Г. И. 489
Шмульян Ю. Л. 358

Щ

Щелкачев В. Н. 509

Э

Эльсгольц Л. Э. 414, 419 К

Ю

Юшкевич А. П. 73

Я

Яруткин Н. Г. 289

A

Abramowitz M. 392
Agnew R. P. 630
Ahlfors L. V. 82
Aitken A. C. 37
Alexander S. N. 842
Alexiewicz A. 90
Allred Ch. M. 782
Al-Kasi Gamsid B. Mas'ud 65
Altman M. 593
Amerio L. 416
Andersen E. S. 631
Andersson J. 200
Andreian C. 383
Andreoli G. 262
Andreotti A. 706
Antosiewicz H. A. 392
Aoki K. 282, 295
Arditi M. 911 П
Arens R. 624
Asger Aaboe 66
Atkinson F. V. 404, 405
Avakumović V. G. 337, 508

B

Badillo Barallat M. C. 794
Bagemihl F. 310, 364, 536
Bargmann V. 228
Bar-Hillel Y. 119
Barratt M. G. 288
Basu S. K. 532
Baumann V. 478
Bauer H. 625
Baur A. 25
Beaumont H. du B. 191 К
Beckman F. S. 277
Behari R. 669
Behnke H. 19
Behnke M. N. 374
Berge C. 591
Bergen A. R. 450
Berger E. R. 465
Bernstein F. 671
Bertolini F. 432
Best G. C. 767
Betz A. 352
Bhandarkar A. S. 61
Bhapkar V. P. 642
Bianchi L. 722 К
Bickley W. G. 554 РЕЦ
Bodemüller H. 75
Bodewig E. 762
Bolles E. E. 796
Booth A. D. 775
Borel A. 301
Bosanquet L. S. 525
Bose N. N. 541
Bosson G. 496
Bott R. 298, 299
Box G. E. P. 649, 650
Boyer C. B. 69
Bressan A. 464
Bridger M. 17
Bruins E. M. 58
Brzoska F. 48 К
Bukovics E. 766
Bunt L. N. H. 21
Burbeck D. W. 798
Burchnall J. L. 506
Burrow M. D. 217
Bush R. R. 23
Butzer P. L. 495
Byrd D. J. P. 836

C

Cahn L. 812, 815
Campbell R. 326
Campos Ferreira J. 597
Caputo M. 740
Carathéodory C. 389 К
Carlitz L. 177, 178, 179, 180, 181, 182
Carnap R. 119
Cassels J. W. S. 147, 149
Čech E. 15
Chak A. M. 545
Chambers L. G. 467
Chang S. C. 296
Chang Shin-Hsun 475
Chevalley Th. 897
Chisini O. 696
Chrestenson H. E. 329
Chu E. L. 527
Chu Hsien H. 758
Cinquini-Cibrario M. 425
Clenshaw C. W. 772
Clifford A. H. 237
Cockcroft W. H. 232
Coddington E. A. 608
Cohen A. A. 800
Cohn P. M 258
Collingwood E. F. 368
Colucci A. 46 К
Conforto F. 705
Conti R. 401
Cooper J. L. B. 34
Copeland Sr. A. H. 664
Corput J. G. van der 520
Cotlar M. 601
Court N. A. 72
Cox D. R. 658
Crabb G. A., Jr 902
Cramer H. 27
Cugiani M. 131
Curtis C. W. 301

D

Dagnall B. D. 806
Dallaporta N. 28
Dalla Volta V. 727
Danielson S. 512 К
Davis L., Jr 886
Davy N. 353
Deely E. M. 818
Dekker T. 311
Delcourte M. 187
Deprit A. 469, 587, 628
Derwidué L. 709
Dobrovolný B. 50 К
Dolcher M. 269
Drenckhahn F. 29
Droussent L. 698
Druet Y. 856
Dugué D. 636
Dunnington G. W. 76, 77
Duparc H. J. A. 171
Durand E. 430

E

Edwards P. D. 31
Effertz H.-F. 359
Egerváry E. 207
Ehresmann Ch. 736
Elliott J. P. 484
Ellis D 261
Emersleben O. 78
Epheser H. 411
Epstein M 209
Erdélyi A. 550
Erdös P. 164, 536
Ertel H. 438
Ewald G. 679
Exner W. L. 797

F

Faessler C. 681
Fagan T. D. 902
Falk S. 761
Fan Ky 202
Fáry I. 285, 286
Fejes Tóth L. 750
Fernandes Costa M. A. 494
Fettis H. E. 393
Fialkow A. 785
Fichera G. 355
Fine N. J. 143
Finn R. 433
Fischer J. 667
Fjellstedt L. 175
Flanders H. 209
Fleischer I. 592
Fölner E. 578
Forder H. G. 678 К
Foulkes H. O. 216
Fox Ch. 557, 558
Fraissé R. 118
Frank W. 481
Franz W. 435
Fréchet M. 487
Fricke A. 492
Fried E. 245
Fryer K. D. 170
Fuchs L. 247, 248
Fucks W. 648
Fullerton R. E. 579

G

Galbură G. 371
Garcia Pradillo J. 201
Gehring F. W. 499
Gellerstedt S. 47 К
Germay R. H. 476
Gerst I. 785
Gheorghiu Gh. Th. 513 К
Gheorghiu O. Em. 510
Gherardelli F. 707
Ghircoiașu N. 40 К
Giacoletto L. J. 885
Gibson G. R. 56 К
Girault M. 654
Gleason A. M. 301
Godeaux L. 700
Gomes R. L. 568, 743
Gonzáles del Valle A. 718
Goodstein R. L. 120
Gorrissen L. 676
Gosselin R. P. 323
Goudal P. 867
Grabbe E. M. 798
Gréa R. 787
Green S. L. 55 K
Grenander U. 647
Gröbner W. 253
Groot J. de 311
Grosch H R. J. 910
Großmann W. 80
Grotemeyer K. P. 746
Grothendieck A. 589, 590
Grunsky H. 410
Guggenheimer H. 300, 737
Guillotin M. R. 699
Gupta H. 142
Gutterman A. 881
Guy R. 609

H

Hacks J. 852
Hadamard J. 68
Hadwiger H. 598
Haimo F. 220
Halberstam H. 144
Halmos P. R. 616, 617
Halperin I. 566, 577
Hamming G. 204
Hansen H. H. 36
Harary F. 278, 279

Harish-Chandra 614, 615
Hartman Ph. 602
Hartmann J. 839
Hasse H. 157
Hatschek R. L. 821
Havliček K. 100
Heinz E. R. W. 719
Helgason S. 575
Helelr A. 283, 284
Henrici P. 555 Д
Herstein I. N. 254, 255, 256
Hervé M. 375
Hersch J. 490
Herzog F. 334
Hewitt E. 621
Higonnet R. 787
Hinohara Y. 251
Hiong King-Lai 366
Hirschman J., Jr 621
Hitotumatu Sin 388
Hlawka E. 136
Hochschild G. 259
Hofmann J. E. 88
Hoggatt V. 172
Hohn F. 792
Hollmann H. E. 880
Holt R. B. 882
Holubář J. 101
Homma T. 267
Hornich H. 426
Howe R. M. 830
Hruša K. 514 К
Hsu L. C. 501
Hua Loo-Keng 379
Huckemann F. 347, 384
Humphrey H. T. 903
Hunter J. S. 666
Hylleraas E. 547

I

Iséki K. 236, 265
Ishiguro K. 302
Ishikawa O. 385
Iwasaki A. 474
Iyer R. V. 187, 188
Izumi Shin-ichi 314, 315, 316

J

Jackson R. R. P. 663
Janiczak A. 116
Jarden D. 173
Jerison M. 622
Johnson N. L. 653
Johnson R. A. 882
Joos G. 45 К
Jurkat W. B. 524

K

Kaluza Th. 45 К
Kamke E. 32, 33
Kanazawa T. 474
Kane R. P. 769
Kaplansky I. 301, 595
Kappus R. 773
Kato T. 613
Katz L. 211
Kawaguchi A. 742
Kawahara Y. 708
Kayan C. F. 814
Keifer C. J. 758
Keller O.-H. 218
Kennedy M. 550
Kerawala S. 713
Kernahan J. J. J. 846
Kheiralla A. Ali 554 РЕЦ
Kießler F. 904
Klepper W. 712
Kline M. 682
Klose M. 852
Kneser M. 150, 151
Knight G., Jr 882
Koehler R. B. 849
Kohlenberg A. 771
Koiter W. T. 451
Koizumi S. 556
Kolbenheyer T. 468
Korevaar J. 336
Kövari T. 203
Kowalsky H.-J. 585
Kozakiewicz W. 495
Kreisel G. 122
Kreyszig E. 747
Krull W. 199
Kruse S. 49 К
Kudô A. 632
Kuhn P. 161
Kuipers L. 139, 140
Kuratowski K. 91, 94
Kurita M. 720

L

LaFara R. L. 770
Lafleur Ch. 522
Lainé E. 517 К
Lambek J. 183
Lambert R. J. 210
Lampard D. G. 662
Lauffer R. 675
Lawden D. F. 51 К
Lawson D. I. 813
Lazard M. 221, 230
Le-Cam L. 641
Lehmer E. 158
Lehto O. 365
Leiner A. L. 837
Leite R. J. 830
Leja F. 348
Lelong P. 386
Lennartz H. 887
Lenz H. 749
Leray J. 460
Lesemann K.-J. 807
LeVeque W. J. 130
Lévy P. 633, 634, 635, 638
Lichnerowicz A. 735, 739
Liebscher U. 667
Lindgren H. 176
Lippmann H. 604
Livingston A. E. 523
Longo C. 702
Loomis L. H. 567
Lorant M. 825
Lorent H. 672, 714
Lorentz G. G. 533
Loud W. S. 576
Lukacs E. 645
Lumer G. 616
Łuszczewska-Romahnowa S. 114

M

Maak W. 612, 629 К
McGregor J. L. 550
McGuire J. H. 813
McKean H. P., Jr 623
MacKenzie R. E. 233
McLain D. H. 224
MacLane S. 287
McMillan B. 620
Madow W. G. 23
Machara S. 121
Magenes E. 437
Mahler K. 148
Makar B. H. 339
Makar R. H. 339
Malmquist S. 644
Malmqvist J. 512 К
Mambriani A. 497
Manaresi F. 439
Manley J. C. 914 П
Mardell T. B. 56 К
Marinescu G. 574
Martin A. I. 607
Martin C. F. 530
Martinelli E. 373
Maschler M. 376
Ma lanka T. 893
Massera J. L. 415
Mathesius P. 53 К
Menger K. 35
Mergelyan S. N. 344
Meschkowski H. 354, 377
Metelka J. 99
Michael J. H. 306
Michaelson R. L. 806
Miles F. T. 781
Miller N. 577
Mishra M. A. C. 656
Misra B. 320
Mohanty R. 320
Mohr E. 552
Moisil Gr. C. 790, 791
Moldovan E. 327
Moore Ch. N. 529
Moore W. J. M. 908
Moser L. 183, 189
Mostow G. D. 225
Mostowski A. 89
Müller H. 618
Muracchini L. 703
Murakami H. 474
Murnaghan F. D. 227
Myhill J. 117
Myrberg L. 357

N

Nagell T. 159
Nakano H. 619
Nanjundiah T. S. 553
Nardini R. 457
Nassif M. 544
Natucci A. 62
Neister S. B. 798
Neumann B. H. 213
Neumann H. 213
Neville E. H. 192
Newman M. 154
Newton R. H. C. 535
Neyman J. 665
Nicol C. A. 190
Nielsen G. F 838
Nikodým O. M. 583, 584
Nöbauer W. 169
Nollet L. 710 К
Nomizu K. 732
Nordqvist B. 49 К
Norman R. Z. 278, 2 9
Numakura K. 235

O

Oakes F. 895
Obláth R. 79, 92, 93
Oderfeld J. 783
Odlanicki-Poczobutt M. 98
Offord A. C. 637
Ohtsuka M. 370
Olkin I. 211, 651
Olsen H. 548
Olum P. 294
Olver F. W. J. 549
O'Meara O. T. 153
O'Neill B. J. 881
Otsuki T. 726
Ozawa M. 387

P

Paasche I. 184, 503, 519 К
Parker W. V. 206
Parodi M. 129
Pati T. 537, 538
Payne L. E. 461
Percival W. S. 784
Permutti R. 741
Péter R. 123, 124
Peters A. S. 466
Petiau G. 110
Petrescu St. 733
Philbrook W. 884
Piazzolla Beloch M. 41 К
Pillai K. C. S. 646
Pini B. 444
Pirl U. 480 К
Poli L. 394
Polimerou L. G. 819
Popken J. 145
Porcelli P. 330
Prachar K. 126
Price R. 660
Protter M. H. 431
Prüfer H. 684 К
Puppi C. 28

Q

Quarles D. A., Jr 277

Я

Ragab F. M. 540
Ragazzini J. R. 450
Rahman A. 764
Raiffa H. 23
Rajagopal C. T. 526
Ramachandran K. V. 646
Ramanathan K. G. 156
Ramanujan M. S. 534
Rankin R. A. 153
Rattray B. A. 275
Rau H. 22
Rau P. S. 677
Rédei L. 198
Reichbach J. 113
Reid L. W. 855
Reifenberg E. R. 270
Rescher N. 70
Ricci G. 132, 133, 134
Richards R. K. 849
Richardson C. H. 518 К

Ridder J. 125
Rider P. R. 652
Riguet J. 793
Ringel G. 273
Roberts G. T. 586
Rodriguez Bachiller T. 52 К
Rogosinski W. W. 325, 570
Rose A. 115
Rosen L. 835
Rosenblatt M. 647
Rosenbloom P. 569
Rosenthal J. E. 351
Rosina B. A. 704
Rosskopf M. F. 26
Rostagni A. 28
Roth K. F. 502
Rowland E. F. 902
Roy S. N. 651
Royden H. L. 369
Rubin L. 886
Rüping H. 30
Rychnovský R. 44 К

S

Salamon P. 683 К
Šalát T. 521
Salem R. 309
Sandham H. F. 511
San Juan Llosá R. 560
Sansone G. 401
Santalo L. A. 697
Šantavy I. 485
Sasayama H. 734
Sauer R. 673
Scarbrough A. D. 797
Scarfiello R. 588
Schaefer H. 308
Schenkman E. 215
Schmeidler W. 479 К
Schneider H. 760
Scholz D. R. 361
Schubert H. 280
Sears D. B. 409
Sebastiãñe Silva J. 16
Seidel W. 364
Selberg A. 135
Semín F. 717
Sengenhorst P. 24
Shapiro V. L. 324
Shafer O. B. 916 II
Shea R. F. 889
Shephard G. C. 219
Shiraiwa K. 293
Shoda K. 263
Siddiqi J. A. 531
Sierpiński W. 108
Sim A. C. 774
Simon H. A. 491
Sinden F. W. 208
Singer I. M. 624
Sion M. 307
Sips R. 539
Skolem Th. 168
Slater L. J. 542
Smirnov V. I. 39 К
Smith F. B. 809
Smith Ph. H. 778
Snowdon W. 353
Snyder R. L. 834
Sobolev S. L. 447 К
Sodaro J. F. 779, 780
Soden W. 776
Soliman Hassan Abdel-Aty 655
Soodak H. 781
Sós V. T. 203
Spampinato N. 701
Sprinkle H. D. 310
Stalley R. 137
Stallman F. 346, 356
Stanković B. 562
Stein K. 380
Steiner A. 436
Steinfeld O. 249, 250
Stenström V. 512 К
Stevens L. D. 833
Stojkovits E. von 905
Stoker J. J. 466
Stolt B. 160, 167
Straub W. D. 886
Sunouchi Gen-ichirô 556
Švec M. 407
Svoboda F. 788, 789
Swallow K. P. 166
Swann W. F. G. 434
Szalay L. v. 753
Szarski J. 427
Szász G. 260
Szegö G. 338

T

Tadenuma R. 452
Takasu T. 744
Tamari D. 242
Tanaka C. 362
Tanaka Sen-ichiro 395
Tani S. 627
Tasny-Tschiassny L. 754
Tatarkiewicz K. 493, 504
Tatchell J. B. 528
Taton R. 109
Teghem J. 335
Terracini A. 105
Thébault V. 185, 186
Thierrin G. 240
Thom R. 291
Thomasson L. T. 845
Thomsen D. L., Jr 559
Thrall R. M. 23
Thüring 805
Thurston H. A. 264
Toda H. 292
Todd J. 202, 219, 763
Tominaga A. 268
Tortrat A. 659
Townsend R. 832
Tranter C. J. 486
Tricomi F. G. 454, 546
Trigg C. W. 674
Tsuji M. 349, 372
Tsurumi S. 418
Turán P. 203
Turnbull H. W. 103
Turner R. P. 883

U

Uchiyama S. 162
Umegaki H. 626

V

Vallée R. 661
Vandiver H. S. 190
Van Kampen N. G. 360
Van Nostrand R. G. 551
Verblunsky S. 321
Vesely F. 516 К
Villari G. 403
Vincensini P. 102
Vogel K. 63
Volkmann B. 138
Volpato M. 412
Vrănceanu G. 730
Vries H. L. de 731
Vučkič M. 14
Vučkovič V. 561

W

Waelbroeck L. 600
Wahlgren A. 174
Wallace A. D. 241
Walter E. 719
Weibull M. 643
Weier J. 271, 272
Welby B. G. 836
Whelan D. T. 850
White P. A. 281
Whittaker E. 84
Winter A. J. 847
Wintner A. 602
Wolff K. G. 18
Wolfson K. G. 252
Wong Y. K. 205
Wright F. M. 507, 594
Wyman M. 189

Y

Yamaguti M. 399
Yamanoshita T. 297
Yang Chung-Tao 274
Yano K. 738
Yano Sh. 319
Yoneda K. 382
Yood B. 580
Yoshizawa T. 396, 397 408
Yûjôbô Z. 317, 318

Z

Zarankiewicz K. 276
Zelinka R. 101
Zemanian A. H. 768
Zitarosa A. 214

[illegible] 748
[illegible] 729
小河原正巳 668
[illegible] 296

[illegible] 748
徐利治 193, 501
杜石然 60
林振聲 748

王守義 896
華羅庚 378, 379
董光昌 748
蕭沼良一 452

郁品琮 194
錢端壯 728
鐘同德 721

Технический редактор *В. В. Гражданкина*